Probabilités

Vecteurs aléatoires

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Vecteur aléatoire

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute application (mesurable) X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Vecteur aléatoire

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute application (mesurable) X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Soit un vecteur aléatoire X. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ donc il s'écrit sous la forme $X(\omega) = (x_1, \cdots, x_n)$. Comme x_i dépend *a priori* de $\omega \in \Omega$, on a donc $X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ où X_i est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, X_i est une variable aléatoire pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Vecteur aléatoire

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute application (mesurable) X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Soit un vecteur aléatoire X. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ donc il s'écrit sous la forme $X(\omega) = (x_1, \cdots, x_n)$. Comme x_i dépend *a priori* de $\omega \in \Omega$, on a donc $X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ où X_i est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, X_i est une variable aléatoire pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Définition

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, X_i est la i^e composante du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$.

Équivalence vecteur/composantes

Théorème

La donnée d'un vecteur aléatoire X dans $\mathbb{R}^n$ équivaut à celle de ses n composantes.

Plan

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) := \mathbb{P}\left(X \in \mathcal{B}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\}\right) .$$

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) := \mathbb{P}\left(X \in \mathcal{B}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\}\right) .$$

Définition

La loi de probabilité du vecteur aléatoire X est l'application $\mathbb{P}_X$ qui à toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ fait correspondre la probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, $\mathbb{P}\left(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\}\right)$ notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$.

C'est l'image réciproque par l'application X de la probabilité $\mathbb{P}$.

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) := \mathbb{P}(X \in \mathcal{B}) = \mathbb{P}(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\}) \ .$$

Définition

La loi de probabilité du vecteur aléatoire X est l'application $\mathbb{P}_X$ qui à toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ fait correspondre la probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, $\mathbb{P}(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\})$ notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$.

C'est l'image réciproque par l'application X de la probabilité $\mathbb{P}$.

On parle aussi de mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_\ell}(E) = \mathbb{P}_X\left(\mathbb{R}^{\ell-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-\ell}\right).$$

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_\ell}(E) = \mathbb{P}_X\left(\mathbb{R}^{\ell-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-\ell}\right).$$

Remarque

La loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur aléatoire X est appelée loi conjointe des variables aléatoires $(X_\ell)_{1\leq\ell\leq n}$ qui sont ses composantes. Quant aux lois des composantes, on les appelle les marginales.

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_\ell}(E) = \mathbb{P}_X\left(\mathbb{R}^{\ell-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-\ell}\right) .$$

Remarque

La loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur aléatoire X est appelée loi conjointe des variables aléatoires $(X_\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ qui sont ses composantes. Quant aux lois des composantes, on les appelle les marginales.

Remarque

La loi du vecteur X détermine les lois marginales. Néanmoins, la réciproque est en général fausse.

Plan

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On appelle alors fonction de répartition de X la fonction F_X de $\mathbb{R}^n$ dans $[0;1]$ définie pour tout $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ par

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On appelle alors fonction de répartition de X la fonction F_X de $\mathbb{R}^n$ dans $[0;1]$ définie pour tout $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(t_1, \cdots, t_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \cdots, X_n \leq t_n) .$$

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors F_X est croissante et continue à droite par rapport à chaque variable t_ℓ. De plus, pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors F_X est croissante et continue à droite par rapport à chaque variable t_ℓ. De plus, pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\lim_{t_\ell \to -\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_\ell, t_{\ell+1}, \cdots, t_n\right) = 0$$

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors F_X est croissante et continue à droite par rapport à chaque variable t_ℓ. De plus, pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\lim_{t_\ell \to -\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_\ell, t_{\ell+1}, \cdots, t_n\right) = 0$$

et

$$\lim_{t_1, \cdots, t_n \longrightarrow +\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_n\right) = 1\,.$$

Obtenir la fonction de répartition de chaque marginale

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors, si F_{X_ℓ} est la fonction de répartition de la composante X_ℓ, on a

Obtenir la fonction de répartition de chaque marginale

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors, si F_{X_ℓ} est la fonction de répartition de la composante X_ℓ, on a

$$F_{X_\ell}(t_\ell) = \lim_{t_1, \cdots, t_{\ell-1}, t_{\ell+1}, \cdots, t_n \to +\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_{\ell-1}, t_\ell, t_{\ell+1}, \cdots, t_n\right).$$

Obtenir la fonction de répartition de chaque marginale

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors, si F_{X_ℓ} est la fonction de répartition de la composante X_ℓ, on a

$$F_{X_\ell}(t_\ell) = \lim_{t_1,\cdots,t_{\ell-1},t_{\ell+1},\cdots,t_n\to+\infty} F_X\left(t_1,\cdots,t_{\ell-1},t_\ell,t_{\ell+1},\cdots,t_n\right).$$

Remarque

Ainsi la fonction de répartition du vecteur aléatoire X détermine celles de ses composantes. La réciproque est évidemment fausse dans le cas général.

Plan

Définition

Contrairement à la fonction de répartition dont l'intérêt est limité (bien que non nul) en dimension supérieure ou égale à deux, la fonction caractéristique est particulièrement utile.

Définition

Contrairement à la fonction de répartition dont l'intérêt est limité (bien que non nul) en dimension supérieure ou égale à deux, la fonction caractéristique est particulièrement utile.

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$. On appelle alors fonction caractéristique de X la fonction complexe φ_X de n variables réelles $(t_1, \cdots, t_n) =: t$ définie par

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle t, X\rangle\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\left(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n\right)\right)\right] .$$

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction caractéristique φ_X. Alors, on a les deux résultats suivants.

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction caractéristique φ_X. Alors, on a les deux résultats suivants.

1. φ_X est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0, \cdots, 0) = 1$.

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction caractéristique φ_X. Alors, on a les deux résultats suivants.

1. φ_X est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0, \cdots, 0) = 1$.
2. Pour toute matrice carrée et symétrique A de taille n et pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t,b\rangle}\varphi_X(tA)\,.$$

Plan

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que ce vecteur aléatoire est discret si l'ensemble de ses réalisations possibles $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que ce vecteur aléatoire est discret si l'ensemble de ses réalisations possibles $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose $S := X(\Omega)$ et on suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors :

$$\mathbb{P}_X = \sum_{s \in S} \mathbb{P}\,(X = s)\,\delta_s\,.$$

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que ce vecteur aléatoire est discret si l'ensemble de ses réalisations possibles $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose $S := X(\Omega)$ et on suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors :

$$\mathbb{P}_X = \sum_{s \in S} \mathbb{P}\,(X = s)\,\delta_s\,.$$

Ici, δ_s est une distribution multidimensionnelle.

Obtenir les lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

Obtenir les lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_\ell}(x) = \sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_\ell = x}} \mathbb{P}_X(s) \,.$$

Obtenir les lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\ell \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_\ell}(x) = \sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_\ell = x}} \mathbb{P}_X(s) \,.$$

En d'autres termes,

$$\mathbb{P}_{X_\ell} = \sum_{x \in X_\ell(\Omega)} \left(\sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_\ell = x}} \mathbb{P}_X(s) \right) \delta_x \,.$$

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X=(X_1,X_2)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ (c'est-à-dire que X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$). Soit $S:=X_1+X_2$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X=(X_1,X_2)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ (c'est-à-dire que X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$). Soit $S:=X_1+X_2$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(S=n\right)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(X_1=k,X_2=n-k\right)\,.$$

Plan

Définition - 1

Définition

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est à densité s'il existe une fonction f_X de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour toute partie $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, on ait

Définition - 1

Définition

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est à densité s'il existe une fonction f_X de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour toute partie $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{B}} f_X(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\,.$$

Définition - 2

On peut alors écrire

$$\mathbb{P}_X = f_X \mathrm{d}x \,.$$

Le $\mathrm{d}x$ sert ici à signaler que la variable est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition - 2

On peut alors écrire

$$\mathbb{P}_X = f_X \mathrm{d}x\,.$$

Le $\mathrm{d}x$ sert ici à signaler que la variable est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque

Comme dans le cas des variables aléatoires réelles, l'intégrale sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ de f_X vaut 1.

Densité des composantes

Théorème

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que X est à densité. Alors, chacune de ses composantes X_ℓ est à densité et de plus

Densité des composantes

Théorème

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que X est à densité. Alors, chacune de ses composantes X_ℓ est à densité et de plus

$$f_{X_\ell}(x) = \int_{\widetilde{x_\ell}\in\mathbb{R}^{n-1}} f_X\left(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x, x_{\ell+1}, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}\widetilde{x_\ell}\,,$$

où $\widetilde{x_\ell} := (x_1, \cdots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \cdots, x_n)$.

Exemple

Dans le cas d'un couple de variables aléatoires (X, Y), on a

$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}^2$. Soit $S := X_1 + X_2$. Alors, S est une variable aléatoire à densité. De plus, sa densité f_S satisfait :

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}^2$. Soit $S := X_1 + X_2$. Alors, S est une variable aléatoire à densité. De plus, sa densité f_S satisfait :

$$f_S(x) = \int_{u\in\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(u, x-u)\mathrm{d}u\,.$$

Plan

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_ℓ,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell \in I_\ell)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_ℓ,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell \in I_\ell)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{\ell=1}^{n} F_{X_\ell}(x_\ell)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_ℓ,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{\ell=1}^n \mathbb{P}(X_\ell \in I_\ell)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{\ell=1}^n F_{X_\ell}(x_\ell)$,
- pour tout $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{\ell=1}^n \varphi_{X_\ell}(u_\ell)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_ℓ,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{\ell=1}^n \mathbb{P}(X_\ell \in I_\ell)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{\ell=1}^n F_{X_\ell}(x_\ell)$,
- pour tout $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{\ell=1}^n \varphi_{X_\ell}(u_\ell)$,
- dans le cas discret, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$,
  $\mathbb{P}(X = (x_1, \cdots, x_n)) = \prod_{\ell=1}^n \mathbb{P}(X_\ell = x_\ell)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_ℓ} celle de la composante X_ℓ. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_ℓ,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell \in I_\ell)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{\ell=1}^{n} F_{X_\ell}(x_\ell)$,
- pour tout $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{\ell=1}^{n} \varphi_{X_\ell}(u_\ell)$,
- dans le cas discret, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$,
  $\mathbb{P}(X = (x_1, \cdots, x_n)) = \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell = x_\ell)$,
- dans le cas à densité, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$,
  $f_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{\ell=1}^{n} f_{X_\ell}(x_\ell)$.

Plan

Définition - 1

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $y \in Y(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ l'application qui à $x \in X(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(Y = y)} =: \mathbb{P}\left(X = x \mid Y = y\right) .$$

Définition - 1

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $y \in Y(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ l'application qui à $x \in X(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(Y = y)} =: \mathbb{P}\left(X = x \mid Y = y\right) .$$

Remarque

La connaissance de la loi de Y et des lois conditionnelles de X sachant $\{Y = y\}$ pour chacun des $y \in Y(\Omega)$ est suffisante pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). En particulier, on peut alors retrouver la loi de X.

Définition - 2

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $x \in X(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ l'application qui à $y \in Y(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(X = x)} =: \mathbb{P}\left(Y = y \mid X = x\right) .$$

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $x \in X(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ l'application qui à $y \in Y(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(X = x)} =: \mathbb{P}\left(Y = y \mid X = x\right) .$$

Remarque

La connaissance de la loi de X et des lois conditionnelles de Y sachant $\{X = x\}$ pour chacun des $x \in X(\Omega)$ est suffisante pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). En particulier, on peut alors retrouver la loi de Y.

Définition - 3

L'équivalent continu de ces probabilités conditionnelles est la densité conditionnelle, que l'on présente maintenant.

Définition - 3

L'équivalent continu de ces probabilités conditionnelles est la densité conditionnelle, que l'on présente maintenant.

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires à densité. Pour $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_Y(y) > 0$, on appelle densité conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ l'application $f_{X|Y=y}$qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f_{X|Y=y}(x) := \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} .$$