Probabilités

Lois de probabilités continues classiques

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Résultat très utile

Proposition

Soit un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On considère deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2. On suppose que X_1 et X_2 sont à densité et indépendantes. Alors, la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est à densité et sa densité de probabilité est le produit de convolution des densités de probabilité de X_1 et de X_2 : $f_{X_1+X_2} = f_{X_1} * f_{X_2}$.

Résultat très utile

Proposition

Soit un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On considère deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2. On suppose que X_1 et X_2 sont à densité et indépendantes. Alors, la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est à densité et sa densité de probabilité est le produit de convolution des densités de probabilité de X_1 et de X_2 : $f_{X_1+X_2} = f_{X_1} * f_{X_2}$.

Rappel

Pour rappel, si f et g sont deux fonctions dans L^1, alors la fonction $f * g$ est définie par $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$. De plus, $f * g$ est elle-même dans L^1.

Plan

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ avec $b > a$ lorsque X admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases} .$$

Densité - 1

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ avec $b > a$ lorsque X admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases} .$$

En d'autres termes,

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(t) .$$

Densité - 2

Notation

La loi uniforme sur $[a;b]$ est notée $\mathcal{U}_{[a;b]}$.

Densité - 2

Notation

La loi uniforme sur $[a; b]$ est notée $\mathcal{U}_{[a;b]}$.

Remarque

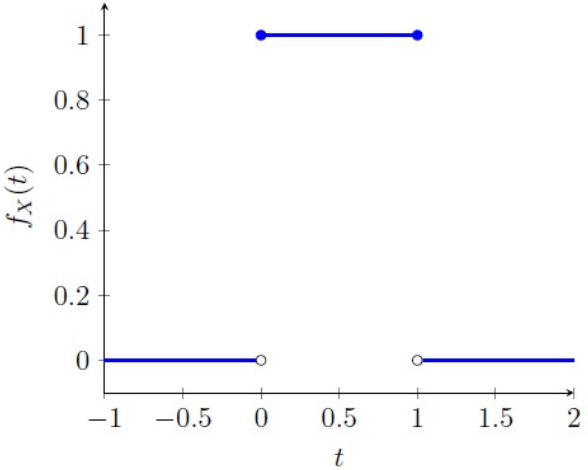
En cas d'oubli de la densité de probabilité de la loi uniforme, il suffit d'exploiter le caractère "uniforme" si bien que la densité de probabilité est constante sur l'intervalle. Puis, il suffit de diviser par la longueur de l'intervalle.

Densité - 3

Avec $a = 0$ et $b = 1$:

Densité - 3

Avec $a = 0$ et $b = 1$:

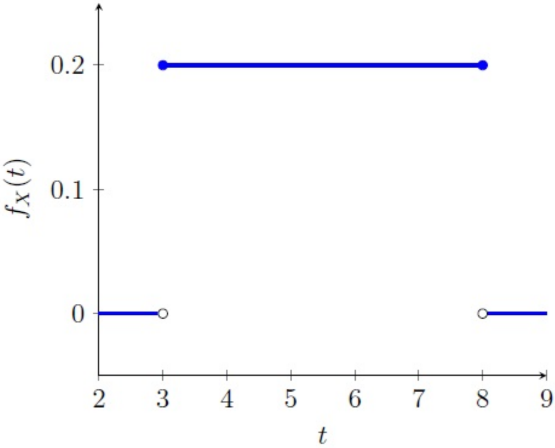


Densité - 4

Avec $a = 3$ et $b = 8$:

Densité - 4

Avec $a = 3$ et $b = 8$:



Fonction de répartition - 1

On peut maintenant calculer la fonction de répartition F_X avec $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases} .$$

Fonction de répartition - 1

On peut maintenant calculer la fonction de répartition F_X avec $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases} .$$

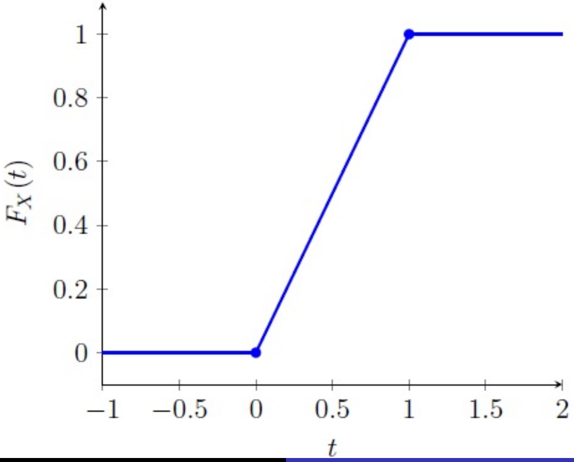
Cette fonction est continue.

Fonction de répartition - 2

Avec $a = 0$ et $b = 1$:

Fonction de répartition - 2

Avec $a = 0$ et $b = 1$:

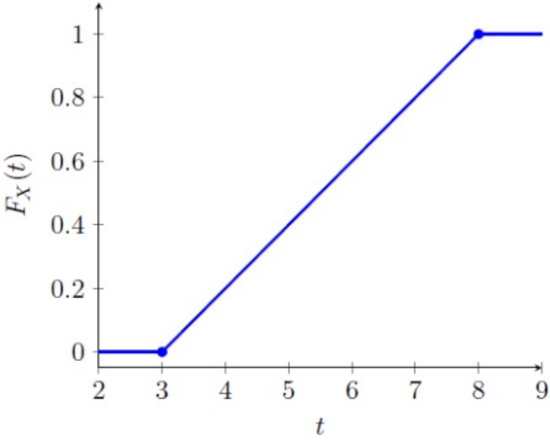


Fonction de répartition - 3

Avec $a = 3$ et $b = 8$:

Fonction de répartition - 3

Avec $a = 3$ et $b = 8$:



Moments de la loi uniforme

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{n+1}\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}\,.$$

Espérance et variance

En particulier,

Espérance et variance

En particulier,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

et

Espérance et variance

En particulier,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

et

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

Somme de lois uniformes

Il convient de noter qu'une somme de variables aléatoires indépendantes mutuellement et suivant des lois uniformes ne suit pas une loi uniforme.

Plan

Définition

Définition

Soit λ un paramètre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque X admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

Définition

Définition

Soit λ un paramètre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque X admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

Notation

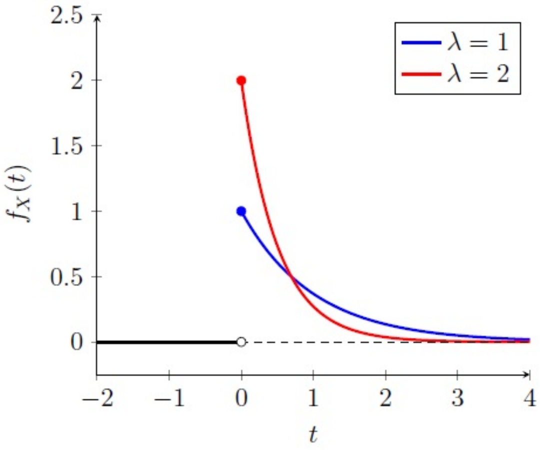
La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Courbe représentative

Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$:

Courbe représentative

Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$:



Calcul

On peut maintenant calculer la fonction de répartition F_X à partir de la formule $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds$:

$$F_X(t) = (1 - e^{-\lambda t})H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

Calcul

On peut maintenant calculer la fonction de répartition F_X à partir de la formule $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)ds$:

$$F_X(t) = (1 - e^{-\lambda t})H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

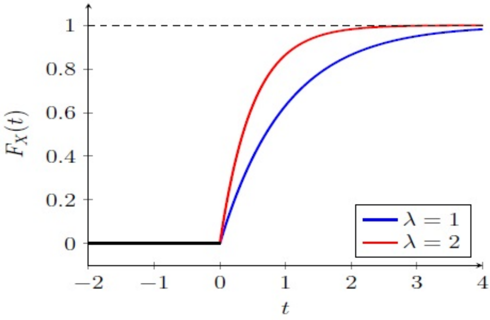
Cette fonction est continue.

Courbe représentative

Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$:

Courbe représentative

Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$:



Absence de mémoire

En particulier, on constate que pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$ d'où

$$\mathbb{P}\left(X > t + s \mid X > t\right) = \mathbb{P}(X > s)\,,$$

pour tous les réels strictement positifs t et s.

Absence de mémoire

En particulier, on constate que pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$ d'où

$$\mathbb{P}\left(X > t + s \mid X > t\right) = \mathbb{P}(X > s)\,,$$

pour tous les réels strictement positifs t et s. La réciproque est vraie : si une loi à densité est sans mémoire et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors c'est une loi exponentielle. On peut donc comparer la loi exponentielle à une loi géométrique.

Espérance

Espérance

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Espérance

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} t \times 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} t \times \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left[-(t + \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Moment d'ordre n

En procédant par récurrence, on peut prouver

Moment d'ordre n

En procédant par récurrence, on peut prouver

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}\,,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Variance

En particulier, la variance de X est égale à

Variance

En particulier, la variance de X est égale à

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Somme de lois exponentielles

Il convient de noter qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre λ ne suit pas une loi exponentielle.

Somme de lois exponentielles

Il convient de noter qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre λ ne suit pas une loi exponentielle. Elle suit ce que l'on appelle une loi d'Erlang.

Plan

Définition

Définition

Soient deux réels m et σ^2. On suppose $\sigma > 0$. On dit que la variable aléatoire réelle continue X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 lorsqu'elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Définition

Définition

Soient deux réels m et σ^2. On suppose $\sigma > 0$. On dit que la variable aléatoire réelle continue X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 lorsqu'elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Notation

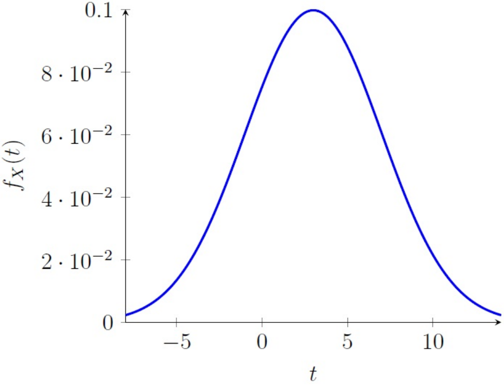
La loi normale de paramètres m et σ^2 est notée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

Courbe représentative

Pour $m = 3$ et $\sigma^2 = 16$:

Courbe représentative

Pour $m = 3$ et $\sigma^2 = 16$:



Loi normale centrée réduite - 1

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle continue X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité de probabilité la fonction

Loi normale centrée réduite - 1

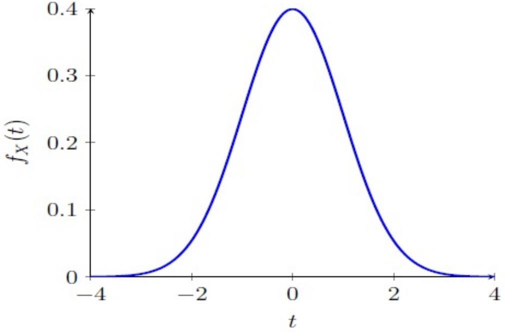
Définition

On dit que la variable aléatoire réelle continue X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, .$$

Loi normale centrée réduite - 2

Loi normale centrée réduite - 2



Calcul de la probabilité d'un intervalle

Notons que l'on ne peut pas calculer formellement la probabilité d'un intervalle. En effet, la fonction de répartition est

Calcul de la probabilité d'un intervalle

Notons que l'on ne peut pas calculer formellement la probabilité d'un intervalle. En effet, la fonction de répartition est

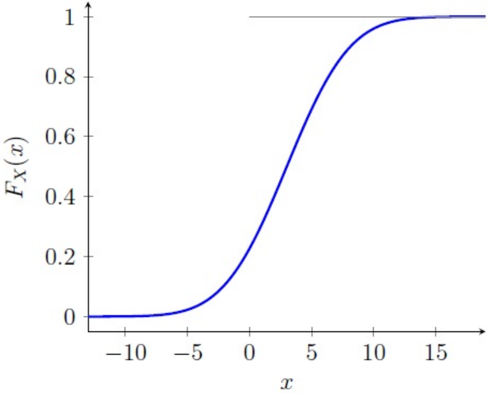
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(u-m)^2}{\sigma^2}\right\}\mathrm{d}u\,.$$

Courbe représentative de la fonction de répartition - 1

Pour $m = 3$ et $\sigma^2 = 16$:

Courbe représentative de la fonction de répartition - 1

Pour $m = 3$ et $\sigma^2 = 16$:

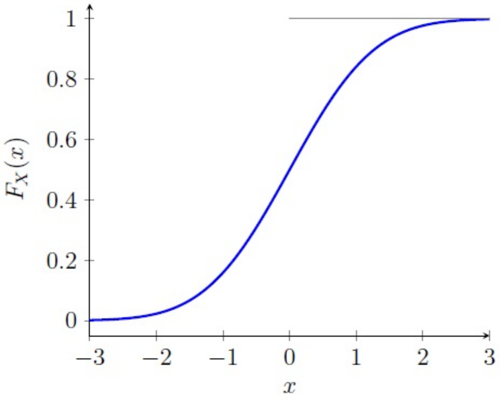


Courbe représentative de la fonction de répartition - 2

Pour $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$:

Courbe représentative de la fonction de répartition - 2

Pour $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$:



Moments impairs

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Si n est impair ($n = 2p+1$), on a

Moments impairs

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Si n est impair ($n = 2p+1$), on a

$$\mathbb{E}\left[X^{2p+1}\right] = 0\,,$$

vu que la loi normale centrée réduite est symétrique.

Moments pairs

On peut prouver par récurrence :

Moments pairs

On peut prouver par récurrence :

$$\mathbb{E}\left[X^{2p}\right] = \frac{(2p)!}{2^p p!}\,,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Moments pairs

On peut prouver par récurrence :

$$\mathbb{E}\left[X^{2p}\right] = \frac{(2p)!}{2^p p!}\,,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. En particulier, on a

$$\mathbb{E}[X] = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[X] = 1\,.$$

Cas général : espérance et variance

De manière générale, soit $m \in \mathbb{R}$ et soit $\sigma > 0$. Alors, si X est une variable aléatoire réelle suivant la loi $\mathcal{N}\left(m;\sigma^2\right)$, son espérance et sa variance sont

Cas général : espérance et variance

De manière générale, soit $m \in \mathbb{R}$ et soit $\sigma > 0$. Alors, si X est une variable aléatoire réelle suivant la loi $\mathcal{N}\left(m; \sigma^2\right)$, son espérance et sa variance sont

$$\mathbb{E}[X] = m \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[X] = \sigma^2 \,.$$

Stabilité par la somme - 1

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_n$. On suppose :

$$\mathcal{L}(X_k) = \mathcal{N}\left(m_k; \sigma_k^2\right) .$$

Soient n réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Soit un autre réel β.

Stabilité par la somme - 1

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_n$. On suppose :

$$\mathcal{L}(X_k) = \mathcal{N}\left(m_k; \sigma_k^2\right) .$$

Soient n réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Soit un autre réel β. Alors, la variable aléatoire réelle $\mathcal{X} := \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n + \beta$ suit une loi normale.

Stabilité par la somme - 1

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_n$. On suppose :

$$\mathcal{L}(X_k) = \mathcal{N}\left(m_k; \sigma_k^2\right) .$$

Soient n réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Soit un autre réel β. Alors, la variable aléatoire réelle $\mathcal{X} := \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n + \beta$ suit une loi normale. Plus exactement :

$$\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \mathcal{N}\left(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n + \beta; \alpha_1^2\sigma_1^2 + \cdots + \alpha_n^2\sigma_n^2\right) .$$

Stabilité par la somme - 2

Corollaire

Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité $\mathcal{N}\left(m; \sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. On pose $Y := \frac{X-m}{\sigma}$. Alors, la variable Y suit la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(0; 1\right)$.

Stabilité par la somme - 2

Corollaire

Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité $\mathcal{N}\left(m; \sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. On pose $Y := \frac{X-m}{\sigma}$. Alors, la variable Y suit la loi de probabilité $\mathcal{N}(0; 1)$.

Réciproquement, soit Y une variable aléatoire réelle continue qui suit la loi de probabilité $\mathcal{N}(0; 1)$. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \neq 0$. Alors, la variable aléatoire réelle continue $\sigma Y + m$ suit la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(m; \sigma^2\right)$.

Stabilité par la somme - 2

Corollaire

Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité $\mathcal{N}\left(m;\sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. On pose $Y := \frac{X-m}{\sigma}$. Alors, la variable Y suit la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(0;1\right)$.

Réciproquement, soit Y une variable aléatoire réelle continue qui suit la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(0;1\right)$. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \neq 0$. Alors, la variable aléatoire réelle continue $\sigma Y + m$ suit la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(m;\sigma^2\right)$.

Remarque

On constate en particulier que la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est bien la version centrée et réduite de toute loi normale ; ce qui est cohérent.

Stabilité par la somme - 3

Exemple

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y telles que $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2,9)$ et $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(1,4)$. Quelle est la loi de $X + 2Y + 4$? D'après le Théorème de stabilité par la somme, $\mathcal{L}(X + 2Y + 4) = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pour déterminer m et σ^2, on écrit :

Exemple

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y telles que $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2, 9)$ et $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(1, 4)$. Quelle est la loi de $X + 2Y + 4$? D'après le Théorème de stabilité par la somme, $\mathcal{L}(X + 2Y + 4) = \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Pour déterminer m et σ^2, on écrit :

$$m = \mathbb{E}(X + 2Y + 4) = \mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(Y) + 4 = 8\,,$$

Stabilité par la somme - 3

Exemple

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y telles que $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2, 9)$ et $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(1, 4)$. Quelle est la loi de $X + 2Y + 4$? D'après le Théorème de stabilité par la somme, $\mathcal{L}(X + 2Y + 4) = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pour déterminer m et σ^2, on écrit :

$$m = \mathbb{E}(X + 2Y + 4) = \mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(Y) + 4 = 8\,,$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathrm{Var}(X + 2Y + 4) = \mathrm{Var}(X + 2Y)\\ &= \mathrm{Var}(X) + 4\mathrm{Var}(Y) = 9 + 4 \times 4 = 25\,.\end{aligned}$$

Stabilité par la somme - 3

Exemple

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y telles que $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2,9)$ et $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(1,4)$. Quelle est la loi de $X + 2Y + 4$? D'après le Théorème de stabilité par la somme, $\mathcal{L}(X + 2Y + 4) = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Pour déterminer m et σ^2, on écrit :

$$m = \mathbb{E}(X + 2Y + 4) = \mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(Y) + 4 = 8\,,$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathrm{Var}(X + 2Y + 4) = \mathrm{Var}(X + 2Y)\\ &= \mathrm{Var}(X) + 4\mathrm{Var}(Y) = 9 + 4 \times 4 = 25\,.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\mathcal{L}(X + 2Y + 4) = \mathcal{N}(8, 25)$.

Probabilité d'un intervalle

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$. On cherche :

$$\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) ,$$

Probabilité d'un intervalle

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$. On cherche :

$$\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) ,$$

où $Y := \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0,1\right)$.

Probabilité d'un intervalle

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$. On cherche :

$$\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) \,,$$

où $Y := \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0,1\right)$. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Probabilité d'un intervalle

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi de probabilité $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ avec $\sigma > 0$. On cherche :

$$\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) ,$$

où $Y := \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0,1\right)$. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Alors :

$$\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) .$$

Propriétés de Φ

Proposition

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Propriétés de Φ

Proposition

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Preuve

$$\begin{aligned}\Phi(-t) &= \mathbb{P}\left(X \leq -t\right) = \mathbb{P}\left(-X \geq t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq t\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq t\right) = 1 - \Phi(t)\,.\end{aligned}$$

Propriétés de Φ

Proposition

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Proposition

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Preuve

$$\begin{aligned}\Phi(-t) &= \mathbb{P}\left(X \leq -t\right) = \mathbb{P}\left(-X \geq t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq t\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq t\right) = 1 - \Phi(t)\,.\end{aligned}$$

Lecture des tables

Or, un calcul approché nous donne

$$\Phi(3) = 0.99865\,,$$

à la cinquième décimale près.

Lecture des tables

Or, un calcul approché nous donne

$$\Phi(3) = 0.99865\,,$$

à la cinquième décimale près. Ainsi, on se donne les valeurs approchées de $\Phi(t)$ pour t allant de 0 à 2.99. La cellule correspondant à la colonne 0.06 et à la ligne 1.5 est ainsi la valeur approchée de $\Phi(1.56)$.

Exemple - 1

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi $\mathcal{N}(5; 4)$. Calculons $\mathbb{P}(1 < X < 7)$. On considère d'abord $Y = \frac{X-5}{2}$. Alors $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(0; 1)$ puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < X < 7) = \mathbb{P}(-2 < Y < 1) &= \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 .\end{aligned}$$

Or, d'après la table, $\Phi(1) \approx 0.8413$ et $\Phi(2) \approx 0.9772$ d'où $\mathbb{P}(1 < X < 7) \approx 0.8185$.

Exemple - 2

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi $\mathcal{N}(5; 256)$. Calculons $\mathbb{P}(1 < X < 7)$. On considère d'abord $Y = \frac{X-5}{16}$. Alors $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(0; 1)$ puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < X < 7) &= \mathbb{P}(-0.25 < Y < 0.125) \\ &= \Phi(0.125) - \Phi(-0.25) = \Phi(0.125) + \Phi(0.25) - 1\,.\end{aligned}$$

On connaît $\Phi(0.25) \approx 0.5987$ et

Exemple - 2

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X suivant la loi $\mathcal{N}(5; 256)$. Calculons $\mathbb{P}(1 < X < 7)$. On considère d'abord $Y = \frac{X-5}{16}$. Alors $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(0; 1)$ puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < X < 7) &= \mathbb{P}(-0.25 < Y < 0.125) \\ &= \Phi(0.125) - \Phi(-0.25) = \Phi(0.125) + \Phi(0.25) - 1\,.\end{aligned}$$

On connaît $\Phi(0.25) \approx 0.5987$ et on approxime $\Phi(0.125)$:

$$\begin{aligned}\Phi(0.125) &= \Phi\left(\frac{1}{2} \times 0.12 + \frac{1}{2} \times 0.13\right) \\ &\approx \frac{\Phi(0.12) + \Phi(0.13)}{2} \approx \frac{0.5478 + 0.5517}{2} = 0.5498\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(1 < X < 7) \approx 0.1485$.