Probabilités

Fonctions caractéristiques

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Idée globale

L'objet du présent chapitre est de présenter la fonction caractéristique d'une variable aléatoire, ou plutôt d'une mesure de probabilité d'une variable aléatoire.

Idée globale

L'objet du présent chapitre est de présenter la fonction caractéristique d'une variable aléatoire, ou plutôt d'une mesure de probabilité d'une variable aléatoire.

Il s'agit de la transformée de Fourier d'une loi. Celle-ci est essentielle en traitement du signal car elle permet une analyse fréquentielle plutôt qu'une analyse temporelle. Dit autrement, cela consiste à appliquer une transformation pour se placer dans un nouvel espace afin d'adopter un nouveau point de vue.

Idée globale

L'objet du présent chapitre est de présenter la fonction caractéristique d'une variable aléatoire, ou plutôt d'une mesure de probabilité d'une variable aléatoire.

Il s'agit de la transformée de Fourier d'une loi. Celle-ci est essentielle en traitement du signal car elle permet une analyse fréquentielle plutôt qu'une analyse temporelle. Dit autrement, cela consiste à appliquer une transformation pour se placer dans un nouvel espace afin d'adopter un nouveau point de vue.

Dans tout ce chapitre, X est une variable aléatoire réelle. On ne présuppose pas qu'elle soit discrète ni qu'elle soit à densité.

Plan

Définition

Définition

La fonction caractéristique de la variable aléatoire X est la fonction φ_X de la variable réelle à valeurs complexes définie par

$$\varphi_X(u) := \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) .$$

Définition

Définition

La fonction caractéristique de la variable aléatoire X est la fonction φ_X de la variable réelle à valeurs complexes définie par

$$\varphi_X(u) := \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) .$$

Il s'agit en fait de la transformée de Fourier *inverse* de la distribution associée à X, $\mathbb{P}_X$. On admet l'existence de cette fonction.

Cas discret

Proposition

Si la variable aléatoire X est discrète, on peut écrire

$$\varphi_X(u) = \sum_{k \in I} e^{iux_k} \mathbb{P}\left(X = x_k\right) ,$$

où $\{x_k \, , k \in I\}$ est l'ensemble des réalisations possibles de X.

Cas discret

Proposition

Si la variable aléatoire X est discrète, on peut écrire

$$\varphi_X(u) = \sum_{k \in I} e^{iux_k} \mathbb{P}\left(X = x_k\right) \,,$$

où $\{x_k \,, k \in I\}$ est l'ensemble des réalisations possibles de X.

Il s'agit de la transformée de Fourier inverse de la distribution

$$\sum_{k \in I} \mathbb{P}\left(X = x_k\right) \delta_{x_k} \,.$$

Cas à densité

Proposition

Supposons que la variable aléatoire X admet une densité f_X. On a alors

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_X(x) \mathrm{d}x \,.$$

Cas à densité

Proposition

Supposons que la variable aléatoire X admet une densité f_X. On a alors

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_X(x) \mathrm{d}x\,.$$

Il s'agit de la transformée de Fourier inverse de la distribution régulière associée à la fonction f_X.

Plan

Continuité et bornitude

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle. On la suppose discrète ou à densité. Alors la fonction caractéristique de X, φ_X, est bornée de module inférieur à 1, continue et de plus $\varphi_X(0) = 1$.

Continuité et bornitude

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle. On la suppose discrète ou à densité. Alors la fonction caractéristique de X, φ_X, est bornée de module inférieur à 1, continue et de plus $\varphi_X(0) = 1$.

Preuve 1

Si X est à densité.

Continuité et bornitude

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle. On la suppose discrète ou à densité. Alors la fonction caractéristique de X, φ_X, est bornée de module inférieur à 1, continue et de plus $\varphi_X(0) = 1$.

Preuve 1

Si X est à densité.

Preuve 2

Si X est discrète.

Dérivabilité - 1

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments jusqu'à l'ordre m, c'est-à-dire telle que $\max_{1\leq k\leq m} \mathbb{E}\left[|X|^k\right] < \infty$. On la suppose discrète ou à densité. La fonction caractéristique associée, φ_X, est alors de classe $\mathcal{C}^m$ et de plus, pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, on a

Dérivabilité - 1

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments jusqu'à l'ordre m, c'est-à-dire telle que $\max_{1\leq k\leq m} \mathbb{E}\left[|X|^k\right] < \infty$. On la suppose discrète ou à densité. La fonction caractéristique associée, φ_X, est alors de classe $\mathcal{C}^m$ et de plus, pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\varphi_X(u) = i^k\mathbb{E}\left[X^k e^{iuX}\right] .$$

Dérivabilité - 2

Une application immédiate du Théorème est l'utilisation de la fonction caractéristique pour calculer les moments d'une variable aléatoire réelle. En effet, si les quantités suivantes ont un sens, il vient

Dérivabilité - 2

Une application immédiate du Théorème est l'utilisation de la fonction caractéristique pour calculer les moments d'une variable aléatoire réelle. En effet, si les quantités suivantes ont un sens, il vient

$$\varphi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$$

Dérivabilité - 2

Une application immédiate du Théorème est l'utilisation de la fonction caractéristique pour calculer les moments d'une variable aléatoire réelle. En effet, si les quantités suivantes ont un sens, il vient

$$\varphi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$$

ainsi que

$$\varphi_X''(0) = -\mathbb{E}[X^2]\,.$$

Dérivabilité - 2

Une application immédiate du Théorème est l'utilisation de la fonction caractéristique pour calculer les moments d'une variable aléatoire réelle. En effet, si les quantités suivantes ont un sens, il vient

$$\varphi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$$

ainsi que

$$\varphi_X''(0) = -\mathbb{E}[X^2]\,.$$

Il en découle $\mathrm{Var}(X) = -\varphi_X''(0) + (\varphi_X'(0))^2$.

Plan

Loi de Bernoulli

On suppose que X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{P}_{X_1} = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$. La fonction caractéristique associée est donc

Loi de Bernoulli

On suppose que X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{P}_{X_1} = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$. La fonction caractéristique associée est donc

$$\varphi_{X_1}(u) = \mathbb{E}[e^{iuX_1}] = (1-p)e^{iu\times 0} + pe^{iu\times 1} = (1-p) + pe^{iu}\,.$$

Loi binomiale

On suppose que X_2 suit la loi binomiale de paramètres n et p c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}_{X_2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k \, .$$

Loi binomiale

On suppose que X_2 suit la loi binomiale de paramètres n et p c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}_{X_2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k \,.$$

Le calcul de la fonction caractéristique donne donc

$$\begin{aligned}\varphi_{X_2}(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{iuk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^{iu}\right)^k (1-p)^{n-k} \\ = \left((1-p) + pe^{iu}\right)^n = \varphi_{X_2}(u) = (\varphi_{X_1}(u))^n \,.\end{aligned}$$

Loi de Poisson

On suppose que X_3 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}_{X_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \delta_n \,.$$

Loi de Poisson

On suppose que X_3 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbb{P}_{X_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \delta_n \,.$$

On peut facilement montrer :

$$\varphi_{X_3}(u) = e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)} \,.$$

Loi uniforme

Ici, X_8 est une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ ($a < b$) c'est-à-dire que l'on a

$$f_{X_8}(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}(x)\,.$$

Le calcul nous donne alors

Loi uniforme

Ici, X_8 est une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$) c'est-à-dire que l'on a

$$f_{X_8}(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}(x)\,.$$

Le calcul nous donne alors

$$\varphi_{X_8}(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{iux}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu}$$

si $u \neq 0$ et $\varphi_{X_8}(0) = 1$.

Loi uniforme

Ici, X_8 est une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ $(a<b)$ c'est-à-dire que l'on a

$$f_{X_8}(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}(x)\,.$$

Le calcul nous donne alors

$$\varphi_{X_8}(u)=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{iux}\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu}$$

si $u\neq0$ et $\varphi_{X_8}(0)=1$. En particulier, si on considère la loi uniforme sur l'intervalle $[-a;a]$ avec $a>0$, il vient

$$\varphi_{X_8}(u)=\frac{\sin(ua)}{ua}\,,$$

pour $u\neq0$.

Loi exponentielle

Ici, la variable aléatoire X_9 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. En d'autres termes, on a

$$f_{X_9}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \,.$$

On procède maintenant au calcul :

Loi exponentielle

Ici, la variable aléatoire X_9 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. En d'autres termes, on a

$$f_{X_9}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \,.$$

On procède maintenant au calcul :

$$\varphi_{X_9}(u) = \lambda \int_0^{\infty} e^{iux} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - iu} \,.$$

Loi normale centrée réduite

Ici, on se donne une variable aléatoire réelle X_{10} qui suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire que l'on a

$$f_{X_{10}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,.$$

Loi normale centrée réduite

Ici, on se donne une variable aléatoire réelle X_{10} qui suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire que l'on a

$$f_{X_{10}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Alors :

$$\varphi_{X_{10}}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} .$$

Loi normale quelconque

Soit X_{11} une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 avec $\sigma > 0$. Alors, il existe X_{10} suivant la loi normale centrée réduite telle que $X_{11} = m + \sigma X_{10}$. Il s'ensuit

Loi normale quelconque

Soit X_{11} une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 avec $\sigma > 0$. Alors, il existe X_{10} suivant la loi normale centrée réduite telle que $X_{11} = m + \sigma X_{10}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_{11}}(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(iuX_{11}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(ium + iu\sigma X_{10}\right)\right] \\
&= e^{ium}\varphi_{X_{10}}(u\sigma) \\
&= \exp\left(ium - \frac{\sigma^2}{2}u^2\right) .
\end{aligned}$$

Loi normale quelconque

Soit X_{11} une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 avec $\sigma > 0$. Alors, il existe X_{10} suivant la loi normale centrée réduite telle que $X_{11} = m + \sigma X_{10}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_{11}}(u) =& \mathbb{E}\left[\exp\left(iuX_{11}\right)\right] \\
=& \mathbb{E}\left[\exp\left(ium + iu\sigma X_{10}\right)\right] \\
=& e^{ium}\varphi_{X_{10}}(u\sigma) \\
=& \exp\left(ium - \frac{\sigma^2}{2}u^2\right) .
\end{aligned}$$

Remarque

Il est important de remarquer que la variance est au dénominateur dans le cas de la densité de probabilité mais elle est au numérateur dans le cas de la fonction caractéristique. Ceci est à rapprocher du principe d'Heisenberg.

Plan

Caractérisation de la loi

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2. On suppose que l'on a

$$\varphi_{X_1} = \varphi_{X_2} .$$

Caractérisation de la loi

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2. On suppose que l'on a

$$\varphi_{X_1} = \varphi_{X_2} .$$

Alors, les variables aléatoires réelles X_1 et X_2 suivent la même loi.

Fonction caractéristique de la somme - 1

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. On a alors

Fonction caractéristique de la somme - 1

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. On a alors

$$\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)\,,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Fonction caractéristique de la somme - 2

Rappel

Soient deux fonctions positives f et g. On note $\hat{f}$ et $\hat{g}$ les transformées de Fourier respectives de f et g. Alors, si $*$ désigne le produit de convolution, il vient $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

Fonction caractéristique de la somme - 2

Rappel

Soient deux fonctions positives f et g. On note $\hat{f}$ et $\hat{g}$ les transformées de Fourier respectives de f et g. Alors, si $*$ désigne le produit de convolution, il vient $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y. On suppose qu'elles sont indépendantes. Alors, on a

$$\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y \,.$$

Théorème d'injectivité - 1

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que sa fonction caractéristique φ_X est intégrable au sens de Lebesgue. Alors X est une variable à densité et sa densité est donnée par la formule suivante

Théorème d'injectivité - 1

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que sa fonction caractéristique φ_X est intégrable au sens de Lebesgue. Alors X est une variable à densité et sa densité est donnée par la formule suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(u) e^{-ixu} \mathrm{d}u \,.$$

Théorème d'injectivité - 1

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que sa fonction caractéristique φ_X est intégrable au sens de Lebesgue. Alors X est une variable à densité et sa densité est donnée par la formule suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(u)e^{-ixu}\mathrm{d}u\,.$$

La preuve est omise.

Théorème d'injectivité - 2

Exemple

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale centrée et réduite. Sa fonction caractéristique φ_X est intégrable au sens de Lebesgue vu que $\varphi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f_X(u)$.

Théorème d'injectivité - 2

Exemple

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi normale centrée et réduite. Sa fonction caractéristique φ_X est intégrable au sens de Lebesgue vu que $\varphi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f_X(u)$. Et comme φ_X est réelle ainsi que paire, on en déduit bien

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(u) e^{-ixu}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(u) e^{ixu}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f_X(u) e^{ixu}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi_X(x) \\
&= f_X(x)\,.
\end{aligned}$$

Théorème d'injectivité - 3

Contre-exemple

La fonction caractéristique φ_X peut ne pas être intégrable bien que X est à densité. C'est le cas de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Théorème d'injectivité - 3

Contre-exemple

La fonction caractéristique φ_X peut ne pas être intégrable bien que X est à densité. C'est le cas de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Le contre-exemple précédent nous indique donc que les hypothèses du Théorème d'injectivité sont suffisantes sans pour autant être nécessaires.

Théorème d'injectivité - 3

Contre-exemple

La fonction caractéristique φ_X peut ne pas être intégrable bien que X est à densité. C'est le cas de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Le contre-exemple précédent nous indique donc que les hypothèses du Théorème d'injectivité sont suffisantes sans pour autant être nécessaires.

En fait, on peut aller plus loin, en faisant usage de la valeur principale de Cauchy.