Probabilités

Variables aléatoires réelles discrètes (Partie 1)

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Caractérisation de la loi

On suppose l'ensemble des réalisations $X(\Omega)$ fini ou infini dénombrable. En d'autres termes, on suppose que l'on a $X(\Omega) = \{x_i \,:\, i \in I\}$ où I est un ensemble au plus dénombrable d'indices.

Caractérisation de la loi

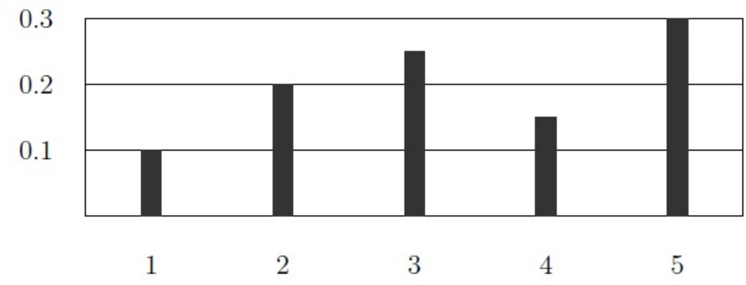
On suppose l'ensemble des réalisations $X(\Omega)$ fini ou infini dénombrable. En d'autres termes, on suppose que l'on a $X(\Omega) = \{x_i \, : \, i \in I\}$ où I est un ensemble au plus dénombrable d'indices.

Théorème

La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est caractérisée par la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$. En d'autres termes, pour toute partie S de $\mathbb{R}$, on peut calculer $\mathbb{P}(X \in S)$ si l'on connaît les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in I$.

Diagramme en bâtons

Diagramme en bâtons



Distributions

On peut aussi écrire :

$$\mathbb{P}_X = 0.1\delta_1 + 0.2\delta_2 + 0.25\delta_3 + 0.15\delta_4 + 0.3\delta_5 \,.$$

Distributions

On peut aussi écrire :

$$\mathbb{P}_X = 0.1\delta_1 + 0.2\delta_2 + 0.25\delta_3 + 0.15\delta_4 + 0.3\delta_5 \,.$$

On reprend ici une écriture de type distribution.

Probabilité d'un intervalle - 1

Soit $J \subset I$ l'ensemble des indices i tels que $x_i \in \mathcal{K}$. On a alors

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{K}) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \,.$$

Probabilité d'un intervalle - 1

Soit $J \subset I$ l'ensemble des indices i tels que $x_i \in \mathcal{K}$. On a alors

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{K}) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) .$$

On connaît ainsi $\mathbb{P}(X \in \mathcal{K})$.

Probabilité d'un intervalle - 2

Théorème

Si $\mathcal{K} =]a; b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(X \in]a; b]\right) = \mathbb{P}\left(a < X \leq b\right) = F_X(b) - F_X(a)\,.$$

Probabilité d'un intervalle - 2

Théorème

Si $\mathcal{K} =]a;b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(X \in]a;b]\right) = \mathbb{P}\left(a < X \leq b\right) = F_X(b) - F_X(a)\,.$$

Il est crucial d'être précautionneux avec les **bornes** des intervalles que l'on manipule.

Plan

Exemple introductif - 1

Exemple

On se donne un jeu de hasard tel qu'à chaque partie, on ait la probabilité

- 0.2 de perdre deux euros,
- 0.3 de perdre un euro,
- 0.1 de ne rien perdre ni gagner,
- 0.2 de gagner un euro,
- 0.2 de gagner deux euros.

Exemple introductif - 1

Exemple

On se donne un jeu de hasard tel qu'à chaque partie, on ait la probabilité

- 0.2 de perdre deux euros,
- 0.3 de perdre un euro,
- 0.1 de ne rien perdre ni gagner,
- 0.2 de gagner un euro,
- 0.2 de gagner deux euros.

Quel est le gain moyen par partie ? (On parle aussi d'espérance mathématique).

Exemple introductif - 2

Supposons que l'on joue un grand nombre N de parties. On note N_{-2} le nombre de parties où l'on a perdu 2 euros, N_{-1} le nombre de parties où l'on a perdu 1 euro, N_0 le nombre de parties où l'on n'a ni perdu ni gagné. On note également N_1 le nombre de parties où l'on a gagné 1 euro et N_2 le nombre de parties où l'on a gagné 2 euros.

Exemple introductif - 2

Supposons que l'on joue un grand nombre N de parties. On note N_{-2} le nombre de parties où l'on a perdu 2 euros, N_{-1} le nombre de parties où l'on a perdu 1 euro, N_0 le nombre de parties où l'on n'a ni perdu ni gagné. On note également N_1 le nombre de parties où l'on a gagné 1 euro et N_2 le nombre de parties où l'on a gagné 2 euros. Par définition, on a

$$N_{-2} + N_{-1} + N_0 + N_1 + N_2 = N\,.$$

Exemple introductif - 3

Et, la somme totale que l'on a gagnée au bout des N parties est

$$S_N := (-2) \times N_{-2} + (-1) \times N_{-1} + 0 \times N_0 + 1 \times N_1 + 2 \times N_2 \,.$$

Exemple introductif - 3

Et, la somme totale que l'on a gagnée au bout des N parties est

$$S_N := (-2) \times N_{-2} + (-1) \times N_{-1} + 0 \times N_0 + 1 \times N_1 + 2 \times N_2 \,.$$

Ainsi, en moyenne, la somme que l'on a gagnée à chaque partie est

$$m_N := \frac{S_N}{N} = (-2) \times \frac{N_{-2}}{N} + (-1) \times \frac{N_{-1}}{N} + 0 \times \frac{N_0}{N} + 1 \times \frac{N_1}{N} + 2 \times \frac{N_2}{N} \,.$$

Exemple introductif - 3

Et, la somme totale que l'on a gagnée au bout des N parties est

$$S_N := (-2) \times N_{-2} + (-1) \times N_{-1} + 0 \times N_0 + 1 \times N_1 + 2 \times N_2 \, .$$

Ainsi, en moyenne, la somme que l'on a gagnée à chaque partie est

$$m_N := \frac{S_N}{N} = (-2) \times \frac{N_{-2}}{N} + (-1) \times \frac{N_{-1}}{N} + 0 \times \frac{N_0}{N} + 1 \times \frac{N_1}{N} + 2 \times \frac{N_2}{N} \, .$$

Or, par définition de la probabilité vue en tant que limite de la fréquence de réalisation d'un résultat aléatoire, en faisant tendre le nombre de parties vers l'infini, le gain moyen par partie est égal à

$$m_\infty = (-2) \times 0.2 + (-1) \times 0.3 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.2 = -0.1 \, .$$

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 1

Définition

Soit une variable aléatoire réelle discrète X. On pose $X(\Omega) = \{x_i \,:\, i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices. On dit que X admet une espérance si l'on a

$$\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}\left(X = x_i\right) < \infty\,.$$

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 1

Définition

Soit une variable aléatoire réelle discrète X. On pose $X(\Omega) = \{x_i \,:\, i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices. On dit que X admet une espérance si l'on a

$$\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < \infty \,.$$

Dans ce cas, l'espérance de X est égale à

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 1

Définition

Soit une variable aléatoire réelle discrète X. On pose $X(\Omega) = \{x_i \; : \; i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices. On dit que X admet une espérance si l'on a

$$\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < \infty \, .$$

Dans ce cas, l'espérance de X est égale à

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \, .$$

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 2

Exemple

On considère l'expérience aléatoire e qui consiste à jeter un dé. Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation la face obtenue sur le dé. Calculons l'espérance de X :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\right] =& 1 \times \mathbb{P}\left(X = 1\right) + 2 \times \mathbb{P}\left(X = 2\right) + 3 \times \mathbb{P}\left(X = 3\right) \\
&+ 4 \times \mathbb{P}\left(X = 4\right) + 5 \times \mathbb{P}\left(X = 5\right) + 6 \times \mathbb{P}\left(X = 6\right) \\
=& 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\
=& \frac{21}{6} \\
=& 3.5\,.
\end{aligned}
$$

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 3

Exercice

On considère l'expérience aléatoire e qui consiste à jeter deux dés, un bleu et un rouge. Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation la somme des deux faces obtenues sur les dés. Calculer l'espérance de X sans utiliser de résultats sur l'espérance autres que ceux déjà énoncés.

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 4

Exemple

On considère un évènement A de probabilité $\mathbb{P}(A)$. On peut lui associer la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ définie comme suit. $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. Alors, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ admet une espérance et cette dernière vaut $\mathbb{P}(A)$.

Espérance d'une variable aléatoire discrète - 4

Exemple

On considère un évènement A de probabilité $\mathbb{P}(A)$. On peut lui associer la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ définie comme suit. $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. Alors, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ admet une espérance et cette dernière vaut $\mathbb{P}(A)$.

Preuve

La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ prend deux valeurs : 0 et 1. Donc $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = 1 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) + 0 \times \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \; : \; \mathbb{1}_A(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \; : \; \omega \in A\}) = \mathbb{P}(A)$.

Espérance d'une constante

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toujours la même réalisation a. En d'autres termes, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) = a$. L'ensemble des réalisations de X est donc $X(\Omega) = \{a\}$. Et, la loi de probabilité de X est $\mathbb{P}_X = \delta_a$ c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Par définition, on a donc

$$\mathbb{E}[X] = a \times \mathbb{P}(X = a) = a \times 1 = a\,.$$

Si a est une constante réelle, on a donc

$$\mathbb{E}[a] = a\,.$$

Espérance d'une constante

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toujours la même réalisation a. En d'autres termes, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) = a$. L'ensemble des réalisations de X est donc $X(\Omega) = \{a\}$. Et, la loi de probabilité de X est $\mathbb{P}_X = \delta_a$ c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Par définition, on a donc

$$\mathbb{E}[X] = a \times \mathbb{P}(X = a) = a \times 1 = a\,.$$

Si a est une constante réelle, on a donc

$$\mathbb{E}[a] = a\,.$$

En particulier, $\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X]\} = \mathbb{E}[X]$.

Formule de transfert dans le cas discret - 1

Théorème

Supposons que X soit une variable aléatoire réelle discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \,:\, i \in I\}$ où I est un ensemble au plus dénombrable d'indices. Alors, sous la finitude de la quantité $\sum_{i\in I} |\psi(x_i)|\, \mathbb{P}\,(X = x_i)$, la variable aléatoire $\psi(X)$ admet une espérance et de plus, on a

Formule de transfert dans le cas discret - 1

Théorème

Supposons que X soit une variable aléatoire réelle discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \,:\, i \in I\}$ où I est un ensemble au plus dénombrable d'indices. Alors, sous la finitude de la quantité $\sum_{i\in I} |\psi(x_i)| \mathbb{P}(X = x_i)$, la variable aléatoire $\psi(X)$ admet une espérance et de plus, on a

$$\mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_{i\in I} \psi(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) \,.$$

Formule de transfert dans le cas discret - 2

Exemple : Moment à l'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\psi_n(x) := x^n$. On peut alors calculer, *si elle existe*, la quantité

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \sum_{i \in I} x_i^n \mathbb{P}\left(X = x_i\right) .$$

Formule de transfert dans le cas discret - 2

Exemple : Moment à l'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\psi_n(x) := x^n$. On peut alors calculer, *si elle existe*, la quantité

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \sum_{i \in I} x_i^n \mathbb{P}\left(X = x_i\right) .$$

Cette quantité est appelée "moment d'ordre n de la variable aléatoire réelle X".

Linéarité de l'espérance

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels. On a alors

Linéarité de l'espérance

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels. On a alors

$$\mathbb{E}\left[\lambda_0 + \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n\right] = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \lambda_n \mathbb{E}[X_n] .$$

Espérance d'une variable aléatoire positive

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toutes ses réalisations possibles positives. Alors son espérance est positive :

Espérance d'une variable aléatoire positive

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toutes ses réalisations possibles positives. Alors son espérance est positive :

$$X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0\,.$$

Espérance d'une variable aléatoire négative

Proposition

De même, si la variable aléatoire réelle X est négative alors son espérance est négative :

Espérance d'une variable aléatoire négative

Proposition

De même, si la variable aléatoire réelle X est négative alors son espérance est négative :

$$X \leq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \leq 0 \,.$$

Espérance du produit (avec indépendance) - 1

Proposition

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. On suppose également que chacune de ces variables aléatoires réelles admet une espérance. Alors, la variable aléatoire réelle $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance et de plus :

Espérance du produit (avec indépendance) - 1

Proposition

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. On suppose également que chacune de ces variables aléatoires réelles admet une espérance. Alors, la variable aléatoire réelle $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance et de plus :

$$\mathbb{E}\left[X_1 \times \cdots \times X_n\right] = \mathbb{E}[X_1] \times \cdots \times \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Espérance du produit (avec indépendance) - 2

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. Soient n fonctions bornées $f_1, \cdots, f_n$. Alors, la variable aléatoire réelle $f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)$ admet une espérance et de plus :

Espérance du produit (avec indépendance) - 2

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. Soient n fonctions bornées $f_1, \cdots, f_n$. Alors, la variable aléatoire réelle $f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)$ admet une espérance et de plus :

$$\mathbb{E}\left[f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)\right] = \mathbb{E}[f_1(X_1)] \times \cdots \times \mathbb{E}[f_n(X_n)] \,.$$

Inégalité de Markov : énoncé

Théorème : Inégalité de Markov

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons qu'elle admette une espérance finie c'est-à-dire que l'on ait $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Alors, pour tout $R > 0$, on a

Inégalité de Markov : énoncé

Théorème : Inégalité de Markov

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons qu'elle admette une espérance finie c'est-à-dire que l'on ait $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Alors, pour tout $R > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq R\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{R} \,.$$

Inégalité de Markov : démonstration - 1

Preuve

D'abord, en posant la fonction bornée f_R définie par $f_R(x) := R\mathbb{1}_{|x|\geq R}$, on observe

$$R\mathbb{P}\left(|X| \geq R\right) = \mathbb{E}\left[f_R(X)\right].$$

Puis, on remarque l'inégalité

$$\begin{aligned}
|X| - f_R(X) =& |X| - R\mathbb{1}_{|X|\geq R} \\
=& |X| - R\mathbb{1}_{R\leq |X|} \\
\geq& |X| - |X|\mathbb{1}_{R\leq |X|} \\
\geq& |X|\mathbb{1}_{|X|<R} \\
\geq& 0\,.
\end{aligned}$$

Inégalité de Markov : démonstration - 2

Or, la linéarité de l'espérance nous donne :

$$\mathbb{E}\left[f_R(X)\right] = \mathbb{E}[|X|] - \mathbb{E}\left[|X| - f_R(X)\right] .$$

Et, la variable aléatoire $|X| - f_R(X)$ étant positive, son espérance l'est aussi d'où l'on a

$$R\mathbb{P}\left(|X| \geq R\right) = \mathbb{E}\left[f(X)\right] \leq \mathbb{E}[|X|] .$$

En divisant par R, on obtient l'Inégalité de Markov.

Plan

Variable aléatoire réelle centrée

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est centrée lorsque son espérance mathématique est nulle.

Centrer une variable aléatoire réelle X, c'est lui retrancher son espérance, c'est-à-dire considérer la variable aléatoire réelle $X - \mathbb{E}[X]$. En effet, d'après la linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left\{X - \mathbb{E}[X]\right\} = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]\right] .$$

Variable aléatoire réelle centrée

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est centrée lorsque son espérance mathématique est nulle.

Centrer une variable aléatoire réelle X, c'est lui retrancher son espérance, c'est-à-dire considérer la variable aléatoire réelle $X - \mathbb{E}[X]$. En effet, d'après la linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left\{X - \mathbb{E}[X]\right\} = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]\right] .$$

Or, l'espérance d'une variable aléatoire constante est cette même constante donc on en déduit que l'on a $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X]$ si bien que

$$\mathbb{E}\left\{X - \mathbb{E}[X]\right\} = 0 .$$