Probabilités

Théorème central de la limite

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Motivations

Comme pour la loi des grands nombres, on va commencer par donner une motivation du théorème central limite.

Motivations

Comme pour la loi des grands nombres, on va commencer par donner une motivation du théorème central limite.

Nous venons de voir les lois des grands nombres. On sait ainsi que $\overline{X_n}$ converge presque sûrement, dans L^2 et en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$ sous certaines hypothèses. Néanmoins, dans la pratique, obtenir une limite n'est pas suffisant. Il faut aussi quantifier la vitesse de convergence. C'est notamment l'objet du théorème central de la limite. Ce dernier stipule que la vitesse est de la forme $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Motivations

Comme pour la loi des grands nombres, on va commencer par donner une motivation du théorème central limite.

Nous venons de voir les lois des grands nombres. On sait ainsi que $\overline{X_n}$ converge presque sûrement, dans L^2 et en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$ sous certaines hypothèses. Néanmoins, dans la pratique, obtenir une limite n'est pas suffisant. Il faut aussi quantifier la vitesse de convergence. C'est notamment l'objet du théorème central de la limite. Ce dernier stipule que la vitesse est de la forme $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$. En particulier, on peut obtenir des intervalles de confiance en se ramenant au cas du modèle gaussien.

Plan

Énoncé du théorème central limite

Théorème central de la limite

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$. On suppose $\sigma \in]0;\infty[$. On pose $Y_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite. De manière équivalente :

Énoncé du théorème central limite

Théorème central de la limite

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$. On suppose $\sigma \in]0; \infty[$. On pose $Y_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite. De manière équivalente :

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0; 1) \ ,$$

Énoncé du théorème central limite

Théorème central de la limite

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$. On suppose $\sigma \in]0;\infty[$. On pose $Y_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite. De manière équivalente :

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1) \,,$$

où $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Énoncé du théorème central limite

Théorème central de la limite

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$. On suppose $\sigma \in]0;\infty[$. On pose $Y_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Alors, la suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite. De manière équivalente :

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0;1) \; ,$$

où $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Remarque

En pratique, $n > 30$ est suffisant.

Plan

Démonstration - 1

Remarque

Si X_i suit la loi normale de paramètres μ et σ^2, le résultat est immédiat de par la stabilité par la somme des lois normales.

Démonstration - 1

Remarque

Si X_i suit la loi normale de paramètres μ et σ^2, le résultat est immédiat de par la stabilité par la somme des lois normales.

Preuve

Soit φ la fonction caractéristique de $X_1 - \mu$. On note ψ_n la fonction caractéristique de Y_n.

Démonstration - 2

$$\psi_n(u) := \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right]$$

Démonstration - 2

$$
\begin{aligned}
\psi_n(u) :=& \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iu\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Démonstration - 2

$$
\begin{aligned}
\psi_n(u) :=& \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iu\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\left(S_n - n\mu\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Démonstration - 2

$$
\begin{aligned}
\psi_n(u) :=& \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iu\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\left(S_n - n\mu\right)\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mu\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Démonstration - 2

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) :=& \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iu\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - n\mu)\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)\right]\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}(X_k - \mu)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Démonstration - 2

$$
\begin{aligned}
\psi_n(u) :=& \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iu\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\left(S_n - n\mu\right)\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mu\right)\right]\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\left(X_k - \mu\right)\right]\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

Démonstration - 2

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) :=& \mathbb{E}\left[e^{iuY_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[iu\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\left(S_n - n\mu\right)\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mu\right)\right]\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\left(X_k - \mu\right)\right]\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= \left[\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n .
\end{aligned}$$

Démonstration - 3

Or, $\mathbb{E}\left[X_1 - \mu\right] = 0$ et $\mathrm{Var}\left[X_1 - \mu\right] = \sigma^2 < \infty$.

Démonstration - 3

Or, $\mathbb{E}\left[X_1 - \mu\right] = 0$ et $\mathrm{Var}\left[X_1 - \mu\right] = \sigma^2 < \infty$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\sigma^2 \,.$$

Démonstration - 3

Or, $\mathbb{E}[X_1-\mu]=0$ et $\mathrm{Var}[X_1-\mu]=\sigma^2<\infty$. On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que

$$\varphi'(0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0)=-\sigma^2\,.$$

On procède ensuite au développement de Taylor de la fonction φ à l'ordre deux au voisinage de 0 :

$$\varphi(u)=1-\frac{\sigma^2}{2}u^2+u^2h(u)\,,$$

avec $h(u)\longrightarrow 0$ quand $u\to 0$.

Démonstration - 4

Puis, l'on a :

$$\begin{aligned}\psi_n(u) = \left[\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n &= \exp\left\{n\log\left[\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right\} \\ &= \exp\left\{n\log\left[1-\frac{1}{2n}u^2+\frac{1}{n\sigma^2}u^2h\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right\}\,,\end{aligned}$$

où log désigne la valeur principale du logarithme complexe (valant 0 au point 1 et définie partout sauf sur la demi-droite négative).
Quand n tend vers l'infini, il vient

Démonstration - 4

Puis, l'on a :

$$\psi_n(u) = \left[\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \exp\left\{n\log\left[\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right\}$$
$$= \exp\left\{n\log\left[1 - \frac{1}{2n}u^2 + \frac{1}{n\sigma^2}u^2 h\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right\},$$

où log désigne la valeur principale du logarithme complexe (valant 0 au point 1 et définie partout sauf sur la demi-droite négative). Quand n tend vers l'infini, il vient

$$\psi_n(u) \longrightarrow e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Démonstration - 5

Nous savons alors que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge en loi vers Z quand n tend vers l'infini où $\varphi_Z(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.
Il s'avère ainsi que Z suit de plus la loi normale centrée réduite.