Probabilités

Variables aléatoires réelles discrètes (Partie 2)

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Exemple introductif

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles dont les lois de probabilité sont les suivantes :

$$\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$$

et

$$\mathbb{P}_{X_2} = \frac{99}{100}\delta_1 + \frac{1}{100}\delta_{-99}\,.$$

Exemple introductif

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles dont les lois de probabilité sont les suivantes :

$$\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$$

et

$$\mathbb{P}_{X_2} = \frac{99}{100}\delta_1 + \frac{1}{100}\delta_{-99}\,.$$

Elles ont la même espérance. En effet :

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

et

$$\mathbb{E}[X_2] = \frac{99}{100} \times 1 + \frac{1}{100} \times (-99) = \frac{1}{100}(99-99) = 0 = \mathbb{E}[X_1]\,.$$

Exemple introductif

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles dont les lois de probabilité sont les suivantes :

$$\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$$

et

$$\mathbb{P}_{X_2} = \frac{99}{100}\delta_1 + \frac{1}{100}\delta_{-99}\,.$$

Elles ont la même espérance. En effet :

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

et

$$\mathbb{E}[X_2] = \frac{99}{100} \times 1 + \frac{1}{100} \times (-99) = \frac{1}{100}(99-99) = 0 = \mathbb{E}[X_1]\,.$$

Mais, la seconde est plus dispersée. On mesure cette dispersion avec la variance et l'écart-type.

Plan

Variance

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, la variance de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma^2(X) = \mathrm{Var}\,(X) := \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\}\,.$$

Variance

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, la variance de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma^2(X) = \mathrm{Var}\,(X) := \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\}\,.$$

D'après la positivité de l'espérance d'une variable aléatoire réelle positive, on en déduit que $\mathrm{Var}(X)$ est positive dès qu'elle est définie. En fait, cette quantité est toujours définie mais elle peut éventuellement être égale à $+\infty$. Si elle est finie, on dit que la variance de X est finie.

Écart-type

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, l'écart-type de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\}}\,.$$

Exemple

La variance et l'écart-type sont des indicateurs de la dispersion de la loi de X autour de son espérance. Reprenons les deux variables aléatoires réelles mentionnées plus haut :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_2 = -1\right) = \frac{1}{2} \\ \text{et} \quad & \mathbb{P}\left(X_2 = -99\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_2 = 1\right) = \frac{1}{100}\,. \end{aligned}$$

Exemple

La variance et l'écart-type sont des indicateurs de la dispersion de la loi de X autour de son espérance. Reprenons les deux variables aléatoires réelles mentionnées plus haut :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = -1) = \frac{1}{2}$$
$$\text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = -99) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{100}\,.$$

On a $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$. Calculons maintenant les variances des deux variables aléatoires réelles :

$$\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{2}(1-0)^2 + \frac{1}{2}(-1-0)^2 = 1$$
$$\text{et} \quad \mathrm{Var}(X_2) = \frac{1}{100}(-99-0)^2 + \frac{99}{100}(1-0)^2 = 99\,.$$

On observe bien que la variable aléatoire réelle X_2 est plus dispersée que la variable aléatoire réelle X_1.

Autre écriture de la variance

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, $\mathbb{E}[X^2]$ est finie et de plus

Autre écriture de la variance

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, $\mathbb{E}[X^2]$ est finie et de plus

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Plan

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{t^2}\,.$$

Autre présentation de l'inégalité

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $s > 0$, on a l'inégalité

Autre présentation de l'inégalité

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $s > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq s\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}\right) \leq \frac{1}{s^2}\,.$$

Application - 1

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ($\mathbb{E}[X] = m$) ainsi qu'une variance finie ($\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ avec $\sigma > 0$). Alors, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma\right) \geq \frac{3}{4}\,.$$

Application - 1

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ($\mathbb{E}[X] = m$) ainsi qu'une variance finie ($\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ avec $\sigma > 0$). Alors, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma\right) \geq \frac{3}{4}\,.$$

De même :

$$\mathbb{P}\left(m - 4\sigma < X < m + 4\sigma\right) \geq \frac{15}{16}\,.$$

Application - 2

Exercice

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ($\mathbb{E}[X] = m$) ainsi qu'une variance finie ($\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ avec $\sigma > 0$). Soit $\delta > 0$. Trouver un réel positif t_δ tel que l'on ait

$$\mathbb{P}\left(m - t_\delta\sigma < X < m + t_\delta\sigma\right) \geq 1 - \delta\,.$$

Application - 2

Exercice

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ($\mathbb{E}[X] = m$) ainsi qu'une variance finie ($\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ avec $\sigma > 0$). Soit $\delta > 0$. Trouver un réel positif t_δ tel que l'on ait

$$\mathbb{P}\left(m - t_\delta \sigma < X < m + t_\delta \sigma\right) \geq 1 - \delta\,.$$

Remarque

La constante t_δ que l'on obtient ici n'est pas nécessairement optimale.

Plan

Variance d'une constante

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toujours la même réalisation a : $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Alors, on a

$$\mathrm{Var}(X) = 0\,.$$

En effet, $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[a^2] = a^2$ et $\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[a]^2 = a^2$. Ainsi, la variance d'une variable aléatoire réelle qui a toujours la même réalisation est égale à 0. En d'autres termes :

Variance d'une constante

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toujours la même réalisation a : $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Alors, on a

$$\mathrm{Var}(X) = 0\,.$$

En effet, $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[a^2] = a^2$ et $\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[a]^2 = a^2$. Ainsi, la variance d'une variable aléatoire réelle qui a toujours la même réalisation est égale à 0. En d'autres termes :

$$\forall a \in \mathbb{R}\,, \text{on a} : \mathrm{Var}(a) = 0\,.$$

Variance d'une constante

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toujours la même réalisation a : $\mathbb{P}\left(X=a\right)=1$. Alors, on a

$$\mathrm{Var}(X)=0\,.$$

En effet, $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[a^2]=a^2$ et $\mathbb{E}[X]^2=\mathbb{E}[a]^2=a^2$. Ainsi, la variance d'une variable aléatoire réelle qui a toujours la même réalisation est égale à 0. En d'autres termes :

$$\forall a\in\mathbb{R}\,,\text{on a : }\mathrm{Var}(a)=0\,.$$

Remarque

Il est assez normal de constater qu'une variable aléatoire constante est sans dispersion.

Calcul de $\mathrm{Var}[aX]$ avec $a \in \mathbb{R}$

En utilisant les diverses hypothèses sur l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[aX] &= \mathbb{E}\left[(aX - \mathbb{E}[aX])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(aX - a\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[a^2\,(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\mathrm{Var}[X]\,.
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathrm{Var}[aX]$ avec $a \in \mathbb{R}$

En utilisant les diverses hypothèses sur l'espérance, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[aX] &= \mathbb{E}\left[(aX - \mathbb{E}[aX])^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(aX - a\mathbb{E}[X])^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[a^2\,(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\ &= a^2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\ &= a^2\mathrm{Var}[X]\,.\end{aligned}$$

Ainsi, la variance de aX est égale à a^2 fois la variance de X :

$$\mathrm{Var}[aX] = a^2\mathrm{Var}[X]\,.$$

Calcul de $\mathrm{Var}[aX]$ avec $a \in \mathbb{R}$

En utilisant les diverses hypothèses sur l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[aX] &= \mathbb{E}\left[(aX - \mathbb{E}[aX])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(aX - a\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[a^2\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^2\right] \\
&= a^2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\mathrm{Var}[X]\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, la variance de aX est égale à a^2 fois la variance de X :

$$\mathrm{Var}[aX] = a^2\mathrm{Var}[X]\,.$$

Donc, l'écart-type de aX est égal à $|a|$ fois l'écart-type de X :

$$\sqrt{\mathrm{Var}[aX]} = |a|\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,.$$

Variance de la somme

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, on a :

Variance de la somme

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, on a :

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)\right]\,.$$

Variance de la somme

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, on a :

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)\right]\,.$$

Exercice

Prouver l'Égalité.

Variance de la somme

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, on a :

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)\right] .$$

Exercice

Prouver l'Égalité.

Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire. En effet, un terme supplémentaire intervient dans la somme.

Covariance

Définition

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On appelle covariance de X et Y, et l'on note $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$ la quantité

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right] .$$

Covariance

Définition

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On appelle covariance de X et Y, et l'on note $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$ la quantité

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right] .$$

Remarque

On peut observer : $\mathrm{Cov}\left(X, X\right) = \mathrm{Var}[X]$ et

$$\mathrm{Var}\left[X + Y\right] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) .$$

Variance de la somme de variables indépendantes

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que les n variables aléatoires réelles admettent une espérance et une variance finie. On suppose également qu'elles sont indépendantes deux à deux. Alors, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances :

Variance de la somme de variables indépendantes

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que les n variables aléatoires réelles admettent une espérance et une variance finie. On suppose également qu'elles sont indépendantes deux à deux. Alors, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances :

$$\mathrm{Var}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \mathrm{Var}[X_n]\,.$$

Variance d'une translatée

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a

Variance d'une translatée

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\mathrm{Var}\left[X + a\right] = \mathrm{Var}[X]\,.$$

Plan

Variable aléatoire réelle réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est réduite lorsque sa variance est égale à 1. Ainsi, réduire une variable aléatoire réelle consiste à la diviser par son écart-type.

Variable aléatoire réelle réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est réduite lorsque sa variance est égale à 1. Ainsi, réduire une variable aléatoire réelle consiste à la diviser par son écart-type.

Ainsi, une variable aléatoire réelle X est dite centrée, réduite si l'on a $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{Var}[X] = 1$. Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X a une espérance et admet une variance finie. Alors, la variable aléatoire réelle $Y := \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}$ est centrée et réduite.

Variable aléatoire réelle réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est réduite lorsque sa variance est égale à 1. Ainsi, réduire une variable aléatoire réelle consiste à la diviser par son écart-type.

Ainsi, une variable aléatoire réelle X est dite centrée, réduite si l'on a $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{Var}[X] = 1$. Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X a une espérance et admet une variance finie. Alors, la variable aléatoire réelle $Y := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}$ est centrée et réduite.

Exercice

Montrer que Y est bien centrée et réduite.

Variable aléatoire réelle réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est réduite lorsque sa variance est égale à 1. Ainsi, réduire une variable aléatoire réelle consiste à la diviser par son écart-type.

Ainsi, une variable aléatoire réelle X est dite centrée, réduite si l'on a $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{Var}[X] = 1$. Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X a une espérance et admet une variance finie. Alors, la variable aléatoire réelle $Y := \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}$ est centrée et réduite.

Exercice

Montrer que Y est bien centrée et réduite.

Remarque

Centrer et réduire est crucial pour l'obtention d'intervalles de confiance.