Probabilités

Lois de probabilités discrètes

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Résultat très utile - 1

Proposition

Soit un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On considère deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2. On suppose que X_1 et X_2 sont discrètes et indépendantes. Alors, la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est discrète et sa loi de probabilité est le produit de convolution des lois de probabilité de X_1 et de X_2 :
$\mathbb{P}_{X_1+X_2} = \mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2}$.

Résultat très utile - 2

Rappel

Pour tous les réels a et b, on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ où δ_x est la distribution de Dirac en x.

Résultat très utile - 2

Rappel

Pour tous les réels a et b, on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ où δ_x est la distribution de Dirac en x.

Rappel

Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition.

Résultat très utile - 2

Rappel

Pour tous les réels a et b, on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ où δ_x est la distribution de Dirac en x.

Rappel

Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition.

Exemple

On peut ainsi écrire :

$$\left(\frac{1}{4}\delta_0 + \frac{3}{4}\delta_1\right) * \left(\frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1\right) = \frac{1}{12}\delta_0 + \frac{5}{12}\delta_1 + \frac{6}{12}\delta_2\,.$$

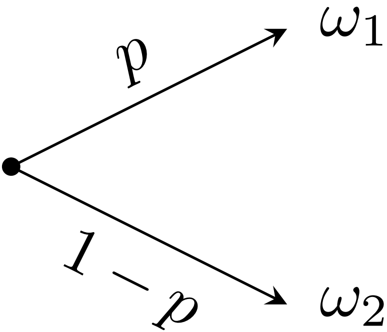
Plan

Loi de Bernoulli - 1

Soit une expérience aléatoire e à deux résultats possibles ω_1 et ω_2, de probabilités respectives $\mathbb{P}(\omega_1) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.

Loi de Bernoulli - 1

Soit une expérience aléatoire e à deux résultats possibles ω_1 et ω_2, de probabilités respectives $\mathbb{P}(\omega_1) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.



Loi de Bernoulli - 2

L'espace fondamental est donc $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit la variable aléatoire réelle X comme suit :

$$X(\omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad X(\omega_2) = 0\,.$$

Loi de Bernoulli - 2

L'espace fondamental est donc $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit la variable aléatoire réelle X comme suit :

$$X(\omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad X(\omega_2) = 0\,.$$

En d'autres termes, X est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $\{\omega_1\}$. L'ensemble des réalisations de la variable aléatoire réelle X est $X(\Omega) = \{0, 1\}$. La loi de probabilité de X est ici $\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$

Loi de Bernoulli - 2

L'espace fondamental est donc $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit la variable aléatoire réelle X comme suit :

$$X(\omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad X(\omega_2) = 0\,.$$

En d'autres termes, X est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $\{\omega_1\}$. L'ensemble des réalisations de la variable aléatoire réelle X est $X(\Omega) = \{0, 1\}$. La loi de probabilité de X est ici $\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ ce qui donne le tableau :

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1-p$	p

Loi de Bernoulli - 3

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si sa loi de probabilité correspond au Tableau précédent.

Loi de Bernoulli - 3

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si sa loi de probabilité correspond au Tableau précédent.

Notation

La loi de Bernoulli de paramètre p est notée $\mathcal{B}(p)$.

Loi de Bernoulli - 4

Le calcul des moments d'une variable aléatoire réelle suivant $\mathcal{B}(p)$ donne

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a également

Loi de Bernoulli - 4

Le calcul des moments d'une variable aléatoire réelle suivant $\mathcal{B}(p)$ donne

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a également

$$\mathrm{Var}[X] = p(1-p)\,.$$

Loi de Bernoulli - 4

Le calcul des moments d'une variable aléatoire réelle suivant $\mathcal{B}(p)$ donne

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a également

$$\mathrm{Var}[X] = p(1-p)\,.$$

Remarque

L'univers Ω n'est pas nécessairement dénombrable. Il suffit pour s'en convaincre de considérer $\Omega := [0;1]$ et $A := [0;p]$. On considère la probabilité sur $[0;1]$ qui correspond à la "mesure de Haar". En d'autres termes, la probabilité d'un intervalle est la longueur de celui-ci. Alors, la variable aléatoire $X := \mathbb{1}_A$ prend deux valeurs : 0 et 1. Et, $\mathbb{P}(X=1) = p$ bien que Ω ne soit pas dénombrable. Ainsi, $\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$.

Plan

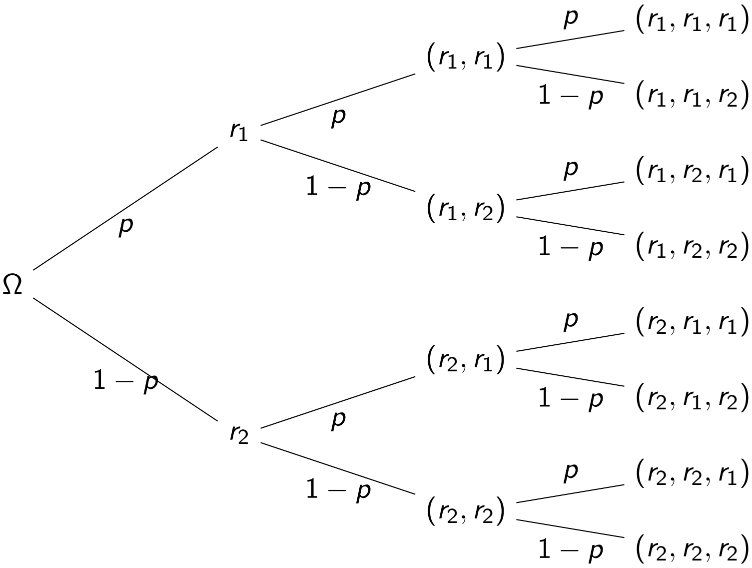
Problème

Exemple

Dans un atelier, fonctionnent de façon indépendante trois machines. La probabilité de panne en une journée d'une de ces machines est 10%. Quelle est la probabilité pour qu'en une journée deux machines exactement tombent en panne ?

Espace fondamental

Espace fondamental



Réponse

Réponse à la question

La probabilité que deux machines tombent en panne est égale à $3p^2(1-p)$ avec $p = 10\%$. Ainsi, cette probabilité est égale à 2.7%.

Définition de la loi binomiale

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

Définition de la loi binomiale

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

On peut observer que l'on a bien une probabilité. En effet, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1\,.$$

Définition de la loi binomiale

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

On peut observer que l'on a bien une probabilité. En effet, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1\,.$$

Notation

La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Décomposition de X - 1

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_n ,$$

où les variables aléatoires réelles X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et sont mutuellement indépendantes.

Décomposition de X - 1

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_n \,,$$

où les variables aléatoires réelles X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et sont mutuellement indépendantes.

En effet, l'idée fondamentale de la loi binomiale est de répéter *indépendamment* des expériences de Bernoulli de même paramètre p.

Décomposition de X - 2

Remarque

En particulier, on remarque :

$$\mathbb{P}_X = \underbrace{((1-p)\delta_0 + p\delta_1) * \cdots * ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)}_{n \text{ fois}} .$$

Décomposition de X - 2

Remarque

En particulier, on remarque :

$$\mathbb{P}_X = \underbrace{((1-p)\delta_0 + p\delta_1) * \cdots * ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)}_{n \text{ fois}} .$$

Remarque

On peut alors écrire $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$.

Espérance

Espérance

La linéarité de l'espérance nous donne

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times p\,.$$

Variance

Variance

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \mathrm{Var}[X_n] = n \times p(1-p)\,.$$

Somme de lois binomiales - 1

Théorème

Soient r variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_r$. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq r$, la variable aléatoire réelle X_i suit la loi $\mathcal{B}(n_i, p)$. Alors, la variable aléatoire réelle $X := X_1 + \cdots + X_r$ suit la loi binomiale de paramètres $n := \sum_{i=1}^r n_i$ et p, $\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^r n_i, p\right)$.

Somme de lois binomiales - 1

Théorème

Soient r variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_r$. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq r$, la variable aléatoire réelle X_i suit la loi $\mathcal{B}(n_i, p)$. Alors, la variable aléatoire réelle $X := X_1 + \cdots + X_r$ suit la loi binomiale de paramètres $n := \sum_{i=1}^r n_i$ et p, $\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^r n_i, p\right)$. En d'autres termes :

$$\mathcal{L}(X_1 + \cdots + X_r) = \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_r, p) .$$

Somme de lois binomiales - 2

Corollaire

Soit X de loi $\mathcal{B}(m, p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Somme de lois binomiales - 2

Corollaire

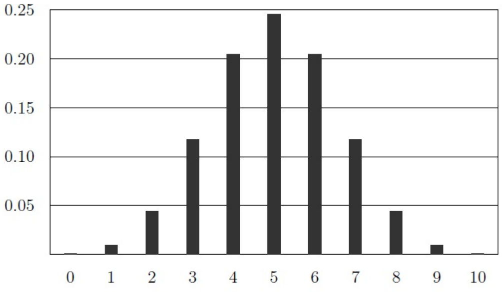
Soit X de loi $\mathcal{B}(m, p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Remarque

Si X_1 suit une loi binomiale de paramètres n_1 et p_1 et si X_2 en suit une de paramètres n_2 et p_2 et si de plus X_1 et X_2 sont indépendantes, alors on connaît la loi de $X_1 + X_2$ bien que ça ne soit pas une loi binomiale.

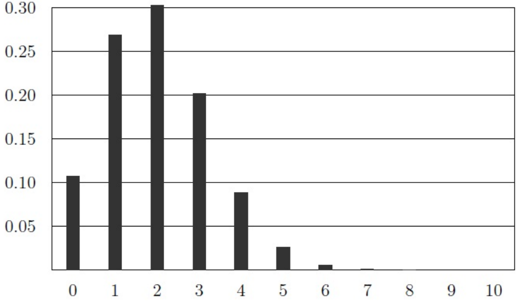
Cas symétrique

Cas symétrique



Cas asymétrique

Cas asymétrique



Tables - 1

Les valeurs

$$p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

sont tabulées pour $p = 0.05$, $p = 0.1$, $p = 0.2$, $p = 0.3$, $p = 0.4$ et $p = 0.5$ et pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ et $n = 50$.

Tables - 1

Les valeurs

$$p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

sont tabulées pour $p = 0.05$, $p = 0.1$, $p = 0.2$, $p = 0.3$, $p = 0.4$ et $p = 0.5$ et pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ et $n = 50$. Les valeurs

$$\sum_{i=0}^{k} p_i = \mathbb{P}\left(X \leq k\right) = F_X(k)$$

sont également tabulées.

Tables - 2

Si $p > 0.5$, on utilise le résultat suivant.

Tables - 2

Si $p > 0.5$, on utilise le résultat suivant.

Proposition

Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathcal{L}(n - X) = \mathcal{B}(n, 1 - p)$.

Tables - 2

Si $p > 0.5$, on utilise le résultat suivant.

Proposition

Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathcal{L}(n - X) = \mathcal{B}(n, 1 - p)$.

On peut donc utiliser les tables.

Tables - 3

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.9)$. Quelle est la probabilité que X soit égale à 30 ?

Tables - 3

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.9)$. Quelle est la probabilité que X soit égale à 30 ?

Soit $Y := 40 - X$. Alors $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(40, 0.1)$. On peut ainsi calculer

$$\mathbb{P}(X = 30) = \mathbb{P}(40 - Y = 30) = \mathbb{P}(Y = 10) = 0.0036\,,$$

d'après les tables.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

1. Si np est petit (typiquement, $np \leq 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de paramètre np, $\mathcal{P}(np)$.

Convergences en loi

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

1. Si np est petit (typiquement, $np \leq 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de paramètre np, $\mathcal{P}(np)$.
2. Si np et $n(1-p)$ sont grands (en pratique, $np > 16$ et $n(1-p) > 16$), on approche la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

1. Si np est petit (typiquement, $np \leq 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson de paramètre np, $\mathcal{P}(np)$.
2. Si np et $n(1-p)$ sont grands (en pratique, $np > 16$ et $n(1-p) > 16$), on approche la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$.

   Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}\left(n,p\right)$. Alors, on a $\mathbb{P}\left(X=k\right) \approx \Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(k-\frac{1}{2}\right)$ où la fonction Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}\left(np; np(1-p)\right)$.

Plan

Définition - 1

Définition

Soit λ un paramètre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque l'ensemble des réalisations de X est l'ensemble des entiers ; $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et lorsque l'on a de plus

$$\mathbb{P}\left[X = n\right] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\,.$$

Définition - 1

Définition

Soit λ un paramètre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque l'ensemble des réalisations de X est l'ensemble des entiers ; $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et lorsque l'on a de plus

$$\mathbb{P}\left[X = n\right] = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\,.$$

En d'autres termes, $\mathbb{P}_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\delta_n$.

Définition - 2

Notation

La loi de Poisson est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

Définition - 2

Notation

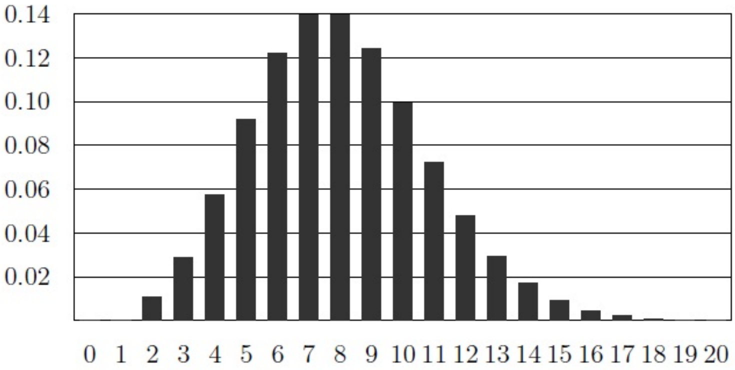
La loi de Poisson est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple

Sous certaines hypothèses, la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation le nombre d'arrivées dans une file d'attente durant un intervalle de temps d'une heure suit une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est le nombre moyen d'arrivées par heure.

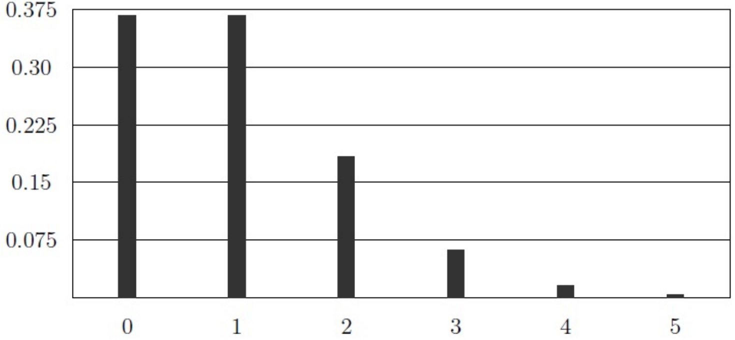
Avec $\lambda = 8$

Avec $\lambda = 8$



Avec $\lambda = 1$

Avec $\lambda = 1$



Espérance et variance

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

et

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

et

$$\mathrm{Var}[X] = \lambda\,.$$

Somme de lois de Poisson - 1

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ telles que la variable aléatoire réelle X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. Alors, la variable aléatoire réelle $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. En d'autres termes :

$$\mathcal{L}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) = \mathcal{P}\left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n\right) .$$

Somme de lois de Poisson - 2

Remarque

En particulier, on peut noter : $\mathbb{E}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ d'après la linéarité de l'espérance.

Somme de lois de Poisson - 2

Remarque

En particulier, on peut noter : $\mathbb{E}\left[X_1+\cdots+X_n\right]=\sum_{i=1}^n\lambda_i$ d'après la linéarité de l'espérance.

Exercice

En utilisant les distributions et le produit de convolution, donner une preuve du Théorème

Tables pour λ petit

Les valeurs $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{i=0}^{k} p_i$ sont tabulées pour $\lambda \in \{0.1, \cdots, 0.9, 1, \cdots, 16\}$.

Approximations pour λ grand

En pratique, pour $\lambda > 16$, on approche la loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$, par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Approximations pour λ grand

En pratique, pour $\lambda > 16$, on approche la loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$, par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors, $\mathbb{P}(X = n) \approx \Phi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \Phi\left(n - \frac{1}{2}\right)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\lambda; \lambda)$.