

Signaux Discrets et Aléatoires - Correction des travaux dirigés 4

Olivier Alata, Loic Denis, Ben Gao, Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Page de garde	1
Table des matières	3
Exercice 1 : Caractéristiques de la différence de deux valeurs d'un signal aléatoire	5
Énoncé	5
Rappels	5
Remarque	5
Correction	5
Correction du 1	5
Correction du 2	6
Correction du 3	7
Exercice 2 : Signal aléatoire des télégraphistes (ou Basculeur Poissonien)	11
Énoncé	11
Correction	12
Correction du 1	12
Correction du 2	13
Correction du 3	14
Correction du 4	15
Exercice 3 : Calcul de différentes grandeurs statistiques et de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) à l'aide de Matlab	17
Énoncé	17
Correction	24
Correction du 1	24
Correction du 2	26
Correction du 3	26
Correction du 4	27
Correction du 5	28
Remarque sur le 5	29
Correction du 6	29
Correction du 7	29

Exercice 1 : Caractéristiques de la différence de deux valeurs d'un signal aléatoire

Énoncé

Soit le processus aléatoire à temps continu Y constitué des variables aléatoires associées à la différence de deux variables aléatoires complexes d'un processus aléatoire à temps continu X pour des instants séparés par un intervalle de durée T :

$$Y_t = X_{t+T} - X_t.$$

1 Exprimer en fonction des caractéristiques du signal aléatoire X :

a. Les moments d'ordre 1 et 2 de Y_t .

b. La fonction d'autocorrélation $r_{YY}(t_1, t_2)$ et les fonctions d'intercorrélation $r_{XY}(t_1, t_2)$ ainsi que $r_{YX}(t_1, t_2)$.

2 X est un signal aléatoire stationnaire au sens large (on posera $t_2 - t_1 = \tau$).

a. Que deviennent les expressions du **1** ? Est-ce que Y est aussi stationnaire au sens large (SSL) ? Donner aussi l'expression de la fonction d'autocovariance de Y en fonction de celle de X .

b. Exprimer alors la densité spectrale de puissance de Y en fonction de celle de X .

Rappel : $g(t + t_0) \xrightarrow{TF} e^{j2\pi ft_0} G(f)$ et $e^{j2\pi ft_0} G(f) \xrightarrow{TF^{-1}} g(t + t_0)$.

3 On se place dans le cas où $X_t = a \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$, a et f_0 étant des constantes réelles positives et Φ une variable aléatoire réelle uniformément répartie sur $[0; 2\pi]$. Calculer la densité spectrale de puissance de Y et tracer sa représentation graphique.

Rappels

Dorénavant, X_t est une variable aléatoire complexe et donc X est un signal aléatoire complexe c'est-à-dire une collection de variables aléatoires complexes. Par ailleurs, X_t est donc une application de Ω dans \mathbb{C} . $X_t(\omega)$ est donc un complexe pour tout $\omega \in \Omega$. Il convient de noter qu'en probabilités, on omet de préciser l'aléa pour simplifier les notations. Il est donc essentiel d'être précautionneux sur ce que l'on manipule.

Remarque

Comme le signal est complexe, ce n'est pas le moment d'ordre deux qu'il faut regarder mais le moment d'ordre deux du module de X_t . Ainsi, on calcule $\mathbb{E}[|Y_t|^2]$ à partir de $\mu_{2,X}(t) := \mathbb{E}[|X_t|^2]$. Il convient de garder à l'esprit que pour avoir un nombre positif ou nul, prendre le module est nécessaire.

Correction

Correction du 1

Correction du 1a Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_{t+T}] - \mathbb{E}[X_t] = \mu_{1,X}(t+T) - \mu_{1,X}(t)$. De même, comme $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - (ab^* + a^*b)$ pour tous les complexes a et b , il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Y_t|^2] &= \mathbb{E}[|X_{t+T} - X_t|^2] \\
&= \mathbb{E}[|X_{t+T}|^2] + \mathbb{E}[|X_t|^2] - \mathbb{E}[X_{t+T}X_t^*] - \underbrace{\mathbb{E}[X_{t+T}^*X_t]}_{=\mathbb{E}[X_tX_{t+T}^*]} \\
&= \mu_{2,X}(t+T) + \mu_{2,X}(t) - r_{XX}(t+T, t) - r_{XX}(t, t+T).
\end{aligned}$$

Correction du 1b On calcule la fonction d'autocorrélation en développant le produit :

$$\begin{aligned}
r_{YY}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[Y_{t_1}Y_{t_2}^*] \\
&= \mathbb{E}[(X_{t_1+T} - X_{t_1})(X_{t_2+T} - X_{t_2})^*] \\
&= \mathbb{E}[X_{t_1+T}X_{t_2+T}^*] - \mathbb{E}[X_{t_1+T}X_{t_2}^*] - \mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2+T}^*] + \mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}^*] \\
&= r_{XX}(t_1+T, t_2+T) + r_{XX}(t_1, t_2) - r_{XX}(t_1+T, t_2) - r_{XX}(t_1, t_2+T).
\end{aligned}$$

On calcule maintenant la fonction d'intercorrélacion entre X et Y :

$$\begin{aligned}
r_{XY}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X_{t_1}Y_{t_2}^*] \\
&= \mathbb{E}[X_{t_1}(X_{t_2+T} - X_{t_2})^*] \\
&= \mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2+T}^*] - \mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}^*] \\
&= r_{XX}(t_1, t_2+T) - r_{XX}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

On remarque ensuite

$$\begin{aligned}
r_{YX}(t_1, t_2) &= r_{XY}(t_2, t_1)^* = r_{XX}(t_2, t_1+T)^* - r_{XX}(t_2, t_1)^* \\
&= r_{XX}(t_1+T, t_2) - r_{XX}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Correction du 2

Ici, $r_{XX}(t_1, t_2) = r_{XX}^s(\tau)$ où $\tau = t_2 - t_1$. De plus, $\mu_{1,X}(t) = \mu_X$ et $\mu_{2,X}(t) = \mathbb{E}[|X_t|^2] = \mu_{2,X}(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Correction du 2a On obtient $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ et

$$\mathbb{E}[|Y_t|^2] = 2\mu_{2,X}(0) - r_{XX}^s(-T) - r_{XX}^s(T) = 2\mathbb{E}[|X_0|^2] - 2\text{Re}(r_{XX}^s(T)).$$

Ainsi, $\mathbb{E}[|Y_t|^2]$ ne dépend pas de t .

De même, on a

$$r_{YY}(t_1, t_2) = 2r_{XX}^s(\tau) - r_{XX}^s(\tau - T) - r_{XX}^s(\tau + T),$$

ainsi que

$$r_{XY}(t_1, t_2) = r_{XX}^s(\tau + T) - r_{XX}^s(\tau) \quad \text{et} \quad r_{YX}(t_1, t_2) = r_{XX}^s(\tau - T) - r_{XX}^s(\tau).$$

Comme les deux premiers moments de Y_t ne dépendent pas de t et comme $r_{YY}(t_1, t_2) = r_{YY}^s(\tau)$ où $\tau := t_2 - t_1$, on en déduit que Y est un signal stationnaire au sens large. On a de plus :

$$r_{YY}^s(\tau) = 2r_{XX}^s(\tau) - r_{XX}^s(\tau - T) - r_{XX}^s(\tau + T).$$

On calcule maintenant la fonction d'autocovariance de Y :

$$\begin{aligned} c_{YY}(t_1, t_2) &= r_{YY}(t_1, t_2) - \underbrace{\mathbb{E}[Y_{t_1}] \times \mathbb{E}[Y_{t_2}]^*}_{=0} \\ &= 2r_{XX}^s(\tau) - r_{XX}^s(\tau - T) - r_{XX}^s(\tau + T) \\ &= 2 \left(c_{XX}^s(\tau) + |\mu_{1,X}(0)|^2 \right) - \left(c_{XX}^s(\tau - T) + |\mu_{1,X}(0)|^2 \right) \\ &\quad - \left(c_{XX}^s(\tau + T) + |\mu_{1,X}(0)|^2 \right) \\ &= 2c_{XX}^s(\tau) - c_{XX}^s(\tau - T) - c_{XX}^s(\tau + T). \end{aligned}$$

Correction du 2b Par définition, la densité spectrale de puissance du signal stationnaire au sens large X est

$$\widehat{R}_{XX}^s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}^s(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau.$$

On a de même

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{YY}^s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{YY}^s(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2r_{XX}^s(\tau) - r_{XX}^s(\tau - T) - r_{XX}^s(\tau + T)) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \\ &= 2\widehat{R}_{XX}^s(f) - \widehat{R}_{XX}^s(f) e^{-2j\pi fT} - \widehat{R}_{XX}^s(f) e^{2j\pi fT} \\ &= 2(1 - \cos(2\pi fT)) \widehat{R}_{XX}^s(f). \end{aligned}$$

Correction du 3

Ici, $X_t(\omega) = a \cos(2\pi f_0 t + \Phi(\omega))$ avec $\mathcal{L}(\Phi) = \mathcal{U}_{[0;2\pi]}$. Commençons par vérifier que X est bien un signal stationnaire au sens large.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}(a \cos(2\pi f_0 t + \Phi)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} a \cos(2\pi f_0 t + x) f_{\Phi}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} a \cos(2\pi f_0 t + x) \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0;2\pi]}(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos(2\pi f_0 t + x) dx \\ &= \frac{a}{2\pi} [\sin(2\pi f_0 t + x)]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On remarque ainsi que $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t .

On calcule maintenant le moment d'ordre deux (vu que le signal considéré est réel, prendre le module n'est plus nécessaire) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_t^2] &= \mathbb{E} \left[a^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \Phi) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2(2\pi f_0 t + x) dx \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t + 2x)}{2} dx \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left(\pi + \left[\frac{1}{4} \sin(4\pi f_0 t + 2x) \right]_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le moment d'ordre deux non plus ne dépend pas de t .

Calculons maintenant la fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned}
 r_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}^*] \\
 &= \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}] \\
 &= a^2 \mathbb{E} [\cos(2\pi f_0 t_1 + \Phi) \cos(2\pi f_0 t_2 + \Phi)].
 \end{aligned}$$

Or, $\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} (\cos(B - A) + \cos(B + A))$. Conséquemment :

$$\begin{aligned}
 r_{XX}(t_1, t_2) &= \frac{a^2}{2} \mathbb{E} [\cos(2\pi f_0(t_2 - t_1)) + \cos(2\pi f_0(t_2 + t_1) + 2\Phi)] \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\cos(2\pi f_0 \tau) + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0(t_2 + t_1) + 2x) dx}_{=0} \right) \\
 &= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$r_{XX}(t_1, t_2) = r_{XX}^s(\tau) := \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$$

Par conséquent, le signal X est bien stationnaire au sens large. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \widehat{R_{XX}^s}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{4} (e^{2j\pi f_0 \tau} + e^{-2j\pi f_0 \tau}) e^{-2j\pi f \tau} d\tau \\
 &= \frac{a^2}{4} \delta_{f_0}(f) + \frac{a^2}{4} \delta_{-f_0}(f).
 \end{aligned}$$

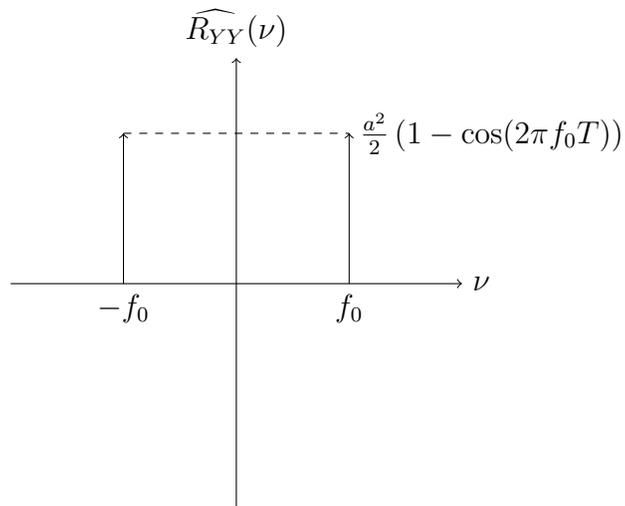
Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{YY}^s(f) &= \frac{a^2}{2} (1 - \cos(2\pi fT)) (\delta_{f_0}(f) + \delta_{-f_0}(f)) \\
&= \frac{a^2}{2} (1 - \cos(2\pi f_0T)) \delta_{f_0}(f) + \frac{a^2}{2} (1 - \cos(-2\pi f_0T)) \delta_{-f_0}(f) \\
&= \frac{a^2}{2} (1 - \cos(2\pi f_0T)) (\delta_{f_0}(f) + \delta_{-f_0}(f)) ,
\end{aligned}$$

après avoir utilisé la parité du cosinus.

Voici la représentation graphique de la densité spectrale de puissance de Y :

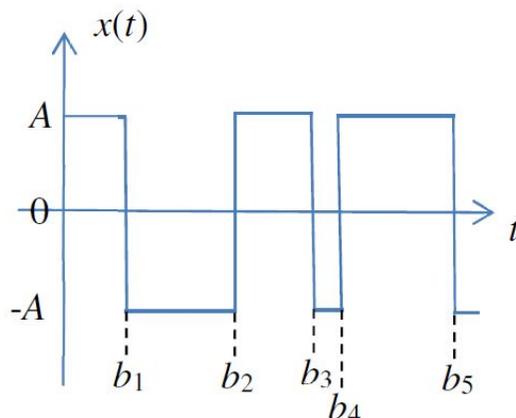
FIGURE 1 – Densité spectrale de puissance de Y



Exercice 2 : Signal aléatoire des télégraphistes (ou Basculeur Poissonien)

Énoncé

Soit le signal aléatoire réel causal $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ dont une de ses réalisations (ou trajectoires) a donné le signal suivant :



X peut prendre à n'importe quel instant $t \geq 0$ les valeurs $+A$ ou $-A$. La distribution de probabilité initiale de X_0 (X_t pour $t = 0$) est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_0 = +A) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_0 = -A) = q.$$

La suite aléatoire (strictement croissante) $B = \{B_i, i \in \mathbb{N}\}$ avec $B_0 = 0$, définit les instants où se produisent les basculements de $+A$ à $-A$ ou de $-A$ à $+A$ (voir figure). Une réalisation de B se note alors $b = \{b_i\}$ (voir figure). Dans le cas où $x(0) = +A$ (voir figure), si le nombre total de basculements dans l'intervalle $]0; t]$ est pair alors $x(t) = +A$, et si le nombre de basculements est impair alors $x(t) = -A$. De plus, on suppose que la variable aléatoire N_t associée au nombre de basculements dans un intervalle de longueur t est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre αt :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!}, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

α étant le nombre moyen de basculements par unité de temps. Le processus $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est appelé processus de Poisson de taux moyen α .

On peut remarquer que le signal aléatoire X peut s'écrire sous la forme

$$X_t = (-1)^{N_t} X_0$$

où X_0 et N_t sont supposées indépendantes.

1 Démontrer que l'on a, pour $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X_t = +A) = 1 - \mathbb{P}(X_t = -A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p - q)e^{-2\alpha t}$$

et calculer la moyenne de X_t , pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Quelques rappels :

- $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, pour $|x| < \infty$.
- Pour deux v.a. Y et W , $\mathbb{P}(Y = y \mid W = w) = \frac{\mathbb{P}(Y=y, W=w)}{\mathbb{P}(W=w)}$ si $\mathbb{P}(W = w) \neq 0$.
- Loi marginale dans un cas discret :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{w \in W(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y, W = w) .$$

2 Démontrer que la fonction d'autocorrélation peut se mettre sous la forme suivante :

$$r_{XX}(t_1, t_2) = A^2 e^{-2\alpha(t_2 - t_1)}, \quad 0 < t_1 < t_2 .$$

On définit alors un signal aléatoire $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ en supposant que le processus de Poisson dure depuis un temps infini, ce signal aléatoire prenant alors, à chaque instant, les valeurs $+A$ ou $-A$ de manière équiprobable.

3 Dédire de ce qui précède que X “devient” stationnaire au sens large lorsque t tend vers l'infini.

C'est le modèle mathématique du signal aléatoire des télégraphistes.

4 Calculer la variance et la densité spectrale de puissance de X et tracer sa représentation graphique.

Correction

Correction du 1

Calculons comme suit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_t = +A) \\ &= \mathbb{P}(X_t = A, X_0 = A) + \mathbb{P}(X_t = A, X_0 = -A) \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\ &= \mathbb{P}(X_0(-1)^{N_t} = +A, X_0 = +A) + \mathbb{P}(X_0(-1)^{N_t} = +A, X_0 = -A) \\ &= \mathbb{P}(A(-1)^{N_t} = +A, X_0 = +A) + \mathbb{P}(-A(-1)^{N_t} = +A, X_0 = -A) \\ &= \mathbb{P}((-1)^{N_t} = 1, X_0 = +A) + \mathbb{P}((-1)^{N_t} = -1, X_0 = +A) \\ &= \mathbb{P}((-1)^{N_t} = 1) \mathbb{P}(X_0 = +A) + \mathbb{P}((-1)^{N_t} = -1) \mathbb{P}(X_0 = -A) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \mathbb{P}(N_t \in 2\mathbb{N}) \mathbb{P}(X_0 = +A) + \mathbb{P}(N_t \in 2\mathbb{N} + 1) \mathbb{P}(X_0 = -A) \\ &= p \mathbb{P}(N_t \in 2\mathbb{N}) + q \mathbb{P}(N_t \in 2\mathbb{N} + 1) = p \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = 2n) + q \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = 2n + 1) \\ &= p \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^{2n}}{(2n)!} + q \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= p e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{2n}}{(2n)!} + q e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = p e^{-\alpha t} \cosh(\alpha t) + q e^{-\alpha t} \sinh(\alpha t) \\ &= p e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} + q e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} e^{-2\alpha t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)e^{-2\alpha t} = \mathbb{P}(X_t = +A) . \end{aligned}$$

Notons que la formule des probabilités totales appliquées dans le cas présent porte alors le nom de “loi marginale de X_t ”.

Puis, comme X_t ne peut prendre que les valeurs $+A$ et $-A$, on obtient bien $\mathbb{P}(X_t = +A) = 1 - \mathbb{P}(X_t = -A)$.

On peut donc en déduire la moyenne de X_t :

$$\begin{aligned}\mu_{1,X}(t) &= \mathbb{E}[X_t] \\ &= A \times \mathbb{P}(X_t = +A) - A \times \mathbb{P}(X_t = -A) \\ &= A (\mathbb{P}(X_t = +A) - (1 - \mathbb{P}(X_t = +A))) \\ &= A (2\mathbb{P}(X_t = +A) - 1) \\ &= A(p - q)e^{-2\alpha t}.\end{aligned}$$

Autre façon de calculer $\mu_{1,X}(t)$: On peut aussi calculer l'espérance de X_t comme suit. Vu que X_0 et N_t sont des variables aléatoires indépendantes, il vient que X_0 est indépendante de $(-1)^{N_t}$ d'où

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] \mathbb{E}[(-1)^{N_t}].$$

Étant entendu que $\mathbb{P}_{X_0} = p\delta_A + q\delta_{-A}$, on obtient immédiatement $\mathbb{E}[X_0] = A(p - q)$ par la définition de l'espérance.

Puis, on peut calculer le second facteur avec la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N_t}] &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha t)^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha t} \times e^{-\alpha t} \\ &= e^{-2\alpha t}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve à nouveau $\mathbb{E}[X_t] = A(p - q)e^{-2\alpha t}$.

Correction du 2

Deux méthodes peuvent être mises en œuvre pour obtenir à ce résultat. Elles sont sensiblement similaires mais nous allons les donner toutes les deux. Rappelons que l'on choisit ici $t_1 < t_2$ et $t_1 > 0$.

Première méthode : La première méthode consiste à lier X_{t_1} à X_{t_2} directement. En effet, d'après la définition du processus X , on a

$$X_{t_2} = \begin{cases} X_{t_1} & \text{si le nombre de basculements entre } t_1 \text{ et } t_2 \text{ est pair} \\ -X_{t_1} & \text{si le nombre de basculements entre } t_1 \text{ et } t_2 \text{ est impair} \end{cases}.$$

On peut ainsi écrire $X_{t_2} = X_{t_1}(-1)^{N_{[t_1;t_2]}}$ où $N_{[t_1;t_2]}$ est le nombre de basculements entre t_1 et t_2 . D'après l'énoncé, comme l'intervalle $[t_1; t_2]$ est de longueur $t_2 - t_1$, on en déduit que $N_{[t_1;t_2]}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(t_2 - t_1)$ si bien que l'on aboutit à

$$\begin{aligned}
r_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} [X_{t_1} X_{t_2}] \\
&= \mathbb{E} [X_{t_1} \times X_{t_1} (-1)^{N_{[t_1; t_2]}}] \\
&= \mathbb{E} [X_{t_1}^2 (-1)^{N_{[t_1; t_2]}}] \\
&= A^2 \mathbb{E} [(-1)^{N_{[t_1; t_2]}}] \\
&= A^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times e^{-\alpha(t_2-t_1)} \frac{(\alpha(t_2-t_1))^n}{n!} \\
&= A^2 e^{-\alpha(t_2-t_1)} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha(t_2-t_1))^n}{n!}}_{=e^{-\alpha(t_2-t_1)}} \\
&= A^2 e^{-2\alpha(t_2-t_1)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $r_{XX}(t_1, t_2) = A^2 e^{-2\alpha(t_2-t_1)}$.

Deuxième méthode : Si l'on ne pense pas à utiliser directement le nombre de basculements entre t_1 et t_2 , on peut toutefois s'en sortir en se ramenant à la formule $X_t = X_0(-1)^{N_t}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
r_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} [X_{t_1} X_{t_2}] \\
&= \mathbb{E} [X_0(-1)^{N_{t_1}} \times X_0(-1)^{N_{t_2}}] \\
&= \mathbb{E} [X_0^2 (-1)^{N_{t_1}+N_{t_2}}] \\
&= A^2 \mathbb{E} [(-1)^{N_{t_2}+N_{t_1}}].
\end{aligned}$$

Puis, comme $2N_{t_1}$ est un nombre pair, il vient

$$r_{XX}(t_1, t_2) = A^2 \mathbb{E} [(-1)^{N_{t_2}-N_{t_1}} \times (-1)^{2N_{t_1}}] = A^2 \mathbb{E} [(-1)^{N_{t_2}-N_{t_1}}].$$

Par définition de N_{t_1} et de N_{t_2} , $N_{t_2} - N_{t_1}$ est le nombre de basculements entre t_1 et t_2 donc $N_{t_2} - N_{t_1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(t_2 - t_1)$ si bien que l'on aboutit à nouveau au résultat.

Remarque 1 : Pour être totalement rigoureux, il faudrait étudier le cas où un basculement se produit exactement au temps t_1 ou exactement au temps t_2 . Néanmoins, on peut facilement démontrer que ces évènements sont de probabilité nulle.

Remarque 2 : Le cas où $t_2 < t_1$ se traite en remarquant $r_{XX}(t_1, t_2) = r_{XX}(t_2, t_1)$ avec $t_2 < t_1$ (car le signal est réel). D'où $r_{XX}(t_1, t_2) = A^2 e^{-2\alpha(t_1-t_2)}$. De manière générale, on a $r_{XX}(t_1, t_2) = A^2 e^{-2\alpha|t_2-t_1|}$ pour tous les réels positifs t_1 et t_2 .

Correction du 3

La plus grande difficulté dans cette question est liée à la modélisation elle-même, la mise en équation. On se donne ainsi le processus $X^{(t_0)}$ paramétré par le temps initial t_0 . On a donc $X^{(t_0)} = \{X_t^{(t_0)}, t \geq t_0\}$. Il est essentiel de comprendre que le temps est représenté par t et que t_0 est un

temps **initial**. En lisant bien l'énoncé, l'on comprend que le processus $X^{(t_0)}$ est similaire au processus X du début de l'énoncé. La seule différence est un décalage temporel pour que le signal commence en t_0 . On a donc par définition :

$$X_t^{(t_0)} := X_{t-t_0}.$$

Puis, on fait tendre t_0 vers $-\infty$. On obtient un nouveau processus $X^{(-\infty)}$.

On va maintenant prouver que ce processus $X^{(-\infty)}$ est SSL (Stationnaire au Sens Large). Pour ce faire, nous allons étudier le processus $X^{(t_0)}$ puis faire tendre toutes les quantités auxquelles on s'intéresse pour t_0 allant vers $-\infty$. Bien que l'énoncé nous indique que chacune des variables aléatoires $X_t^{(-\infty)}$ a la même loi, nous allons le démontrer pour vous en convaincre.

D'après la première question, on a $\mathbb{P}(X_t^{(t_0)} = A) = \mathbb{P}(X_{t-t_0} = A) = \frac{1}{2} + \frac{p-q}{2}e^{-2\alpha(t-t_0)}$. Ceci converge vers $\frac{1}{2}$ quand t_0 tend vers $-\infty$. Il s'ensuit : $\mathbb{P}(X_t^{(-\infty)} = A) = \mathbb{P}(X_t^{(-\infty)} = -A) = \frac{1}{2}$ et l'on a bien $\mathbb{E}(X_t^{(-\infty)}) = 0$. On note par ailleurs que l'espérance de $X_t^{(-\infty)}$ ne dépend pas du temps t considéré.

Comme le processus prend les valeurs A ou $-A$, son carré est, par essence égal à A^2 d'où son moment d'ordre deux est fini et ne dépend pas du temps t considéré.

On va maintenant s'intéresser à la fonction d'autocorrélation. Pour ce faire, on utilise la définition de $X_t^{(t_0)}$ et la seconde remarque donnée en réponse à la question précédente.

$$\begin{aligned} r_{X^{(t_0)}X^{(t_0)}}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X_{t_1}^{(t_0)}X_{t_2}^{(t_0)}] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_1-t_0}X_{t_2-t_0}] \\ &= r_{XX}(t_1-t_0, t_2-t_0) \\ &= A^2e^{-2\alpha|(t_2-t_0)-(t_1-t_0)|} \\ &= A^2e^{-2\alpha|\tau|}, \end{aligned}$$

avec $\tau := t_2 - t_1$. Cette quantité converge vers $A^2e^{-2\alpha|\tau|}$ quand t_0 tend vers $-\infty$. De fait, on en déduit

$$r_{X^{(-\infty)}X^{(-\infty)}}(t_1, t_2) = r_{X^{(-\infty)}X^{(-\infty)}}^s(\tau) := A^2e^{-2\alpha|\tau|}.$$

Conséquemment, le processus $X^{(-\infty)}$ est bien stationnaire au sens large ce qui signifie que le processus X "devient" SSL quand le temps initial tend vers $-\infty$.

Remarque : Désormais, le processus $X^{(-\infty)}$ sera noté X pour simplifier les notations. Il convient de garder à l'esprit que ce processus **n'est pas** le même que celui du début de l'énoncé.

Correction du 4

Le calcul de la variance est immédiat. En effet, le moment d'ordre deux est égal à A^2 et le moment d'ordre un est nul donc :

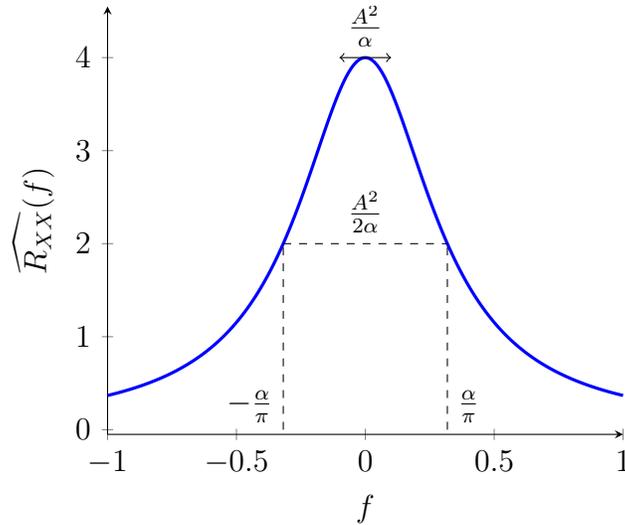
$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 = A^2 - 0^2 = A^2.$$

Comme $r_{XX}^s(\tau) = A^2e^{-2\alpha|\tau|}$, on peut obtenir la densité spectrale de puissance :

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{XX}^s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}^s(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha|\tau|} e^{-2j\pi f\tau} d\tau \\
&= A^2 \left[\int_{-\infty}^0 e^{2\alpha\tau} e^{-2j\pi f\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\tau} e^{-2j\pi f\tau} d\tau \right] \\
&= A^2 \left[\frac{1}{2\alpha - 2j\pi f} - \frac{1}{-2\alpha - 2j\pi f} \right] \\
&= A^2 \left[\frac{1}{2\alpha + 2j\pi f} + \frac{1}{2\alpha - 2j\pi f} \right] \\
&= \frac{A^2\alpha}{\alpha^2 + \pi^2 f^2}.
\end{aligned}$$

On note $\widehat{R}_{XX}^s(f) = \widehat{R}_{XX}^s(-f)$ ce qui est normal vu que r_{XX}^s est réelle et paire. Voici la représentation graphique de la densité spectrale de puissance (avec $A = 2$ et $\alpha = 1$) :

FIGURE 2 – Densité spectrale de puissance de X



On observe que la densité spectrale de puissance est absolument continue et qu'elle admet un maximum global en 0.

Exercice 3 : Calcul de différentes grandeurs statistiques et de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) à l'aide de Matlab

Énoncé

L'objectif de cet exercice est de faire un pont entre les probabilités et les statistiques en utilisant des réalisations de durées finies de signaux alatoires stationnaires au sens large. Les éléments abordés dans ce TD seront complétés l'année prochaine par le module "Estimation pour le signal".

Le programme Matlab **sig_alea.m** permet d'obtenir, sur un intervalle de temps fini, des réalisations d'un signal alatoire $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, contenant des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), à partir de réalisations d'un signal alatoire $X = \{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, suivant la transformation $Y_k = \alpha X_k + \beta$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\beta \in \mathbb{R}$, chaque X_k possédant soit une loi uniforme continue à valeurs dans $[0; 1]$, soit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1. (*Remarque* : dans le programme α est noté A et β , B).

1 Les figures suivantes peuvent être obtenues à l'aide de la fonction Matlab **sig_alea.m** en générant, par exemple, $R = 10$ réalisations de taille $N = 512$ (durée $512 \times T_e$, T_e durée entre chaque échantillon), d'un signal indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) de loi uniforme que l'on appellera Bruit Uniforme (BU) : chaque variable alatoire est à valeurs dans $[0; 1]$ ($\beta = 0$, $\alpha = 1$, $Y_k = X_k$). La fonction **sig_alea.m** affiche toujours les quatre premières réalisations uniquement.

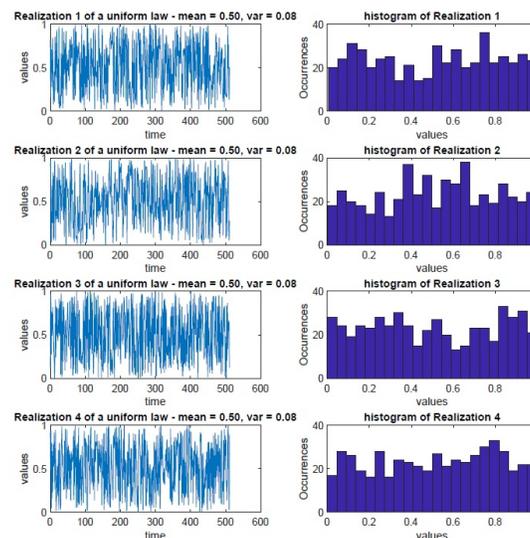


FIGURE 3 – 4 réalisations de 512 échantillons d'un BU avec les histogrammes d'occurrences associés

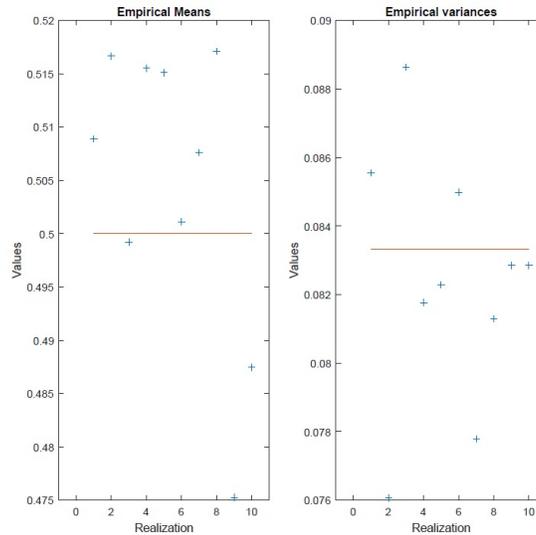


FIGURE 4 – Moyennes (à gauche) et variances (à droite) estimées pour chaque réalisation du BU

Faire le calcul théorique de la moyenne et de la variance d'une loi uniforme sur $[a; b]$ et donner leurs valeurs pour $[0; 1]$. Expliquer ce qu'affichent les figures 3 et 4. En particulier : expliquer ce que représente l'histogramme, la moyenne des échantillons (ou temporelle) et la variance des échantillons (ou temporelle).

Est-ce que les signaux aléatoires sont des signaux stationnaires et ergodiques (on s'intéressera à l'ergodicité à l'ordre 1) ? Est-ce que les signaux aléatoires sont des bruits blancs ? Est-ce que ce que vous observez sur les figures vous paraît cohérent avec la théorie ? Comment modifier l'histogramme pour que celui-ci corresponde à une approximation constante par morceaux de la densité de probabilité ?

2 Les figures suivantes peuvent être obtenues à l'aide de la fonction Matlab `sig_alea.m` en générant, par exemple, $R = 10$ réalisations de taille $N = 512$, d'un Bruit Blanc Gaussien (BBG) de variance 1 ($\beta = 0, \alpha = 1$). Est-ce que ces figures (les figures 5 et 6) vous paraissent cohérentes ?

Dans le cas d'un BBG de variance 1, $X = \{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, quelles sont les moyennes et variances théoriques du signal aléatoire $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec $Y_k = \alpha X_k + \beta$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\beta \in \mathbb{R}$?

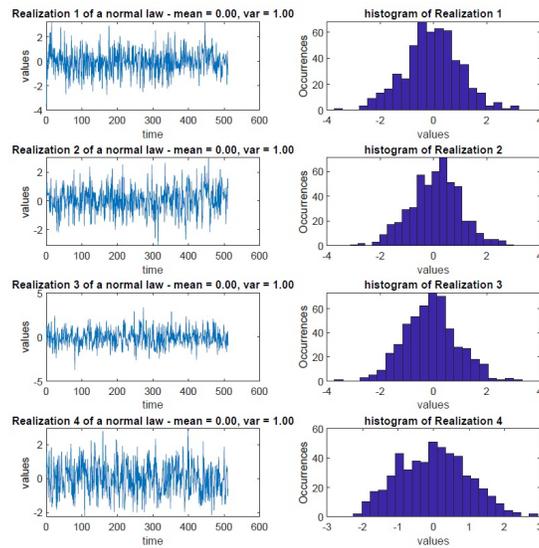


FIGURE 5 – 4 réalisations de 512 échantillons d'un BBG avec les histogrammes d'occurrences associés

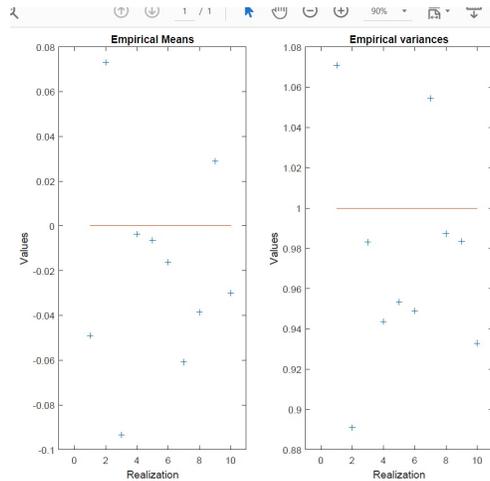


FIGURE 6 – Moyennes (à gauche) et variances (à droite) estimées pour chaque réalisation du BBG

3 Rappeler les définitions de la fonction d'autocorrélation et de la fonction d'autocovariance et ce qu'elles sont censées décrire. Représenter ces fonctions dans le cas des signaux des questions **1** et **2**. Commenter la Figure 7 qui donne l'allure de la fonction d'autocovariance estimée à partir des réalisations de la question **2**.

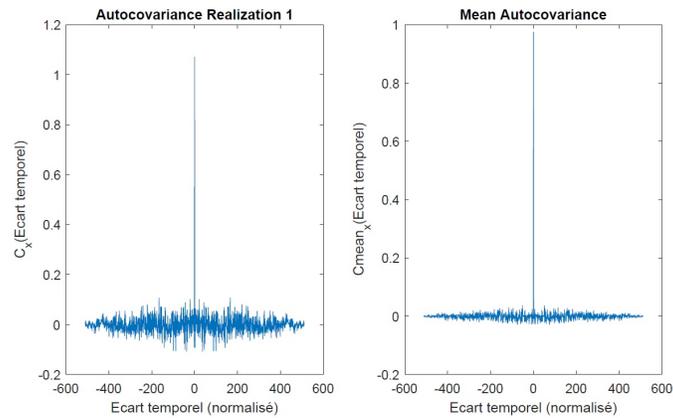


FIGURE 7 – Autocovariance d’une réalisation de 512 échantillons d’un BBG (à gauche) et Autocovariance moyenne obtenue à partir de 10 réalisations de 512 échantillons d’un BBG (à droite)

4 Rappeler la définition de la densité spectrale de puissance (DSP). Quelle est la forme de la DSP théorique d’un BBG ? La figure 8 présente l’estimation de la DSP à partir des échantillons par la méthode du périodogramme (périodogramme de la première réalisation et périodogramme moyen) : le périodogramme est proportionnel au module au carré de la Transformée de Fourier Discrète (TFD). Qu’est-ce qu’une fréquence normalisée ? Commenter les courbes de la figure 8. Peut-on retrouver la valeur de la variance à partir de l’estimation de la DSP ?

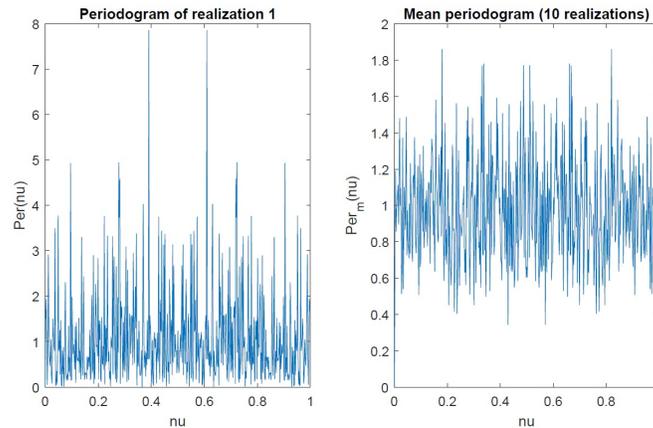


FIGURE 8 – Périodogramme (estimation de la Densité Spectrale de Puissance) d’une réalisation de 512 échantillons d’un BBG (à gauche) et Périodogramme moyen obtenu à partir de 10 réalisations de 512 échantillons d’un BBG (à droite)

5 Les figures 9 et 10 donnent les allures d’une réalisation de durée finie d’un BBG, de son périodogramme, du signal en sortie d’un filtre RII LIT causal coupe-bande (bande coupée : $[0.1, 0.3]$ en fréquence normalisée) d’ordre 10 ainsi que son périodogramme. Quel est le sens des acronymes RII et LIT ? Qu’est-ce qu’un système causal ? Donner l’équation temporelle caractéristique associée au filtre et tracer, pour $\nu \in [0; 1]$, le module de la fonction de transfert d’un filtre coupe-bande idéal possédant une bande coupée $[0.1, 0.3]$. Est-ce que ce que vous observez figure 10 vous paraît cohérent ?

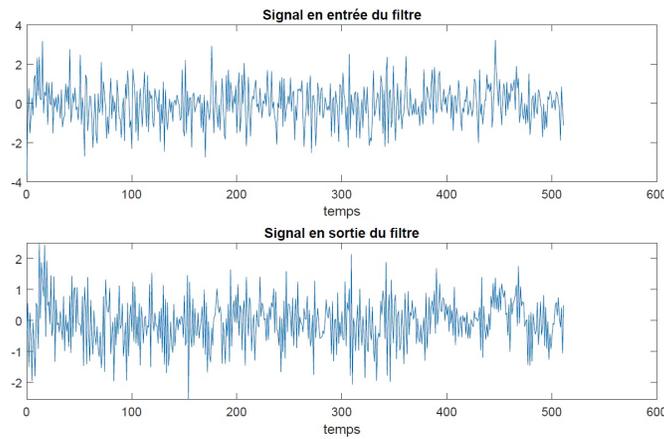


FIGURE 9 – Réalisation d’un BBG (en haut) mis à l’entrée d’un filtre coupe-bande et signal en sortie du filtre (en bas)

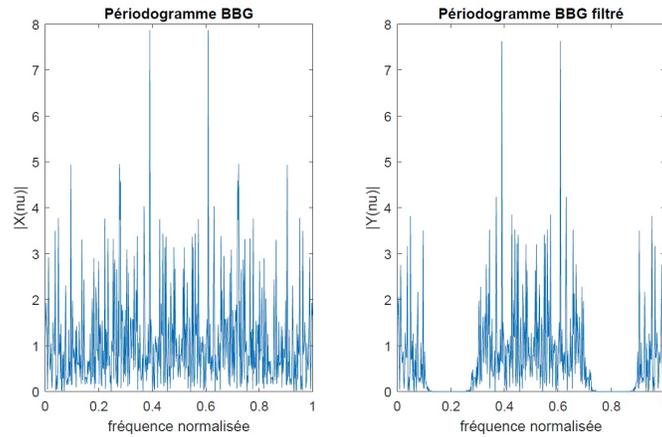


FIGURE 10 – Périodogramme de la réalisation du BBG mis à l’entrée du filtre coupe-bande (à gauche) et périodogramme du signal en sortie du filtre (à droite)

6 Pour revenir sur la notion de coefficient de corrélation, la figure 11 représente les nuages des points $(x[k], x[k + 2])$, $k = 0, \dots, N - 2$, des valeurs de la première réalisation de $N = 512$ échantillons du BBG avant et après filtrage (figure 9). Le calcul du coefficient de corrélation linéaire a donné $3,8e^{-4}$ pour les valeurs avant filtrage et $0,762$ pour les valeurs après filtrage. Interpréter les figures en exploitant les valeurs obtenues.

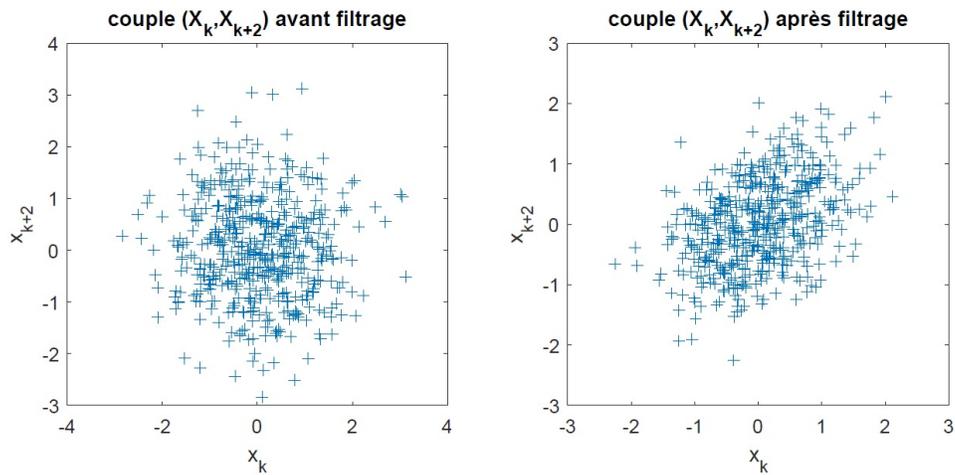


FIGURE 11 – Nuages de points obtenus avant filtrage (à gauche) et après filtrage (à droite)

Précédemment, nous connaissions les propriétés des signaux observés. Maintenant, supposons qu'il n'y ait, par exemple, qu'une seule réalisation de 512 échantillons à notre disposition. Il est possible de générer les figures (fonctions d'autocovariance, périodogramme,...) fournies dans ce sujet et de formuler des hypothèses (distribution gaussienne ou autre, signal stationnaire au sens large, bruit blanc,...). Sachant qu'une inspection visuelle ne suffit pas, la question fondamentale qui apparaît alors est la suivante :

Comment valider scientifiquement ces hypothèses ? Réponse : par des tests statistiques.

7 Les différents tests d'hypothèse (voir **Compléments** page suivante) appliqués à la réalisation du BBG de la figure 9 ont renvoyé le booléen "1" aux différents tests (en utilisant 'Gauss' pour la fonction `Test_KM.m`). Par contre, les tests ont renvoyé que le signal en sortie du filtre (voir figure 9) n'était pas un bruit blanc. Est-ce que cela vous paraît cohérent ?

Remarque : Quand on calcule à partir de N couples de valeurs, associées à un couple de variables aléatoires, une estimation du coefficient de corrélation, la valeur obtenue ne sera jamais parfaitement nulle même si les deux variables aléatoires sont indépendantes ou au moins décorrélées. A partir de la réalisation du BBG avant filtrage, le calcul des différents coefficients de corrélation suivant les décalages possibles dans le signal peuvent présenter des valeurs pouvant dépasser 0.15. De ce fait, il faut utiliser un test statistique pour savoir si l'hypothèse de décorrélation peut être rejetée ou non. Différents tests existent et sont présentés dans la page https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson_correlation_coefficient. Dans le cas présent, il est possible d'utiliser les tests¹ indiquant que les échantillons doivent être issus de lois de Gauss comme le test utilisant la *t-distribution* de Student qui exploite la table de cette loi (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Student's_t-distribution). Dans le code Matlab fourni sur Mootse, ce test est utilisé pour déterminer les décalages pour lesquels l'hypothèse de décorrélation peut être rejetée. Ces éléments d'estimation et de tests statistiques seront complétés l'année prochaine.

Compléments : Fonctions `Test_stat.m`, `Test_bb_cov.m` et `Test_KM.m`.

1. Avant d'utiliser un test statistique, toujours bien vérifier les conditions d'application du test c'est-à-dire les propriétés que doivent avoir les échantillons comme par exemple, s'ils doivent être issus d'une loi de Gauss, s'ils doivent être décorrélés,...

La fonction **Test_stat.m** permet d'effectuer un test de stationnarité² relativement "basique" à partir des valeurs de moyenne et d'écart-type estimées sur plusieurs fenêtres successives d'un signal supposé stationnaire. Dans le cas d'un signal stationnaire au second ordre, les valeurs successives de ces statistiques peuvent être considérées comme constituant une suite indépendante et identiquement distribuée (i.i.d.). Le test permet alors de vérifier que les suites des valeurs de moyenne et d'écart-type seraient susceptibles d'être des réalisations de taille finie de suites i.i.d. La fonction **Test_stat.m** s'utilise de la manière suivante :

$$[\text{stat_ordre1}, \text{stat_std}, N] = \text{Test_stat}(\text{signal}, \text{Nbr_fen})$$

avec `stat_ordre1` et `stat_std`, deux booléens indiquant la stationnarité pour la moyenne et l'écart-type, et `N` le nombre de points par fenêtre.

La fonction **Test_bb_cov.m** permet de savoir, pour un signal stationnaire au second ordre, s'il est blanc ou non. Il s'agit là encore d'un test assez "basique". Il consiste à faire un seuillage de la fonction d'autocovariance normalisée calculée sur N échantillons. Les éléments de la fonction d'autocovariance (en dehors de l'indice 0) sont supposés alors suivre une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\frac{1}{N}$. Il est alors possible de déterminer un seuil. Si trop de valeurs se trouvent au-dessus du seuil, cela veut dire que le processus n'est pas blanc. La fonction **Test_bb_cov.m** s'utilise de la manière suivante :

$$[\text{bb}, \text{Nbr_dep}] = \text{Test_bb_cov}(\text{cov})$$

avec `bb` un booléen indiquant si le signal est blanc, `Nbr_dep` le nombre de valeurs de la fonction d'autocovariance dépassant le seuil et `cov`, les valeurs estimées de la fonction de covariance.

Pour tester que les réalisations (supposées indépendantes et identiquement distribuées) d'un signal aléatoire suivent une loi de probabilité donnée, il est possible d'utiliser le test de Kolmogorov-Smirnov. Pour appliquer le test de Kolmogorov-Smirnov (exploitable ici que si la loi envisagée est absolument continue), vous disposez de la fonction **Test_KM.m** d'usage :

$$\text{Is_Loi} = \text{Test_KM}(\text{sig}, \text{type_loi})$$

avec `type_loi` = 'Gauss' ou 'Laplace' et `Is_Loi` un booléen qui valide ou non l'hypothèse selon laquelle *les éléments du vecteur "sig" suivent une loi du type demandé*, suivant un risque égal à 0.05 de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie.

2. Il existe plusieurs tests statistiques de stationnarité. On pourra se référer au livre de P. J. Brockwell et R. A. Davis : Introduction to Time Series and Forecasting, Springer Texts in Statistics, 2nd edition, 2002, Springer-Verlag, New York.

Correction

Correction du 1

Moyenne et variance On commence par calculer l'espérance et la variance de $Y_k = X_k$. On se souvient du cours de "Probabilités et Statistiques" selon lequel si X suit une loi uniforme sur $[a; b]$, alors $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ et $\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$. Néanmoins, il est ici demandé de **calculer**. On doit donc le redémontrer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(x) dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 3b^2 - 6ab}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

Dans le cas présent, on obtient $\mathbb{E}[Y_k] = \frac{1}{2}$ et $\text{Var}[Y_k] = \frac{1}{12} \approx 0.0833$.

Histogramme Le nombre d'intervalles M est de l'ordre de $\lfloor 2(\sqrt{N} - 1) \rfloor$. Il s'agit d'une borne supérieure que l'on trouve dans la littérature.

Comme $N = 512$, $M = 22$ convient.

La largeur est $L = \frac{1-0}{22}$. On note I_1, \dots, I_M les intervalles.

La hauteur correspond au nombre d'occurrences de l'intervalle. Ainsi, on peut écrire

$$n_i = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{I_i}(x[k]).$$

On remarque $\sum_{i=1}^M n_i = N$. Par conséquent, l'histogramme n'est pas une approximation de la densité de probabilité. En effet, son aire totale est $\sum_{i=1}^M (n_i \times L) = L \times N = \frac{1}{22} \times 512 \neq 1$. Il faut donc normaliser l'histogramme en divisant la hauteur par NL d'où l'on met $\frac{n_i}{NL}$ en hauteur.

Il s'ensuit que l'estimateur de la densité de probabilité de X_k est

$$\widehat{f_{X_k}}(x) = \sum_{i=1}^M \frac{n_i}{NL} \mathbf{1}_{I_i}(x).$$

Remarque : le chapeau ne correspond pas à une transformée de Fourier. Il s'agit d'un estimateur. Or, en statistiques, l'estimateur d'une quantité θ se note $\hat{\theta}$.

Moyenne et variance des échantillons Ici, on regarde la moyenne empirique et la variance d'échantillon corrigée.

$$\widehat{\mu_X} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k],$$

et (pour une estimation non biaisée)

$$\widehat{\sigma_X^2} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x[k] - \widehat{\mu_X})^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x[k]^2 - N\widehat{\mu_X}^2 \right).$$

Si N est grand, on a $\widehat{\sigma_X^2} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]^2 - \widehat{\mu_X}^2$.

Stationnarité Le signal étant composé de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, il est stationnaire au sens strict (S.S.S.) donc il est stationnaire au sens large (S.S.L.).

Bruit Blanc Rappelons qu'un signal est un B.B. si et seulement si :

- Il est SSL.
- Sa moyenne est nulle.
- Les variables aléatoires sont décorrélées.

Nous avons vu qu'il est SSL. Comme les variables sont indépendantes, elles sont décorrélées. Néanmoins, la moyenne n'est pas nulle puisqu'elle vaut 0.5.

Toutefois, en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = -\frac{1}{2}$, on obtient bien que Y est un Bruit Blanc.

Observations Ce qu'on observe est cohérent avec la théorie. Ce sont des statistiques obtenues avec un nombre fini d'échantillons. Si le signal est stationnaire et ergodique, les statistiques temporelles vont converger vers les moments quand N tend vers l'infini (on a donc un phénomène de loi des grands nombres).

Ici, $N = 512$ donc $\widehat{\mu_X}$ et $\widehat{\sigma_X^2}$ sont des valeurs approchées appelées estimations de $\mathbb{E}[X_k]$ et de $\sigma_{X_k}^2$. De même, $h_i = \frac{n_i}{NL}$ est une estimation de $\frac{1}{1-0} = 1$ pour chaque i . L'histogramme devient plat quand N tend vers l'infini.

Correction du 2

Comme $Y_k = \alpha X_k + \beta$, il vient immédiatement $\mathbb{E}[Y_k] = \beta$ et $\text{Var}[Y_k] = \alpha^2$ d'où $\mathcal{L}(Y_k) = \mathcal{N}(\beta, \alpha^2)$.

Les histogrammes ressemblent à des gaussiennes. Il en est de même pour les moyennes et pour les variances temporelles.

Correction du 3

La fonction d'autocorrélation est

$$r_{XX}^s[\tau] = \mathbb{E}[X_k X_{k+\tau}],$$

si le signal est SSL réel. La fonction ne dépend pas de l'origine du temps. On a de même la fonction d'autocovariance :

$$c_{XX}^s[\tau] = r_{XX}^s[\tau] - \mathbb{E}[X_k]^2.$$

Cette dernière décrit la covariance entre les différentes variables aléatoires composant le signal.

Signal de la première question Comme les variables aléatoire sont indépendantes, si $\tau \neq 0$, on a $r_{XX}^s[\tau] = \mathbb{E}[X_k] \mathbb{E}[X_{k+\tau}] = \frac{1}{4}$.

Et, $r_{XX}^s[0] = \mathbb{E}[X_k^2] = \text{Var}[X_k] + \mathbb{E}[X_k]^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

Pour ce qui est de la fonction d'autocovariance : $c_{XX}^s[\tau] = 0$ si $\tau \neq 0$ et $c_{XX}^s[0] = \frac{1}{12}$.

Ceci nous donne les figures suivantes :

FIGURE 12 – Fonction d'autocorrélation

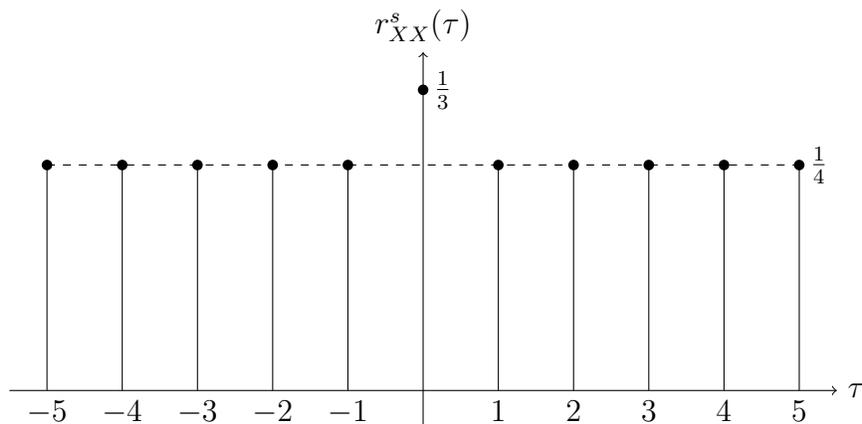
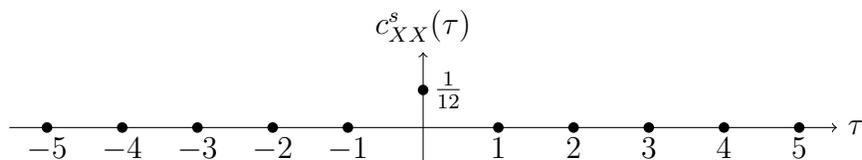


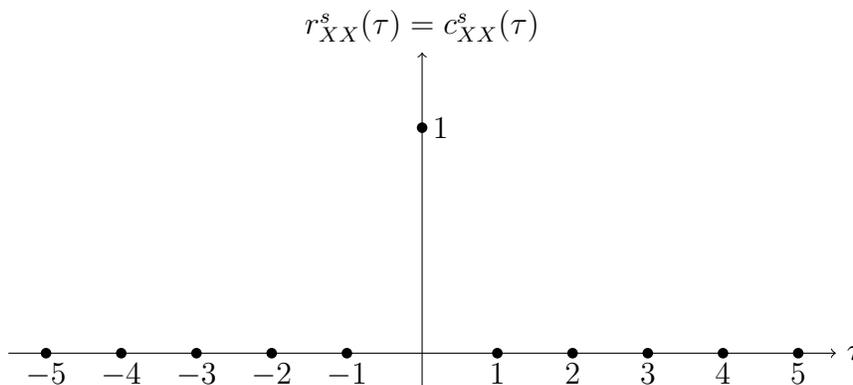
FIGURE 13 – Fonction d'autocovariance



Signal de la deuxième question Ici, la moyenne des X_k est nulle. Donc $r_{XX}^s[\tau] = c_{XX}^s[\tau] = \delta[\tau]$ car $\text{Var}[X_k] = 1$.

Ceci nous donne la figure suivante :

FIGURE 14 – Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance



Commentaire de la figure 7 Ici, l'estimateur de c_{XX}^s est $\tau \mapsto \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]x[k + \tau]$.

Si $\tau \neq 0$, les valeurs oscillent autour de 0. Si $\tau = 0$, la valeur est proche de $\text{Var}[X_k] = 1$. Faire une moyenne sur les différentes réalisations permet de lisser.

Correction du 4

Dans le cas discret (en prenant la TFTD plutôt que la TFD), la DSP est

$$\widehat{R_{XX}^s}[\nu] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} r_{XX}^s[\tau] e^{-2j\pi\nu\tau},$$

où $\nu = \frac{f}{f_e}$. Inversement :

$$r_{XX}^s[\tau] = \int_{\nu=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{R_{XX}^s}[\nu] e^{2j\pi\nu\tau} d\nu.$$

Le périodogramme est $\text{Per}(\nu_\ell) = \frac{|X_d[\nu_\ell]|^2}{N}$ où $\nu_\ell = \frac{\ell}{N}$ avec $\ell \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$.

Ici, $(x[k])_{k \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket}$ donne la transformée de Fourier Discrète $X_d[\nu_\ell] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-2j\pi\nu_\ell k}$.

On pose $x^-[n] := x[-n]$. Alors $\widehat{X}^-(\nu) = \widehat{X}(-\nu) = \widehat{X}(\nu)^*$ vu que le signal x est réel.

On remarque :

$$\begin{aligned} x * x^-[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] x[k-n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+n] x[k] \\ &= r_{XX}^s[n]. \end{aligned}$$

Comme la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit, la transformée de Fourier de r_{XX}^s en ν_ℓ est proportionnelle à $X_d[\nu_\ell]X_d[\nu_\ell]^* = |X_d[\nu_\ell]|^2$.

La densité spectrale de puissance théorique du Bruit Blanc Gaussien est $\widehat{R_{XX}^s}[\nu] = \text{Var}[X] = 1$. En effet, $r_{XX}^s[\tau] = \text{Var}[X]\delta[\tau]$.

Les valeurs oscillent donc autour de 1 (on voit mieux sur le périodogramme moyenné).

On peut ainsi retrouver la variance avec l'estimation $\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \widehat{R_{XX}^s}[\nu_\ell]$.

Correction du 5

R.I.I. signifie “Réponse Impulsionnelle à support temporel Infini”.

L.I.T. signifie “Linéaire et Invariant dans le Temps”.

Un système est causal quand sa réponse impulsionnelle est causale. ; c’est-à-dire quand les valeurs en sortie de système ne dépendent que des valeurs passées de l’entrée dudit système.

L’équation temporelle caractéristique est

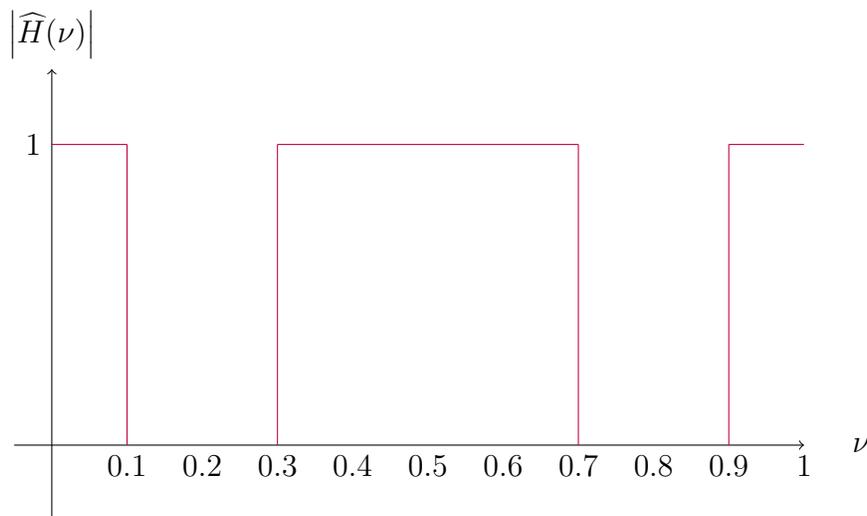
$$y[k] = - \sum_{i=1}^{10} a_i y[k-i] + \sum_{l=0}^{10} b_l x[k-l].$$

La transformée en z associée au système est donc $H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{10} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{i=1}^{10} a_i z^{-i}}$.

On prend $z := e^{2j\pi\nu}$ et l’on obtient la fonction de transfert du filtre : $\hat{H}(\nu) = \frac{\sum_{l=0}^{10} b_l e^{-2j\pi\nu l}}{1 + \sum_{i=1}^{10} a_i e^{-2j\pi\nu i}}$.

On note que $|\hat{H}(\nu)|$ est 1-périodique. Et, comme le signal est réel, le module de sa transformée de Fourier est pair. Par conséquent, on obtient la figure suivante :

FIGURE 15 – Module de la fonction de transfert du filtre coupe-bande idéal



On note sur la figure 10 que le signal en sortie ne possède presque plus d’énergie dans la bande coupée $[0.1, 0.3]$. C’est donc cohérent.

Remarque sur le 5

Pour minimiser la probabilité d'erreur dans un tel tracé, il convient d'abord d'effectuer la représentation sur $[0, \frac{1}{2}]$ (en fréquence normalisée) puis d'utiliser la parité pour représenter sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et enfin d'utiliser la périodicité pour avoir le tracé exact sur $[0, 1]$. En effet, il est vite arrivé d'oublier de couper la bande $[0.7, 0.9]$.

Correction du 6

Avant filtrage, X_k et X_{k+2} sont indépendantes donc elles sont décorréées. Ainsi, le nuage de points n'a pas d'orientation.

Après filtrage, des corrélations apparaissent. On a $\widehat{\rho_{YY}}[2] = \frac{\widehat{C_{YY}}[2]}{\widehat{C_{YY}}[0]} \approx 0.762$.

Ainsi, Y_k et Y_{k+2} sont corrélées. Conséquemment, le nuage de points a une orientation principale.

Correction du 7

Un Bruit Blanc contient de l'énergie sur toutes les fréquences. Or, une bande de fréquences a été supprimée. Par conséquent, il ne s'agit pas d'un Bruit Blanc. De plus, il faut avoir décorrélation. Les tests sont donc cohérents.