

# Probabilités

## Convergences des variables aléatoires

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
  - Définition et premières propriétés
  - Caractérisation
- 3 Convergence dans  $L^p$ 
  - Définition
  - Propriétés
  - Différence avec l'espace  $L^p$  en analyse
- 4 Convergence en probabilité
  - Définition
  - Liens avec les deux autres convergences
  - Philosophie des convergences
  - Réciproques partielles
- 5 Convergence en loi
  - Définition et première propriété
  - Lien avec la convergence faible
  - Lemme de Slutsky
  - Obtenir une convergence en loi
- 6 Synthèse

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
- 3 Convergence dans  $L^p$
- 4 Convergence en probabilité
- 5 Convergence en loi
- 6 Synthèse

## Problème - 1

La définition même de ce qu'est une probabilité contient en son sein l'idée d'infini. En effet, le troisième axiome, à savoir l'axiome des probabilités totales signifie que l'on va s'intéresser tôt ou tard à la notion de limite donc à celle de convergence.

## Problème - 1

La définition même de ce qu'est une probabilité contient en son sein l'idée d'infini. En effet, le troisième axiome, à savoir l'axiome des probabilités totales signifie que l'on va s'intéresser tôt ou tard à la notion de limite donc à celle de convergence.

La notion de convergence dépend directement de la topologie que l'on associe à l'espace que l'on étudie. Par exemple, quand on regarde les suites réelles, la topologie principale (en terme d'utilisation) est celle associée à la valeur absolue, en guise de norme. Toutefois, si l'on s'intéresse aux suites de fonctions, on dispose de plusieurs convergences : la convergence simple et la convergence uniforme. Avec les séries de fonctions, on a la convergence simple, la convergence uniforme mais aussi la convergence absolue.

## Problème - 2

Quand on utilise la notion d'infini, il convient de toujours préciser quelle topologie on utilise. En particulier, l'ensemble  $\mathbb{R}^\Omega$  est un espace fonctionnel donc il faut être précautionneux avec la périlleuse notion de convergence.

## Problème - 2

Quand on utilise la notion d'infini, il convient de toujours préciser quelle topologie on utilise. En particulier, l'ensemble  $\mathbb{R}^\Omega$  est un espace fonctionnel donc il faut être précautionneux avec la périlleuse notion de convergence.

Nous verrons en particulier que les convergences usuelles en analyse sont à peu près inutiles dans le cadre des probabilités. En lieu et place, nous présenterons la convergence presque sûre (laquelle est difficilement atteignable), la convergence dans  $L^p$  pour  $p \in [1; +\infty[$  et la convergence en probabilité. Nous ferons également l'étude de la convergence en loi, laquelle est fondamentalement différente des autres.

# Paradoxe - 1

On effectue plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Quand la pièce fait pile, on perd la somme mise. Quand elle fait face, on récupère le double de ce qu'on a misé.

## Paradoxe - 1

On effectue plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Quand la pièce fait pile, on perd la somme mise. Quand elle fait face, on récupère le double de ce qu'on a misé.

De fait, la modélisation par des expériences indépendantes d'une loi de Rademacher se prête bien à ce cadre. On note  $m_n$  la mise du lancer numéro  $n$ . On pose  $X_n := -1$  si la pièce fait pile au lancer numéro  $n$  et  $X_n := 1$  sinon.

## Paradoxe - 2

Le gain  $G_n$  du joueur après  $n$  lancers est donc égal à  $G_n = \sum_{k=1}^n m_k X_k$ . Si la mise est déterministe, la linéarité de l'espérance implique  $\mathbb{E}[G_n] = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Néanmoins, l'idée est ici que le joueur va adapter sa mise en fonction des résultats aux lancers *précédents*. En effet, on part du principe que le joueur veut optimiser ses gains. On prend aussi comme hypothèse qu'il ne dispose pas de pouvoirs lui permettant de deviner les lancers futurs.

## Paradoxe - 2

Le gain  $G_n$  du joueur après  $n$  lancers est donc égal à  $G_n = \sum_{k=1}^n m_k X_k$ . Si la mise est déterministe, la linéarité de l'espérance implique  $\mathbb{E}[G_n] = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Néanmoins, l'idée est ici que le joueur va adapter sa mise en fonction des résultats aux lancers *précédents*. En effet, on part du principe que le joueur veut optimiser ses gains. On prend aussi comme hypothèse qu'il ne dispose pas de pouvoirs lui permettant de deviner les lancers futurs.

Nous allons opter pour la "martingale" (dans le sens commun du mot) classique consistant à miser un euro au premier lancer puis à doubler la mise jusqu'à gagner une fois. L'idée est en fait d'introduire ce que l'on appelle un temps d'arrêt, lequel suit en fait la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$  :

## Paradoxe - 3

On utilise alors la stratégie de mise **non déterministe** suivante.

On pose :  $m_1 := 1$ . Puis,  $m_{n+1} := 2m_n \mathbb{1}_{n < \tau}$ . En d'autres termes, on double la mise jusqu'à tomber sur face puis on arrête le jeu. On en déduit que pour tout  $k \leq \tau$ , on a  $m_k = 2^{k-1}$ .

## Paradoxe - 3

On utilise alors la stratégie de mise **non déterministe** suivante.

On pose :  $m_1 := 1$ . Puis,  $m_{n+1} := 2m_n \mathbb{1}_{n < \tau}$ . En d'autres termes, on double la mise jusqu'à tomber sur face puis on arrête le jeu. On en déduit que pour tout  $k \leq \tau$ , on a  $m_k = 2^{k-1}$ . Le gain au lancer numéro  $\tau(\omega)$  est ainsi :

$$G_{\tau(\omega)} = \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} m_k X_k = \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} 2^{k-1} X_k .$$

## Paradoxe - 4

Or,  $X_{\tau(\omega)} = +1$  et  $X_k = -1$  pour tout  $k \in \llbracket 1; \tau(\omega) - 1 \rrbracket$ , si  $\tau(\omega) \geq 2$ . Le cas où  $\tau(\omega) = 1$  est passé sous silence vu que cela signifie qu'on a gagné au premier essai et donc il n'y a aucune stratégie à avoir. Il vient :

## Paradoxe - 4

Or,  $X_{\tau(\omega)} = +1$  et  $X_k = -1$  pour tout  $k \in \llbracket 1; \tau(\omega) - 1 \rrbracket$ , si  $\tau(\omega) \geq 2$ . Le cas où  $\tau(\omega) = 1$  est passé sous silence vu que cela signifie qu'on a gagné au premier essai et donc il n'y a aucune stratégie à avoir. Il vient :

$$\begin{aligned} G_{\tau(\omega)} &= - \sum_{k=1}^{\tau(\omega)-1} 2^{k-1} + 2^{\tau(\omega)-1} = - \sum_{k=0}^{\tau(\omega)-2} 2^k + 2^{\tau(\omega)-1} \\ &= 1 - 2^{\tau(\omega)-1} + 2^{\tau(\omega)-1} = 1. \end{aligned}$$

## Paradoxe - 5

Par conséquent, si  $n \geq \tau(\omega)$ ,  $G_n = 1$ . Et, si  $n < \tau(\omega)$ ,  
 $G_n = -\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 - 2^n$ .

## Paradoxe - 5

Par conséquent, si  $n \geq \tau(\omega)$ ,  $G_n = 1$ . Et, si  $n < \tau(\omega)$ ,  
 $G_n = -\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 - 2^n$ .

On remarque :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 1\right) = 1.$$

En effet,  $\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\omega) \neq 1\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X_k = -1\}$ . Or, cet évènement est inclus dans  $\bigcap_{k=1}^N \{X_k = -1\}$  pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ . Cet évènement est de probabilité  $2^{-N}$ . Il s'ensuit le résultat annoncé.

## Paradoxe - 6

Pourtant, en rappelant que  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$  pour tout événement  $A$ ,  
on remarque aussi :

## Paradoxe - 6

Pourtant, en rappelant que  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$  pour tout évènement  $A$ , on remarque aussi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_n] &= \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n < \tau}] + \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n \geq \tau}] \\ &= \mathbb{E}[(1 - 2^n) \times \mathbb{1}_{n < \tau}] + \mathbb{E}[1 \times \mathbb{1}_{n \geq \tau}] \\ &= (1 - 2^n) \mathbb{P}(\tau > n) + \mathbb{P}(\tau \leq n) \\ &= (1 - 2^n) 2^{-n} + (1 - 2^{-n}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

## Paradoxe - 6

Pourtant, en rappelant que  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$  pour tout évènement  $A$ , on remarque aussi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_n] &= \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n < \tau}] + \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n \geq \tau}] \\ &= \mathbb{E}[(1 - 2^n) \times \mathbb{1}_{n < \tau}] + \mathbb{E}[1 \times \mathbb{1}_{n \geq \tau}] \\ &= (1 - 2^n) \mathbb{P}(\tau > n) + \mathbb{P}(\tau \leq n) \\ &= (1 - 2^n) 2^{-n} + (1 - 2^{-n}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

En effet,  $\tau$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(\tau > n) = 2^{-n}$ .

## Paradoxe - 7

Ce résultat semble surprenant. En effet, il semblerait qu'il suffise de refaire la procédure un grand nombre de fois pour dégager un bénéfice moyen.

## Paradoxe - 7

Ce résultat semble surprenant. En effet, il semblerait qu'il suffise de refaire la procédure un grand nombre de fois pour dégager un bénéfice moyen.

Comment concilier ces deux résultats justes mais qui semblent incompatibles ?

# Convergence simple - 1

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle est une fonction de l'espace fondamental  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$ . On peut donc naturellement munir l'ensemble des variables aléatoires de cette topologie. En d'autres termes, on dit que la suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  si  $X_n(\omega)$  converge vers  $X(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

# Convergence simple - 1

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle est une fonction de l'espace fondamental  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$ . On peut donc naturellement munir l'ensemble des variables aléatoires de cette topologie. En d'autres termes, on dit que la suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  si  $X_n(\omega)$  converge vers  $X(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

Cette convergence est à peu près **inutile** en probabilités vu qu'elle n'exploite pas la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  dont on a muni l'espace fondamental.

## Convergence simple - 2

### Exemple

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi  $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ . En pratique, on lance une pièce équilibrée. Alors,  $X_n$  vaut 1 si la pièce donne “face” et  $X_n$  vaut 0 si la pièce donne “pile”.

## Convergence simple - 2

### Exemple

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi  $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ . En pratique, on lance une pièce équilibrée. Alors,  $X_n$  vaut 1 si la pièce donne “face” et  $X_n$  vaut 0 si la pièce donne “pile”.

Lorsque le nombre  $n$  de lancers est grand, on s'attend à ce que la proportion de “faces” soit à peu près égale à  $\frac{1}{2}$  au vu de l'approche fréquentiste de la notion de probabilité. Ainsi, on s'attend à ce que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

## Convergence simple - 3

Or, cette limite est fautive pour certaines valeurs de  $\omega$ . Posons par exemple

$$A := \{\omega \in \Omega : \# \{\text{nombre de faces}\} < \infty\}.$$

On a alors immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} = 0$$

pour tout  $\omega \in A$ .

On pourra objecter à l'exemple ci-dessus que l'évènement  $A$  est peu probable. On peut d'ailleurs facilement vérifier, en utilisant l'indépendance ainsi que le Lemme de Borel-Cantelli que sa probabilité est égale à 0. Or, seuls les évènements de probabilités strictement positives nous intéressent.

On pourra objecter à l'exemple ci-dessus que l'évènement  $A$  est peu probable. On peut d'ailleurs facilement vérifier, en utilisant l'indépendance ainsi que le Lemme de Borel-Cantelli que sa probabilité est égale à 0. Or, seuls les évènements de probabilités strictement positives nous intéressent.

On pourrait montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que l'on dispose de la limite suivante :

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2} \right\} \right) = 1.$$

On pourra objecter à l'exemple ci-dessus que l'évènement  $A$  est peu probable. On peut d'ailleurs facilement vérifier, en utilisant l'indépendance ainsi que le Lemme de Borel-Cantelli que sa probabilité est égale à 0. Or, seuls les évènements de probabilités strictement positives nous intéressent.

On pourrait montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que l'on dispose de la limite suivante :

$$\mathbb{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2} \right\} \right) = 1.$$

En d'autres termes, on n'a pas convergence pour tout  $\omega$  mais uniquement pour presque tout  $\omega$ , ou dit plus rigoureusement, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega$ . C'est typiquement cette convergence presque sûre qui nous intéresse.

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
  - Définition et premières propriétés
  - Caractérisation
- 3 Convergence dans  $L^p$
- 4 Convergence en probabilité
- 5 Convergence en loi
- 6 Synthèse

# Définition

## Convergence presque sûre

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers  $X$  si  $\mathbb{P}(\Lambda) = 1$  où l'on a

$$\Lambda := \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} .$$

# Définition

## Convergence presque sûre

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers  $X$  si  $\mathbb{P}(\Lambda) = 1$  où l'on a

$$\Lambda := \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\}.$$

## Notation

Si  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers  $X$ , alors on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X.$$

## Quelques propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X + Y$ . Et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \lambda X$ .

## Quelques propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X + Y$ . Et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \lambda X$ .

Également, si  $f$  est une fonction continue de la variable réelle, alors si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X$ , on a  $f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} f(X)$ .

# Caractérisation

## Corollaire

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$  et soit  $X$  une variable aléatoire définie sur le même espace. On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

# Caractérisation

## Corollaire

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$  et soit  $X$  une variable aléatoire définie sur le même espace. On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

- $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X.$

# Caractérisation

## Corollaire

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$  et soit  $X$  une variable aléatoire définie sur le même espace. On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

- $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X$ .
- Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n - X| \geq \epsilon\}) = 0$ .

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
- 3 Convergence dans  $L^p$** 
  - Définition
  - Propriétés
  - Différence avec l'espace  $L^p$  en analyse
- 4 Convergence en probabilité
- 5 Convergence en loi
- 6 Synthèse

## Convergence dans $L^p$ ( $p \in [1; +\infty[$ )

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  si les variables aléatoires  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L^p$  (c'est-à-dire que l'on a  $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$  et  $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ ) et si de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

## Convergence dans $L^p$ ( $p \in [1; +\infty[$ )

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  si les variables aléatoires  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L^p$  (c'est-à-dire que l'on a  $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$  et  $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ ) et si de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On dit aussi que  $X_n$  converge en moyenne d'ordre  $p$  vers  $X$ . Les convergences qui nous intéressent le plus sont pour  $p = 1$  et pour  $p = 2$ .

# Définition

## Convergence dans $L^p$ ( $p \in [1; +\infty[$ )

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  si les variables aléatoires  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L^p$  (c'est-à-dire que l'on a  $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$  et  $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ ) et si de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On dit aussi que  $X_n$  converge en moyenne d'ordre  $p$  vers  $X$ . Les convergences qui nous intéressent le plus sont pour  $p = 1$  et pour  $p = 2$ .

## Notation

Si  $(X_n)_n$  converge dans  $L^p$  vers  $X$ , alors on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X.$$

# Propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X + Y$ . Et  
pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} \lambda X$ .

# Propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X + Y$ . Et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} \lambda X$ .

## Remarque

L'espace  $L^p$  est complet pour  $p \in [1; \infty[$  pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

# Propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X + Y$ . Et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} \lambda X$ .

## Remarque

L'espace  $L^p$  est complet pour  $p \in [1; \infty[$  pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

## Remarque

Si  $1 \leq p \leq q < +\infty$ , alors l'inégalité de Jensen nous assure que pour toute variable aléatoire réelle  $Y$ , on a l'inégalité  $\mathbb{E}[|Y|^p] \leq \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{p}{q}}$ . Ainsi, si une suite  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  dans  $L^q$  alors elle converge également vers  $X$  dans  $L^p$ . En effet,  $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \leq (\mathbb{E}[|X_n - X|^q])^{\frac{p}{q}}$ .

# Propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X + Y$ . Et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} \lambda X$ .

## Remarque

L'espace  $L^p$  est complet pour  $p \in [1; \infty[$  pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

## Remarque

Si  $1 \leq p \leq q < +\infty$ , alors l'inégalité de Jensen nous assure que pour toute variable aléatoire réelle  $Y$ , on a l'inégalité  $\mathbb{E}[|Y|^p] \leq \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{p}{q}}$ . Ainsi, si une suite  $(X_n)_n$  converge vers  $X$  dans  $L^q$  alors elle converge également vers  $X$  dans  $L^p$ . En effet,  $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \leq (\mathbb{E}[|X_n - X|^q])^{\frac{p}{q}}$ .

## Lemme

Si la suite de terme général  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^1$ , alors la suite  $(\mathbb{E}[X_n])_n$  converge vers  $\mathbb{E}[X]$ .

## Différence avec l'espace $L^p$ en analyse

En analyse, et pour être plus exact, quand on travaille avec l'intégrale de Lebesgue, l'espace  $L^p$  est l'espace des fonctions (ou plutôt des classes d'équivalence de fonctions) telles que  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt$ .

## Différence avec l'espace $L^p$ en analyse

En analyse, et pour être plus exact, quand on travaille avec l'intégrale de Lebesgue, l'espace  $L^p$  est l'espace des fonctions (ou plutôt des classes d'équivalence de fonctions) telles que  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt$ .

Ici, l'espace est très différent. En effet, dans le cas où  $X$  est à densité, alors sa norme  $p$  est

$$\mathbb{E}[|X|^p] := \int_{\mathbb{R}} |t|^p f_X(t) dt,$$

ce qui n'a rien à voir avec  $\int_{\mathbb{R}} |f_X(t)|^p dt$ .

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
- 3 Convergence dans  $L^p$
- 4 Convergence en probabilité**
  - Définition
  - Liens avec les deux autres convergences
  - Philosophie des convergences
  - Réciproques partielles
- 5 Convergence en loi
- 6 Synthèse

# Définition

## Convergence en probabilité

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , on a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

# Définition

## Convergence en probabilité

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , on a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

## Notation

Si  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$ , alors on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X.$$

## Premières propriétés

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$  et si  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} Y$  alors  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X + Y$ . Et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \lambda X$ .

# La convergence en probabilité est faible

# La convergence en probabilité est faible

## Théorème

Pour tout  $p \in [1; +\infty[$ , la convergence dans  $L^p$  implique la convergence en probabilité.

# La convergence en probabilité est faible

## Théorème

Pour tout  $p \in [1; +\infty[$ , la convergence dans  $L^p$  implique la convergence en probabilité.

## Théorème

La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

## Remarque

La convergence presque sûre dénote un caractère trajectorien. Ainsi, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X_n(\omega) - X(\omega)$  tend vers 0.

## Remarque

La convergence presque sûre dénote un caractère trajectorien. Ainsi, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X_n(\omega) - X(\omega)$  tend vers 0.

La convergence dans  $L^p$  signifie qu'en moyennant, à  $n$  fixé sur toutes les trajectoires de  $\omega \mapsto |X_n(\omega) - X(\omega)|$ , alors cette moyenne tend vers 0.

## Remarque

La convergence presque sûre dénote un caractère trajectorien. Ainsi, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X_n(\omega) - X(\omega)$  tend vers 0.

La convergence dans  $L^p$  signifie qu'en moyennant, à  $n$  fixé sur toutes les trajectoires de  $\omega \mapsto |X_n(\omega) - X(\omega)|$ , alors cette moyenne tend vers 0.

La convergence en probabilité, quant à elle, signifie que pour  $\epsilon > 0$  fixé, la proportion de trajectoires de  $\omega \mapsto X_n(\omega) - X(\omega)$  à l'extérieur de la bande  $[-\epsilon; \epsilon]$  tend vers 0.

## Théorème

Soit  $X_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$ . Alors, il existe une sous-suite de  $(X_n)_n$  qui converge presque sûrement vers  $X$ .

## Théorème

Soit  $X_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$ . Alors, il existe une sous-suite de  $(X_n)_n$  qui converge presque sûrement vers  $X$ .

## Proposition

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$  et si  $f$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} f(X).$$

## Théorème

Soit  $X_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$ . Alors, il existe une sous-suite de  $(X_n)_n$  qui converge presque sûrement vers  $X$ .

## Proposition

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$  et si  $f$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} f(X).$$

## Théorème

On suppose que la suite de variables aléatoires  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$ . On suppose de plus que  $X_n$  est uniformément bornée par une variable  $Y \in L^p$  avec  $p \in [1; \infty[$ . Alors,  $X \in L^p$  et  $X_n$  converge vers  $X$  dans  $L^p$ .

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
- 3 Convergence dans  $L^p$
- 4 Convergence en probabilité
- 5 Convergence en loi**
  - Définition et première propriété
  - Lien avec la convergence faible
  - Lemme de Slutsky
  - Obtenir une convergence en loi
- 6 Synthèse

# Définition

## Convergence en loi

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$  si pour toute fonction réelle, continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , on a la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] .$$

## Définition

### Convergence en loi

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On dit que la suite  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$  si pour toute fonction réelle, continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , on a la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [f(X_n)] = \mathbb{E} [f(X)] .$$

### Notation

Si  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ , alors on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X .$$

## Premier résultat

### Proposition

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ . Alors, pour toute fonction continue  $f$ ,  $(f(X_n))_n$  converge en loi vers  $f(X)$ .

## Premier résultat

### Proposition

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ . Alors, pour toute fonction continue  $f$ ,  $(f(X_n))_n$  converge en loi vers  $f(X)$ .

### Preuve

Il suffit de remarquer que pour toute fonction  $f$  continue et pour toute fonction continue et bornée  $\psi$ , alors  $\xi := \psi \circ f$  est une fonction continue et bornée. De fait, la convergence de la suite de terme général  $\mathbb{E}[\psi(f(X_n))] = \mathbb{E}[\xi(X_n)]$  vers  $\mathbb{E}[\xi(X)] = \mathbb{E}[\psi(f(X))]$  est immédiate.

## Théorème

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$ . Alors  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ .

## Théorème

Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Soit  $X$  une autre variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que  $(X_n)_n$  converge en probabilité vers  $X$ . Alors  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ .

## Preuve

On se donne une fonction  $f$  continue et bornée. On pose  $x_n := \mathbb{E}[f(X_n)]$ . Comme  $f$  est bornée, la suite  $(x_n)_n$  est aussi bornée. Soit  $x_\infty$  une valeur d'adhérence de la suite. Alors, il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_\infty$ . Or,  $X_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$ . On peut donc extraire une sous-suite de  $(X_{n_k})_k$  qui converge presque sûrement vers  $X$ . Notons  $(X_{m_p})_p$  cette sous-suite.

La continuité de la fonction  $f$  implique

$$f(X_{m_p}) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} f(X).$$

La continuité de la fonction  $f$  implique

$$f(X_{m_p}) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} f(X).$$

La fonction  $f$  étant bornée, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il vient

$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_{m_p})] = \mathbb{E}[f(X)]$ . Or,  $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{m_p} = x_\infty$  donc  $x_\infty = \mathbb{E}[f(X)]$ .

La continuité de la fonction  $f$  implique

$$f(X_{m_p}) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} f(X).$$

La fonction  $f$  étant bornée, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il vient

$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_{m_p})] = \mathbb{E}[f(X)]$ . Or,  $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{m_p} = x_\infty$  donc  $x_\infty = \mathbb{E}[f(X)]$ .

On conclut en rappelant que la suite  $(x_n)_n$  est bornée puis comme elle a une unique valeur d'adhérence qui est  $\mathbb{E}[f(X)]$ , alors  $x_n \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$ . Ceci montre que  $X_n$  converge en loi vers  $X$  quand  $n$  tend vers l'infini.

# Lemme de Slutsky

## Théorème

Soit  $(X_n)_n$  et  $(Y_n)_n$  deux suites de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que  $(X_n)_n$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$ . On suppose également que  $(Y_n)_n$  converge en loi vers une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, si l'on pose  $Z_n := X_n + Y_n$  et  $T_n := X_n Y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit la convergence en loi de la suite  $(Z_n)_n$  vers  $X + \lambda$  ainsi que celle de la suite  $(T_n)_n$  vers  $\lambda X$ .

# Lemme de Slutsky

## Théorème

Soit  $(X_n)_n$  et  $(Y_n)_n$  deux suites de variables aléatoires définies sur un espace  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que  $(X_n)_n$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$ . On suppose également que  $(Y_n)_n$  converge en loi vers une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, si l'on pose  $Z_n := X_n + Y_n$  et  $T_n := X_n Y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit la convergence en loi de la suite  $(Z_n)_n$  vers  $X + \lambda$  ainsi que celle de la suite  $(T_n)_n$  vers  $\lambda X$ .

Ce lemme est très utile en vue des tests du Khi-deux.

## Convergence en loi et fonction de répartition

### Théorème

On suppose que  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$ . Alors, on dispose de la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

pour tout  $x$  tel que  $F_X(x) = F_X(x^-)$ .

## Premier théorème de Lévy

Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n)_n$  et soit une variable aléatoire  $X$ . On note  $\varphi_n$  la fonction caractéristique de  $X_n$  et  $\varphi$  celle de  $X$ . Alors  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

# Convergence en loi et fonction caractéristique

## Premier théorème de Lévy

Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n)_n$  et soit une variable aléatoire  $X$ . On note  $\varphi_n$  la fonction caractéristique de  $X_n$  et  $\varphi$  celle de  $X$ . Alors  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

## Théorème

On suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{X_n}(t)$  converge vers  $\varphi(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini. On suppose que  $\varphi$  est continue en 0. Alors, il existe une variable aléatoire  $X$  dont la loi est entièrement déterminée par  $\varphi$  telle que  $\varphi_X = \varphi$  et de plus  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ .

# Convergence en loi et fonction caractéristique

## Premier théorème de Lévy

Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n)_n$  et soit une variable aléatoire  $X$ . On note  $\varphi_n$  la fonction caractéristique de  $X_n$  et  $\varphi$  celle de  $X$ . Alors  $(X_n)_n$  converge en loi vers  $X$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

## Théorème

On suppose que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{X_n}(t)$  converge vers  $\varphi(t)$  quand  $n$  tend vers l'infini. On suppose que  $\varphi$  est continue en 0. Alors, il existe une variable aléatoire  $X$  dont la loi est entièrement déterminée par  $\varphi$  telle que  $\varphi_X = \varphi$  et de plus  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ .

## Remarque

Les deux énoncés précédents sont valables pour des vecteurs aléatoires en dimension  $d$ , avec  $t \in \mathbb{R}^d$ .

## Convergence en loi et densité de probabilité

Dans le cas où  $X_n$  et  $X$  sont à densité, on peut caractériser la convergence en loi avec la densité de probabilité.

## Convergence en loi et densité de probabilité

Dans le cas où  $X_n$  et  $X$  sont à densité, on peut caractériser la convergence en loi avec la densité de probabilité.

### Théorème

Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n)_n$  et soit  $X$  une variable aléatoire. On suppose que  $X_n$  admet une densité  $f_{X_n}$  et que  $X$  admet une densité  $f_X$ . Si la suite de fonctions  $(f_{X_n})_n$  converge simplement vers  $f_X$ , alors  $X_n$  converge en loi vers  $X$  quand  $n$  tend vers l'infini.

- 1 Introduction
- 2 Convergence presque sûre
- 3 Convergence dans  $L^p$
- 4 Convergence en probabilité
- 5 Convergence en loi
- 6 Synthèse**

Dans l'exemple que l'on a donné, l'on a exhibé une convergence presque sûre. Toutefois, on n'obtient pas un tel résultat en moyenne dans la mesure où les variables aléatoires  $m_n X_n$  (qui représentent le gain au lancer  $n$ ) ne sont pas bornées uniformément. En effet,  $|m_n X_n| = |m_n| = 2^{n-1}$ .

Dans l'exemple que l'on a donné, l'on a exhibé une convergence presque sûre. Toutefois, on n'obtient pas un tel résultat en moyenne dans la mesure où les variables aléatoires  $m_n X_n$  (qui représentent le gain au lancer  $n$ ) ne sont pas bornées uniformément. En effet,  $|m_n X_n| = |m_n| = 2^{n-1}$ .

Mieux, on verra avec la loi forte des grands nombres que le gain moyen tend vers 0 presque sûrement.

Dans l'exemple que l'on a donné, l'on a exhibé une convergence presque sûre. Toutefois, on n'obtient pas un tel résultat en moyenne dans la mesure où les variables aléatoires  $m_n X_n$  (qui représentent le gain au lancer  $n$ ) ne sont pas bornées uniformément. En effet,  $|m_n X_n| = |m_n| = 2^{n-1}$ .

Mieux, on verra avec la loi forte des grands nombres que le gain moyen tend vers 0 presque sûrement. En fait, on a simplement exhibé l'existence d'une suite croissante de temps d'arrêt  $(\tau_n)_n$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que le gain au temps  $\tau_n$  soit égal à  $n$ . Toute la question est de savoir si  $\tau_n$  sera atteint avant la mort du joueur. Également, le joueur dispose-t-il d'assez de fonds pour doubler la mise à chaque fois ?

# Liens entre les convergences

# Liens entre les convergences

