Énoncés des Travaux dirigés de Probabilités

Julian Tugaut[1]

1. Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Chapitre 1

Bases des probabilités (environ trois séances)

Exercice 1

Une population est décrite suivant le genre, l'état matrimonial et la profession. On distingue quatre catégories d'états matrimoniaux et cent catégories de professions.

1. Combien y a-t-il de catégories combinées ?

2. Généralisation : une population est décrite suivant p caractères qualitatifs. Le $i-$ème caractère a n_i modalités distinctes pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. Combien y a-t-il de catégories combinées ?

Exercice 2

1. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en deux groupes, de trois et sept individus respectivement ?

2. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en trois groupes, de deux, trois et cinq individus respectivement ?

3. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en quatre groupes, de un, deux, trois et quatre individus respectivement ?

4. De combien de façons peut-on diviser un groupe de n individus en r groupes, de $n_1, \cdots, n_r$ individus respectivement ? (avec $n_1 + \cdots + n_r = n$)

Exercice 3

1. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de cinq cartes comprenant quatre cartes de même valeur ?

2. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement un as ?

3. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement deux as ?

4. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement trois as ?

5. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement quatre as ?

6. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant au moins un as ? (calculer de deux manières différentes et écrire l'égalité qui en résulte)

Exercice 4

Soient trois évènements A, B et C associés à une même expérience aléatoire. Exprimer sous écriture ensembliste les évènements suivants et calculer leur probabilité.

1. Seuls A et B sont réalisés.

2. Deux évènements au plus sont réalisés.

3. Au moins un évènement est réalisé.

4. Aucun des trois évènements n'est réalisé.

5. Deux évènements exactement sont réalisés.

6. Seul A est réalisé.

7. Deux évènements au moins sont réalisés.

8. Un évènement exactement est réalisé.

Exercice 5

Soient A et B deux évènements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}\,,\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}\,.$$

Calculer

$$\mathbb{P}(A \cup B)\,,\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right).$$

Exercice 6

Dans une réception, chacun des invités a donné son chapeau au vestiaire. Après que la réception est finie, les chapeaux sont distribués aux invités au hasard.

1. (Cas particulier) *Dans le cas où il y a exactement trois invités, calculer la probabilité p_3 qu'au moins un des trois invités reçoive le chapeau qu'il avait laissé au vestiaire.*

2. (Cas général) *Dans le cas où il y a n invités (avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque), calculer la probabilité p_n qu'au moins un des n invités reçoive le chapeau qu'il avait laissé au vestiaire.*

3. (Cas limite) *Montrer que cette probabilité p_n atteint une limite lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice 7

On considère une urne contenant $b > 0$ billes bleues et $n > 0$ billes noires. On tire au hasard une bille de cette urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne. Si elle est noire, on ne la remet pas mais on rajoute a billes bleues prises dans une réserve auxiliaire.

Dans les deux cas, on tire une seconde bille de l'urne.

Quelle est la probabilité pour que cette seconde bille soit bleue ?

Exercice 8

Un test de dépistage d'une maladie est mis au point par un laboratoire pharmaceutique. Ce laboratoire cherche à déterminer l'efficacité du test.
La probabilité que le test soit positif pour une personne malade est évaluée à p_+.
La probabilité que le test soit négatif pour une personne bien portante (non malade) est évaluée à p_-.
La probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit malade est égale à p_M.

1. *Calculer la probabilité qu'un patient soit malade en sachant que son test est négatif avec $p_M := 0.01$, $p_+ := 0.98$ et $p_- := 0.98$.*

2. *Calculer la probabilité qu'un patient soit sain en sachant que son test est positif avec $p_M := 0.01$, $p_+ := 0.98$ et $p_- := 0.98$.*

3. *Cette dernière probabilité étant trop élevée, on décide d'effectuer deux tests indépendants au lieu d'un seul. Calculer la probabilité qu'une personne soit bien portante sachant que les deux tests sont positifs.*

Exercice 9

Un évènement aléatoire T se produit avec probabilité $\frac{4}{5}$. Deux individus louches (Negan et Ramsay) sont témoins de cet évènement. Negan dit la vérité avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ramsay dit la vérité avec probabilité $\frac{1}{5}$. Calculer la probabilité p que T se soit produit sachant que Negan et Ramsay disent tous deux que T s'est produit.

Exercice 10

Trois prisonniers, Pim, Pam et Poum, dont les situations sont comparables, ont demandé une grâce au roi. Ils apprennent que deux d'entre eux, sans savoir lesquels, ont vu leur demande rejetée et seront condamnés à mort. Pim, voulant connaître sans délai le sort qu'on lui réserve, va voir un fonctionnaire qui est au courant de la décision concernant chacun des prisonniers. Malheureusement, le fonctionnaire n'est pas autorisé à informer les prisonniers de la décision les concernant. Pim, qui désire avoir malgré tout plus d'information et qui promet de garder le silence sur le sort réservé aux autres, demande au fonctionnaire de lui révéler simplement le nom d'un prisonnier parmi les deux autres dont la demande a été rejetée. Dans ces circonstances, le fonctionnaire se sent autorisé à lui révéler que la demande de Pam a été rejetée.

Est-ce que Pim devrait avoir plus d'espoir concernant l'acceptation de sa demande après cette révélation ?

Exercice 11 (*)

De combien de façons une assemblée de soixante personnes peut-elle élire un bureau comprenant un président, un vice-président et un secrétaire ?

Exercice 12 (*)

1. Soit une classe de soixante élèves, dont douze internes. De combien de façons peut-on former le comité de cette classe, qui comprend six élèves, le président devant être un interne ?

2. Soit une classe de soixante élèves, dont douze internes et seize filles, toutes externes. De combien de façons peut-on former le comité de cette classe, qui comprend quatre garçons et deux filles, le président devant être un interne ?

Exercice 13 (*)

Une entreprise fabrique des pièces métalliques dont une proportion R est hors des tolérances imposées par l'acheteur.
Lors de la réception d'un lot de pièces, l'acheteur en prélève trente parmi celles qui lui sont livrées. L'acheteur teste ensuite ces trente pièces. Si le nombre de pièces défectueuses parmi les trente est strictement supérieur à un entier k prédéfini, le lot de pièces est refusé.

1. *Quelle est la probabilité de refuser le lot si l'on fixe $R := 5\%$ et $k := 3$?*

2. *Avec $R := 10\%$, à combien doit-on fixer k pour que la probabilité de refuser le lot soit inférieure ou égale à la probabilité qu'a le fabricant de faire une pièce défectueuse ?*

Exercice 14 (*)

Quatre personnes jouent à la belote (32 cartes). Chaque joueur reçoit huit cartes. On considère les évènements suivants :

— A_1 : le joueur reçoit au moins un as.
— A_2 : le joueur reçoit au moins deux as.
— C : le joueur reçoit l'as de coeur.

Les probabilités $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$ *et* $\mathbb{P}(A_2 \mid C)$ *sont-elles égales ?*

Chapitre 2

Variables aléatoires discrètes (environ trois séances)

Exercice 15

Soit l'espace fondamental $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. L'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}$ ainsi définie :

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

On définit les variables aléatoires réelles X et Y comme suit.

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$X(\omega)$	1	3	4	7	2
$Y(\omega)$	3	1	0	-1	4

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire XY.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$.

Exercice 16

Soient deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y définies sur un même espace fondamental. On suppose X et Y indépendantes. Les lois de probabilités des deux variables sont données dans les deux tableaux ci-dessous

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et

y_i	2	4
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$.

Exercice 17

Des individus sont soumis à une épreuve composée de trois questions indépendantes. On propose trois réponses possibles à la première question, quatre à la deuxième et cinq à la troisième. À chaque question, une réponse et une seule est correcte. Chaque individu doit choisir une réponse à chaque question.

Si sa réponse à la première question est correcte, il a trois points. À la deuxième question, s'il a juste, il a trois points. La bonne réponse à la troisième question donne quatre points.

Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation la note obtenue à l'épreuve par un individu qui choisit au hasard les réponses aux questions.

1. Déterminer l'ensemble des réalisations possibles de X.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

On soumet les individus à une deuxième épreuve indépendante de la première avec le même nombre de questions, de réponses par question, de points obtenus en cas de bonne réponse (unique pour chaque question à nouveau).

On décide d'attribuer à un individu la note finale égale au maximum des notes qu'il a obtenues aux deux épreuves. Soit Y cette note finale pour un individu qui répond au hasard aux deux épreuves.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Exercice 18

Soit X une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 avec probabilité 0.75, la valeur 1 avec probabilité 0.2 et la valeur 2 avec probabilité 0.05.
Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 avec probabilité 0.2, la valeur 1 avec probabilité 0.3 et la valeur 2 avec la probabilité 0.5. On suppose que X et Y sont définies sur un même espace fondamental et sont indépendantes.

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X et de Y.

On considère la variable aléatoire $S := X + Y$.

2. Déterminer la loi de probabilité de S et tracer son diagramme.

3. Déterminer la fonction de répartition de S et tracer son graphe.

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de S.

Exercice 19

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F_X(x) := \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)\,.$$

Calculer $\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in [0;2[\right)$ et $\mathbb{P}\left(X \in]3;+\infty[\right)$.

Exercice 20

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_n := \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \text{si } 1 \leq n \leq ab \\ 0 & \text{si } ab < n \end{cases}.$$

1) *Quelle(s) condition(s) doivent satisfaire les entiers a et b pour qu'il existe une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$?*

2) *On suppose que a et b sont tels qu'il existe une telle variable aléatoire X. Calculer $\mathbb{E}[X]$ en fonction de a et b.*

3) *Trouver a et b tels que $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$.*

Exercice 21

Soient $a \in]0;1[$ et $b > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et l'on suppose

$$\mathbb{P}\left(\{X = k\} \cap \{Y = p\}\right) = \frac{b^k \mathrm{e}^{-b} a^p (1-a)^{k-p}}{p!(k-p)!},$$

si $k \geq p$ et 0 sinon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de Y.

3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z := X - Y$.

5) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 22 (*)

On se donne une variable aléatoire X, de moment d'ordre 2 fini. On considère la fonction $f(x) := \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(x - X\right)^2\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\mathbb{E}\left[f(X)\right]$.

Exercice 23 (*)

Pour allumer un feu, Mélissandre a donné à Stannis une boîte contenant n allumettes. Celles-ci sont un peu humides et chacune ne fonctionne qu'avec la probabilité $p \in]0;1[$. Soit X le nombre d'allumettes utilisées par Stannis dans sa tentative.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Quelle est son espérance ?

Exercice 24 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

Exercice 25 (*)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose $\mathbb{E}(X) < \infty$.

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left(X > n\right) = 0$.

2) En déduire que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{E}(X)$.

Exercice 26 (*)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans un ensemble fini $M := [\![1;k]\!]$ et telles que $\mathbb{P}(X_n = i) = p_i$. Soit M^n l'ensemble des suites (messages) de longueur n. Il y en a k^n. On considère l'entropie de la répartition $p := (p_i)_{1\leq i\leq k}$,

$$H(p_1, \cdots, p_k) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log(p_i)\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. On définit l'ensemble des messages ϵ-typiques par

$$\mathcal{T}_n^\epsilon := \left\{(i_1, \cdots, i_n) \in M^n \ :\ \mathrm{e}^{-n(H+\epsilon)} \leq p_{i_1} \cdots p_{i_n} \leq \mathrm{e}^{-n(H-\epsilon)}\right\}\,.$$

1) *Montrer que l'on a* $\mathbb{E}\left(-\log(p_{X_n})\right) = H$.

2) *En déduire*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log(p_{X_i})) - H\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in (\mathcal{T}_n^\epsilon)^c\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left[-\log(p_{X_1})\right]}{n\epsilon^2}\,.$$

3) *Obtenir la limite suivante*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon\right) = 1\,.$$

4) *Montrer que l'on a*

$$\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon\right) \geq \mathrm{e}^{-n(H+\epsilon)} \#\mathcal{T}_n^\epsilon\,,$$

et en déduire que $\#\mathcal{T}_n^\epsilon \leq \mathrm{e}^{n(H+\epsilon)}$.

5) *Réciproque. Supposons que l'on ait pu trouver* $\mathcal{C}_n \subset M^n$ *tel que*

$$\lim_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n\right) = 1$$

et $\#\mathcal{C}_n \leq \mathrm{e}^{Kn}$. *On va montrer que l'on a* $K \geq H$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{T}_n^\epsilon\right) = 1$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{T}_n^\epsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-n(H-\epsilon)}\mathrm{e}^{Kn}$. Conclure.

6) *On prend* $D = 2$, $M = \{0, 1\}$, $p_1 = p$ *et* $p_2 = 1 - p$. *Si* $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, *vérifier que* $H = -\log(2)$ *et que le nombre de suites typiques est, dans un sens à préciser,* 2^n. *(Pas de compression possible.)*

Cas général : étudier la forme de $H(p) = -p\log(p) - (1 - p)\log(1 - p)$ *et en déduire le comportement des suites typiques.*

Chapitre 3

Lois discrètes usuelles (environ une séance)

Exercice 27

X désigne une variable aléatoire réelle.

1. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(20, 0.3)$. Calculer $\mathbb{P}(3 < X < 12)$ et $\mathbb{P}(X \leq 6)$.

2. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(30, 0.3)$. Calculer $\mathbb{P}(4 \leq X < 8)$ et $\mathbb{P}(X < 5)$.

3. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(30, 0.8)$. Calculer $\mathbb{P}(12 < X < 16)$ et $\mathbb{P}(X = 16)$.

Exercice 28

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2, indépendantes. On suppose qu'elles suivent respectivement les lois $\mathcal{B}(10, 0.4)$ et $\mathcal{B}(20, 0.4)$.

Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 < 8)$.

Exercice 29

X désigne une variable aléatoire réelle.

1. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(0.4)$. Calculer $\mathbb{P}(11 < X < 42)$.

2. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(0.9)$. Calculer $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.

Exercice 30

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2, indépendantes. On suppose qu'elles suivent respectivement les lois $\mathcal{P}(0.4)$ et $\mathcal{P}(0.6)$.

Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 < 4)$.

Chapitre 4

Variables aléatoires à densité (environ cinq séances)

Exercice 31

Trouver les constantes c_1 et c_2 telles que les deux fonctions $x \mapsto c_1 x^{-3} \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$ et $x \mapsto c_2 x^{-3} \mathbb{1}_{[-2;-1[}(x)$ soient des densités de probabilité.

Exercice 32

On considère la fonction f définie par $f(x) := K\mathrm{e}^{-|x|}$ où K est une constante réelle.

1. *Déterminer la constante K pour que f soit la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire réelle X.*

2. *Déterminer sa fonction de répartition F_X. Tracer son graphe.*

3. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.*

Exercice 33

On considère la fonction f définie par $f(x) := \frac{K}{(x+1)^4} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$ où K est une constante réelle.

1. *Déterminer la constante K pour que f soit la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire réelle X.*

2. *Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.*

3. *Trouver $q_{\frac{7}{8}} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}\left(X \leq q_{\frac{7}{8}}\right) = \frac{7}{8}$.*

4. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.*

Exercice 34

On considère la fonction F définie par

$$F(x) := \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,.$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X.

2. Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(-x < X \leq x\right) = \frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\,.$$

où $\cosh(x) := \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) := \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

4. Calculer $\mathbb{P}\left(-\log(2) < X \leq \log(2)\right)$.

Exercice 35

La durée de vie en années d'un composant électronique est une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité $f_X(x) := x\mathrm{e}^{-x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}\,[X]$.

Exercice 36

Soient a et b deux constantes réelles et une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par $f(x) := (ax+bx^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(x)$. On suppose $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{5}$. Déterminer $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{Var}\,[X]$.

Exercice 37

La durée de vie d'une ampoule est distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif, de densité :

$$f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)\,.$$

1. Tracer le graphe de f.

2. Calculer la probabilité que la durée de vie soit comprise entre -3 et 4.

3. Calculer la probabilité que la durée de vie soit inférieure à t. On appelle $F(t)$ cette quantité. Tracer le graphe de F.

4. Déterminer t_0 tel que 50% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_0.

5. Déterminer t_1 tel que 75% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_1.

Soit X la variable aléatoire associée à la durée de vie d'une ampoule.

6. Calculer le moment d'ordre n de X. En déduire la durée de vie moyenne et la variance de la durée de vie.

Exercice 38

Soit une variable aléatoire réelle X, de densité de probabilité

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} .$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
3. Calculer $\mathrm{Var}[X]$.
Soit σ un nombre réel strictement positif et m un nombre réel quelconque. On considère la variable aléatoire réelle $Y := \sigma X + m$.
4. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire la densité de Y et tracer son graphe.
5. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
6. Calculer $\mathrm{Var}[Y]$.
7. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $L := \mathrm{e}^Y$.
8. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $\chi := X^2$.

Exercice 39

Trouver la valeur du réel α tel que la fonction f définie par $f(x) := \alpha x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ soit une densité de probabilité.

Exercice 40

Pendant un procédé de gravure, un faisceau laser balaye une fois et à vitesse de rotation ω constante un axe horizontal. Le déplacement s'effectue de $x = -a$ à $x = +a$. La distance du laser à l'axe balayé est notée b. L'angle total balayé par le laser est $2\theta > 0$.
1. *Quelle est la durée T_0 du balayage complet ?*
Le dispositif tombe en panne à l'instant $T \in [0; T_0]$. On suppose que T est une variable aléatoire uniformément distribuée sur cette période.
2. *Quelle est la probabilité que le faisceau tombe en panne avant qu'il ait atteint $x = \frac{a}{2}$?*
3. *Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X où X est la position où s'arrête le faisceau.*

Exercice 41

Un tremblement de Terre de magnitude M libère une énergie E telle que $M = \log(E)$ où log désigne le logarithme népérien. Pour des tremblements de terre de magnitude $M > 3$, on suppose que la variable aléatoire $Y := M - 3$ suit une loi exponentielle de moyenne égale à 2.

1. *Calculer la moyenne et la variance de M.*

2. *Calculer la densité de probabilité de M.*

3. *Calculer la fonction de répartition de E et sa densité de probabilité.*

4. *Soient deux tremblements de terre indépendants et dont la magnitude sont la même loi que celle de M. Démontrer, pour tout $m > 3$: $\mathbb{P}(\min\{M_1, M_2\} \geq m) = \mathbb{P}(M \geq m)^2$.*

5. *En particulier, calculer $\mathbb{P}(\min\{M_1, M_2\} \geq 4)$.*

Exercice 42

Une résistance électrique a une valeur R de dix ohms plus ou moins vingt pourcents. On suppose que la variable aléatoire R est uniformément distribuée. Cette résistance est alimentée par une tension constante $U := 10V$. L'objet de l'exercice est d'étudier l'intensité I qui traverse la résistance.

1. *Déterminer la fonction de répartition F_I de la variable aléatoire I.*

2. *Déterminer la densité de probabilité f_I de la variable aléatoire I.*

3. *Quelle est la probabilité d'avoir un courant d'intensité I supérieur à un ampère ?*

4. *Quelle est l'intensité moyenne du courant ? Comparer cette valeur à $\frac{U}{\mathbb{E}[R]}$.*

5. *Quels sont la variance et l'écart-type du courant ? Comparer ces valeurs à $\frac{U^2}{\sigma^2(R)}$ et à $\frac{U}{\sigma(R)}$.*

6. *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de la probabilité pour que le courant I s'écarte de plus de 0.15 ampère de sa valeur moyenne.*

Exercice 43

Deux résistances R_1 et R_2 de 10Ω à $\pm 20\%$ (uniformément distribuées) sont montées en série. La tension d'alimentation est égale à $U = 20V$. On s'interroge sur la valeur du courant I obtenu.

1. Déterminer la densité de probabilité de la résistance équivalente R.

2. Déterminer la fonction de répartition de la résistance équivalente R.

3. Déterminer la fonction de répartition du courant obtenu I.

4. Déterminer la densité de probabilité du courant obtenu I.

5. Calculer le courant moyen et la variance de I.

Exercice 44

U suit la loi uniforme sur $[0;1]$. Soient $X := \cos(2\pi U)$ et $Y := \sin(2\pi U)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

3. En déduire la covariance Cov (X, Y).

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 45

La variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Y est une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Z := XY$.

2. Calculer la covariance Cov (X, Z).

3. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 46

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) := \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[0;3]}(x)$. Soit $Y := \max\{2; X\}$. Trouver la fonction de répartition et l'espérance de Y. La variable aléatoire Y admet-elle une densité ?

Exercice 47

Une variable aléatoire X suit une loi Log-normale s'il existe des constantes $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ telles que la densité f_X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}} \exp\left[-\frac{(\log(x) - m)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Log-normale. Soient $c, \alpha > 0$. Montrer que $Y := cX^\alpha$ suit aussi une loi Log-normale.

Exercice 48

Soient U et X deux variables aléatoires indépendantes à valeurs positives. On suppose que U suit la loi uniforme sur $[0;1]$ et que X est à densité.

1. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $A := \log(X)$ en fonction de f_X.

2. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $B := \log(U)$.

3. Montrer que la variable aléatoire $C := \log(UX)$ est à densité. Exprimer de plus $f_C(t)$ en fonction de $\int_t^{+\infty} f_X(\mathrm{e}^s)ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que la variable aléatoire $Y := UX$ est à densité. Déterminer de plus la densité f_Y.

On suppose dorénavant que X suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

5. Déterminer la densité de probabilité de Y.

Exercice 49

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) := \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;1]}(x)$. On pose $Y := |4X^2 - 1|$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{E}\left((Y+4X^2)^3\right)$.

Exercice 50 (*)

$R(t)$, le taux de retour en % au cours du temps d'un produit au SAV d'une entreprise est aléatoire. En effet, il dépend de la clientèle du produit, des pays concernés... On suppose qu'il est donné par la relation suivante :

$$R(t) = -Yt^2 + 3t + \frac{1}{2},$$

où Y est une variable aléatoire admettant la densité $f_Y(y) := \frac{1}{5}\mathbb{1}_{[0;5]}(y)$. L'entreprise ne souhaite pas que le taux $R(t)$ dépasse 1%. Calculer la probabilité de cet évènement.

Exercice 51 (*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ c'est-à-dire telle que sa densité de probabilité est égale à $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. Soit $Y := \frac{1}{X}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que X et Y aient la même loi.

Exercice 52 (*)

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. Trouver la constante m telle que

$$\mathbb{E}\left[(X-m)^2\right] = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right] .$$

Exercice 53 (*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et possédant une densité f. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t \, .$$

Exercice 54 (*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Calculer l'espérance de $X^2\mathrm{e}^X$.

Exercice 55 (*)

On admet que la vitesse V d'une molécule d'un gaz en équilibre est une variable aléatoire réelle absolument continue dont la densité de probabilité est égale à

$$f_V(v) := \frac{4b\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} v^2 \mathrm{e}^{-bv^2} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(v) \, ,$$

avec $b := \frac{m}{2kT}$, m étant la masse de la molécule, k la constante de Boltzmann et T la température.

1. Calculer la vitesse moyenne d'une molécule de ce gaz.

2. On appelle énergie cinétique la quantité $\frac{1}{2}mV^2$. Calculer l'énergie cinétique moyenne. On donne : $\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-u}du = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Exercice 56 (*)

Soit X une variable aléatoire positive de densité f. Montrer que la variable aléatoire $\sqrt{X}$ admet comme densité $x \mapsto 2xf(x^2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Chapitre 5

Lois de probabilités à densité usuelles (environ quatre séances)

Exercice 57

X désigne une variable aléatoire réelle.

1. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $\mathbb{P}(-2.52 < X < 1.26)$ et $\mathbb{P}(0.63 \leq X \leq 2.32)$.

2. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $\mathbb{P}(X > 1.452)$.

3. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(|X| < t) = 0.95$.

4. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0.10$.

5. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(5,16)$. Calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 6)$, $\mathbb{P}(X < 3)$, $\mathbb{P}(X > 4)$, $\mathbb{P}(X < 7)$ et $\mathbb{P}(X > 6)$.

Exercice 58

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2, indépendantes. On suppose qu'elles suivent respectivement les lois $\mathcal{N}(2,10)$ et $\mathcal{N}(3,10)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 < 5)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 + 3X_2 < 10)$.

Exercice 59

Dans une compagnie de messagerie disposant de cent camions de livraison, on suppose que le nombre de colis livrés par camion en une journée est distribué suivant la loi normale de moyenne 80 et d'écart-type 15.

Quelle est la loi du nombre de colis livrés en une journée par la compagnie ?

Exercice 60

On considère des assemblages mécaniques de quatre pièces, devant avoir respectivement pour longueur : $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$ et $l_4 = 5$.

Il est matériellement impossible d'obtenir ces valeurs exactes. Les longueurs sont en fait aléatoires et on accepte qu'elles soient distribuées suivant des lois normales ayant pour moyennes respectives les longueurs l_1, l_2, l_3 et l_4. Et, l'écart-type est 0.02 pour chacune des quatre variables aléatoires. On suppose également que les fabrications des quatre pièces se font de façon indépendante.

Pour qu'un assemblage puisse être utilisé, la somme des longueurs doit être comprise entre 13.9 et 14.1.

Calculer la probabilité qu'un assemblage soit défectueux.

Exercice 61

Une confiture est qualifiée de “pur sucre” lorsqu'elle contient entre 420 et 520 grammes de sucre par kilogramme. Chez un fabricant, le poids de sucre par kilogramme est approximativement distribué suivant la loi normale de moyenne 465 grammes et d'écart-type 30 grammes. Calculer la probabilité qu'un kilogramme de confiture ne soit pas “pur sucre”.

Exercice 62

On suppose que la température T pendant le mois de juin suit une loi normale de moyenne 20^o et d'écart-type 3^o.

Calculer la probabilité pour que la température pendant le mois de juin soit comprise entre 21^o et 26^o ?

Exercice 63

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[1;3]$. Chercher la loi de la variable aléatoire $Y := \frac{1}{2}\left(|X-1| + |X|\right)$.

Exercice 64

Soit Y une variable aléatoire uniforme sur $]0;5[$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation $4x^2 + 4xY + Y + 4 = 0$ soient réelles ?

Exercice 65

On suppose que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$. Calculer $\mathbb{E}\left(\max\left\{X_1, \cdots, X_n\right\}\right)$.

Exercice 66

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X est sans mémoire c'est-à-dire que pour tout $s, t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

Exercice 67

Un électron est émis par une cathode à un instant $T > 0$. Ce temps est une variable aléatoire réelle positive et à densité. On suppose que la probabilité qu'il soit émis dans un intervalle de temps quelconque $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}_+$ est donnée par

$$\mathbb{P}(t_1 \leq T \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(s) ds \,,$$

où la fonction α est supposée continue. On suppose de plus que le temps d'émission T est sans mémoire, en d'autres termes que l'on a

$$\mathbb{P}(T > t_1) = \mathbb{P}(T > t_1 + t_2 \mid T > t_2) \,,$$

pour tout t_1, t_2 dans $\mathbb{R}_+$.

1. Exprimer $f_T(t)$.

2. Déterminer la fonction de survie $A(t) := \mathbb{P}(T > t)$ pour $t \geq 0$.

3. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\alpha(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ c'est-à-dire que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

4. Calculer la moyenne et la médiane de cette loi exponentielle.

5. Estimer la probabilité que l'instant d'émission T soit supérieur à la moyenne $\mathbb{E}[T]$ puis à la médiane.

Exercice 68

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $a > 0$. Calculer $\mathbb{E}(\max\{X, Y\})$ et $\mathbb{E}(\min\{X, Y\})$.

Exercice 69

On considère une requête informatique. Deux serveurs A et B peuvent la traiter. Le routeur envoie la requête au serveur A dans une proportion x des cas, sinon à B. Le serveur B traite la requête selon un temps T_B qui suit une loi $\mathcal{E}(1)$ et le serveur A fait le même travail selon un temps T_A qui suit une loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Quel serveur est le plus rapide en moyenne ?

2. On note T le temps de traitement de la requête. Déterminer la loi de T.

3. Quelle valeur donner à x pour qu'en moyenne, le temps T soit inférieur à $\frac{5}{4}$?

Exercice 70 (*)

Un ascenseur peut porter une charge de 500 kilos. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids P. On admet aussi que P est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $m := 75$ et d'écart-type $\sigma := 16$.

Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter si on veut que le risque de surcharge n'excède pas 10^{-2} *?*

Exercice 71 (*)

On admet que l'on sait simuler les variables aléatoires réelles qui suivent la loi uniforme sur $[0;1]$, $\mathcal{U}([0;1])$. Soit une variable aléatoire réelle U qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$. Soit une loi de probabilité μ de fonction de répartition F. On suppose F continue. On introduit la variable aléatoire $X := F^{-1}(U)$, où F^{-1} désigne la réciproque de la fonction F sur $[0;1[$. Montrer que la fonction de répartition de X est F et en déduire que X suit la loi μ. Suggérer un protocole pour simuler une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 72 (*)

On étudie un produit qui est fabriqué en deux étapes. D'abord, la structure est assemblée par un robot, cette phase prenant un temps aléatoire E suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (en minutes). Ensuite, la structure assemblée passe entre les mains d'un opérateur humain choisi au hasard qui doit vérifier la validité des câblages. On estime qu'il y a de grosses différences d'efficacité des opérateurs : 80% d'entre eux mettent trois minutes à vérifier le produit, 10% mettent deux minutes et 10% mettent une minute. On admet que les deux étapes sont indépendantes.

Déterminer la loi suivie par le temps global nécessaire à la fabrication du produit.

Exercice 73 (*)

Tous les matins, un employé de bureau joue à la dame de pique. Il se met à jouer à une heure U au hasard entre 8 h et 12 h. Il joue toujours durant 30 minutes. Le chef de service de cet employé passe une fois dans la matinée pour le surveiller. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité p que l'employé soit surpris par son chef en train de jouer.

1. On suppose que le chef passe à une heure $t \in [8;12]$ déterministe. Calculer p en fonction de t.
2. On suppose maintenant qu'il y a un nouveau chef, qui passe à une heure T aléatoire. On suppose que T suit la loi uniforme sur $[8;12]$. Calculer la nouvelle probabilité p en admettant que T et U sont indépendantes.
3. Quelle est finalement la situation la plus avantageuse pour l'employé ?

Chapitre 6

Fonctions caractéristiques (environ une séance)

Exercice 74

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles telles que X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Z suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. *Calculer l'espérance et la variance de X en utilisant sa fonction caractéristique.*

2. *Calculer l'espérance et la variance de Y en utilisant sa fonction caractéristique.*

3. *Calculer l'espérance et la variance de Z en utilisant sa fonction caractéristique.*

Exercice 75

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit ϵ une variable aléatoire de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. On suppose que X et ϵ sont indépendantes. On pose $Y := \epsilon X$. On dit que Y suit la loi de Laplace.

1. Montrer que la loi de Laplace est à densité.

2. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Laplace.

Exercice 76

Donner un exemple de variable aléatoire X telle que $\varphi_{2X} = (\varphi_X)^2$. En déduire que la propriété $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y.

Exercice 77

Soit X qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

Chapitre 7

Vecteurs aléatoires (environ deux séances)

Exercice 78

Le nombre de véhicules se présentant un lundi matin, jour ouvré, entre 8h et 9h, à la gare de péage autoroutier de Saint Quentin Fallavier, est une variable aléatoire X obéissant à la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Parmi ces véhicules, une proportion $p \in]0; 1[$, utilise le télépéage. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de ces derniers, et par Z la variable aléatoire égale au nombre des autres véhicules, dont on suppose qu'ils se répartissent au hasard entre les r guichets de la gare. On désigne alors par T la variable aléatoire égale au nombre de véhicules se présentant au premier guichet.

1. Soit m un entier naturel donné. Déterminer la loi de Y sachant $\{X = m\}$.

2. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, Y).

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire T.

Exercice 79

Soit la fonction $f(x, y) = k\mathrm{e}^{-y}H(x)H(y - x)$.

1) Montrer qu'il faut $k = 1$ pour que f soit une densité de probabilité conjointe.

2) Donner les densités marginales de X et Y, variables aléatoires dont le couple (X, Y) suit une densité de probabilité conjointe $f_{X,Y}(x, y) = \mathrm{e}^{-y}H(x)H(y-x)$. Sont-elles indépendantes ?

3) Calculer la covariance entre X et Y puis le coefficient de corrélation linéaire. Sont-elles corrélées linéairement ?

Exercice 80

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(2)$. On admet que le couple (X, Y) est à densité.

1. Donner la densité de probabilité de X puis celle de Y.

2. Donner la densité de probabilité du couple (X, Y).

3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Exercice 81

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Déterminer la densité de probabilité de $Z := \frac{X}{Y}$ et en déduire $\mathbb{E}\left[Z\right]$.

Exercice 82

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[1;2]}$. Déterminer $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right]$.

Exercice 83

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T := X - Y$ et $Z := \min(X, Y)$.

1. Rappeler la densité de probabilité de $f_X = f_Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition de Z et en déduire sa densité de probabilité.

3. Déterminer la densité de probabilité de $-Y$.

4. Calculer la densité de probabilité de T.

5. Donner la fonction de répartition de T.

On pose $W := (T, Z)$ et on note F_W sa fonction de répartition.

6. Établir, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_+^2$, la formule suivante :

$$F_W(t,z) = \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)\mathrm{d}x \right) f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_z^{+\infty} \left(\int_0^z f_X(x)\mathrm{d}x \right) f_Y(y)\mathrm{d}y \,.$$

7. En déduire, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_+^2$, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de t et de z.

8. Établir, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, la formule suivante :

$$F_W(t,z) = \int_0^z \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \left(\int_{x-t}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \,.$$

9. En déduire, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de t et de z.

10. Montrer que Z et T sont indépendantes.

Exercice 84 (*)

Soit l'espace fondamental $\Omega := \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. On munit cet espace de l'équiprobabilité que l'on note $\mathbb{P}$. On se donne les deux variables aléatoires X et Y définies par

$$X(\omega) = \omega_1 \quad \text{et} \quad Y(\omega) = \omega_2\,,$$

pour tout élément de l'espace fondamental $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. On remarque $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

1) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

2) Déterminer la loi de probabilité de $Z := X + Y$ ainsi que la fonction de répartition de Z.

3) Même question pour la variable aléatoire $T := XY$.

4) Calculer l'espérance et la variance des deux variables aléatoires Z et T.

Exercice 85 (*)

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on connaît la fonction densité conjointe $f_{X,Y}$. On cherche à déterminer la distribution $f_{R,\Theta}$ en coordonnées polaires.

1) Rappeler les expressions de x et de y en fonction de r et de θ.

2) Donner l'expression de la densité de probabilité conjointe $f_{R,\Theta}$ et de ses marginales f_R et f_Θ.

3) Que deviennent ces expressions dans le cas d'une distribution à symétrie circulaire ? En particulier, comment l'angle Θ est-il distribué ? Donner l'expression de f_Θ et f_R.

4) Dans le cas d'une distribution normale à symétrie circulaire, donner la marginale f_R.

5) Toujours dans le cas d'une distribution normale à symétrie circulaire, quelle est la probabilité pour qu'un point (x, y) choisi au hasard soit tel que $\sqrt{x^2 + y^2} < \mathbb{E}(R)$?

Exercice 86 (*)

Soit la fonction densité $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\,,$$

où $\rho \in]-1;1[$.

1) Déterminer les densités marginales des variables aléatoires X et Y.

2) En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

3) Déterminer l'expression de la densité conditionnelle $f_Y\,(y|X = x)$.

4) Déterminer $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[Y^2]$ en posant $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[Y] = 0$.

5) Déterminer $\mathbb{E}[XY]$ en posant $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ et $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 1$.

Chapitre 8

Convergences, LGN et TCL (environ deux séances)

Exercice 87

Soit X *une variable aléatoire réelle qui suit la loi exponentielle de paramètre* 1. *On pose* $X_n := X\mathbb{1}_{[0;n[}(X) + \mathrm{e}^{2n}\mathbb{1}_{[n;+\infty[}(X)$.

1. Vérifier que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X.

2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

3. Est-il vrai que $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers $\mathbb{E}(X)$?

Exercice 88

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2}\delta_{-\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\delta_{\sqrt{n}}$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Démontrer que $\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge vers 0 en probabilité.

Exercice 89

Soit $(p_n)_n$ une suite de réels dans $]0;1[$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles telle que pour tout n, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers Y.

Exercice 90

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0;1)$. Déterminer la limite en loi de la suite $(Y_n)_n$ avec

$$Y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k \,.$$

Exercice 91

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, X_n suit la loi uniforme sur l'ensemble fini

$$\mathbb{A}_n := \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \cdots; \frac{n-1}{n}\right\} .$$

Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice 92

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On note $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$.
Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

Exercice 93

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Montrer que $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 94

Un logiciel doit faire un calcul comportant cinquante nombres. Il arrondit chacun de ces nombres à l'entier le plus proche et effectue leur somme.
Si les erreurs d'arrondi individuelles sont distribuées uniformément sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, calculer la probabilité pour que la somme obtenue ait un écart de plus de trois par rapport à la somme exacte.

Exercice 95

Une entreprise fabrique des briquets. Elle envoie à ses revendeurs des cartons comportant 30 briquets. Néanmoins, l'emballage est fait à la main si bien que seuls 95% des cartons contiennent effectivement 30 briquets. 3% en contiennent 28 et 2% en contiennent 31.

1. En notant X le nombre de briquets que contient un carton pris au hasard à la sortie de l'usine, donner la loi de X, son espérance et sa variance σ^2.
2. Un magasin a commandé 12 000 briquets c'est-à-dire 400 cartons. Calculer la probabilité que le magasin en reçoive moins de 12 000. On utilisera l'approximation $\frac{1}{\sigma} \approx 2.6875$.

Exercice 96 (*)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que, pour tout n, X_n est de fonction de répartition F_n définie par

$$F_n(x) := \left(1 - \frac{1}{n+x}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\,.$$

On note $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n := \frac{S_n}{n}$.
Démontrer que la suite $(X_n)_n$ converge vers 0 en probabilité mais que la suite $(Y_n)_n$ ne converge pas vers 0 en probabilité.

Exercice 97 (*)

On tente d'organiser le planning des entretiens de recrutement dans une école d'ingénieurs. On a constaté que 10% des personnes convoquées ne viennent pas à l'entretien. 250 personnes ont été convoquées pour les entretiens. On note X le nombre de personnes effectivement présentes pour passer l'entretien.

1. Déterminer la loi exacte de X.
2. Calculer de façon approchée $\mathbb{P}(X \leq 230)$. On prendra l'approximation $\sqrt{10} \approx 3.15$.

Exercice 98 (*)

Une société d'assurance A doit assurer 100 véhicules identiques, dont la valeur est de 10 000 euros. Sur un an, la probabilité pour qu'un véhicule soit accidenté et irréparable est de $p = 0.01$. Les accidents des voitures sont supposés indépendants. On suppose que A doit payer le 31 décembre sur son fonds de roulement tous les sinistres de l'année.

1. À combien doit s'élever le fonds de roulement si on veut que A puisse indemniser tous les sinistres dans 99% des cas ?
2. Une autre société d'assurance, la société B, doit effectuer le même travail que A dans les mêmes conditions (mais sur 100 autres véhicules). Les sociétés A et B projettent de fusionner. Elles assureraient les 200 véhicules. Calculer la valeur du fonds de roulement que devrait posséder la nouvelle société (dans les mêmes conditions que précédemment).
3. La fusion permet-elle de réaliser des économies ?

Exercice 99 (*)

Une machine doit percer une pièce métallique. Mais ce perçage est très technique et la probabilité qu'elle réussisse à faire le trou n'est que de $\frac{1}{2}$. La machine traite n pièces, de façon indépendante. On note p_n la proportion de pièces correctes :

$$p_n := \frac{\#\,\{\text{pièces correctement percées}\}}{n}.$$

1. Calculer p_∞, la limite de p_n pour n tendant vers l'infini.
2. Soit $\epsilon > 0$. Combien de pièces la machine doit-elle traiter pour être sûr à 95% que p_n soit proche à ϵ près de la probabilité limite p_∞ ?

Exercice 100 (*)

On considère une fonction f positive sur l'intervalle $[a; b]$ avec $b > a$. On suppose de plus qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$. On note $\mathcal{S}$ la surface sous la courbe de f entre a et b. On réalise l'expérience suivante : on tire de façon indépendante n points $A_1 := (X_1, Y_1), \cdots, A_n := (X_n, Y_n)$ au hasard dans le rectangle $[a; b] \times [0; M]$. En d'autres termes, les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[a;b]}$ et les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[0;M]}$. De plus, X_i est indépendante de Y_j pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

1. Quelle est la densité de probabilité du couple (X_1, Y_1) ?
2. Calculer la probabilité que le point A_1 soit dans la surface $\mathcal{S}$.
3. On pose $p_n := \frac{\#\{i \in [\![1;n]\!] \,:\, A_i \in \mathcal{S}\}}{n}$. Montrer que p_n converge presque sûrement vers la quantité $\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{M(b-a)}$.
4. En déduire une façon de calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
5. On prend $a = 1$, $b = 2$ et $M = 4$. Quelle valeur donner à n pour être sûr à 95% d'obtenir une approximation de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à 10^{-2} près par la méthode précédente ?