Probabilités

Lois des grands nombres

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Méthodes de Monte Carlo - 1

Un intérêt de la loi des grands nombres réside dans l'utilisation des méthodes de simulation des variables aléatoires pour l'intégration numérique. Soit f une fonction borélienne sur $[0;1]$. On la suppose intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Il n'est pas forcément simple de trouver la valeur formelle de l'intégrale

Méthodes de Monte Carlo - 1

Un intérêt de la loi des grands nombres réside dans l'utilisation des méthodes de simulation des variables aléatoires pour l'intégration numérique. Soit f une fonction borélienne sur $[0;1]$. On la suppose intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Il n'est pas forcément simple de trouver la valeur formelle de l'intégrale

$$I_\infty := \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Méthodes de Monte Carlo - 2

La méthode des rectangles et celle des trapèzes sont bien connues mais elles ont le désavantage de dépendre de la dimension du support d'intégration. De plus, il faudrait, pour les utiliser, supposer de plus que f est suffisamment régulière (typiquement il faut qu'elle soit lipschitzienne).

Méthodes de Monte Carlo - 2

La méthode des rectangles et celle des trapèzes sont bien connues mais elles ont le désavantage de dépendre de la dimension du support d'intégration. De plus, il faudrait, pour les utiliser, supposer de plus que f est suffisamment régulière (typiquement il faut qu'elle soit lipschitzienne).

Une autre méthode de calcul est de considérer une suite de variables aléatoires $(U_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0;1]$, $\mathcal{U}_{[0;1]}$. On pose alors :

$$I_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(U_j)\,.$$

Méthodes de Monte Carlo - 3

Il s'agit d'une variable aléatoire. Néanmoins, si l'on arrive à prouver une loi des grands nombres, on a alors la convergence, dans un sens à préciser, vers la quantité

Méthodes de Monte Carlo - 3

Il s'agit d'une variable aléatoire. Néanmoins, si l'on arrive à prouver une loi des grands nombres, on a alors la convergence, dans un sens à préciser, vers la quantité

$$I_\infty = \mathbb{E}\left[f(U)\right] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Méthodes de Monte Carlo - 3

Il s'agit d'une variable aléatoire. Néanmoins, si l'on arrive à prouver une loi des grands nombres, on a alors la convergence, dans un sens à préciser, vers la quantité

$$I_\infty = \mathbb{E}\left[f(U)\right] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

On peut ensuite essayer de détendre les hypothèses sur l'indépendance afin d'optimiser la vitesse de convergence. Mais, c'est une autre histoire.

Plan

Énoncé

Théorème

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}\left[X_1\right] = \sigma^2 < \infty$. Soit $\overline{X_n} := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Alors $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers μ.

Démonstration - 1

Preuve

On a : $\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \mu$. Puis, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left[\overline{X_n}\right]}{\epsilon^2}.$$

Démonstration - 1

Preuve

On a : $\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \mu$. Puis, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left[\overline{X_n}\right]}{\epsilon^2}.$$

Or, on peut faire le calcul explicite suivant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\overline{X_n}\right] &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

Démonstration - 2

Conséquemment, il vient :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0\,,$$

ce qui achève la preuve.

Plan

Énoncés

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, $\overline{X_n}$ converge dans L^2 vers μ.

Énoncés

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, $\overline{X_n}$ converge dans L^2 vers μ.

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, si de plus $\mathbb{E}[X_1^4] = m_4 < \infty$, alors $\overline{X_n}$ converge presque sûrement vers μ.

Plan

Énoncé

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $\overline{X_n} := \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$. Alors, la suite de terme général $\overline{X_n}$ converge presque sûrement vers μ si et seulement si $\mathbb{E}[X_1] = \mu$. Dans ce cas, la convergence a aussi lieu dans L^1.