Probabilités

Bases des Probabilités (Partie 2).

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Approche par les fréquences

On commence d'abord par donner une vision intuitive de la notion de probabilité. Si l'on réalise une suite de jets d'un dé à six faces bien équilibré, on peut constater que la fréquence d'obtention de chaque face s'approche de $\frac{1}{6}$. Il s'agit d'une définition objective basée sur l'expérience.

Approche par les fréquences

On commence d'abord par donner une vision intuitive de la notion de probabilité. Si l'on réalise une suite de jets d'un dé à six faces bien équilibré, on peut constater que la fréquence d'obtention de chaque face s'approche de $\frac{1}{6}$. Il s'agit d'une définition objective basée sur l'expérience.

On peut aussi opter pour un point de vue plus subjectif : en raison de la symétrie du dé, on a une chance sur six d'obtenir chaque face.

Observations

Observations

- la fréquence de réalisation est un nombre compris entre 0 et 1,

Observations

- la fréquence de réalisation est un nombre compris entre 0 et 1,
- la fréquence de réalisation de l'évènement certain est égale à 1,

Observations

- la fréquence de réalisation est un nombre compris entre 0 et 1,
- la fréquence de réalisation de l'évènement certain est égale à 1,
- la fréquence de réalisation de $A \cup B$ est la somme des fréquences de réalisation de A et de B lorsque A et B sont incompatibles. Cette propriété peut être étendue au cas d'une suite finie ou infinie d'évènements deux à deux incompatibles.

Axiomatisation

Définition

Une probabilité est une application $\mathbb{P}$ qui, à tout évènement A associé à e (c'est-à-dire à tout sous-ensemble de Ω), fait correspondre un nombre noté $\mathbb{P}(A)$ (que l'on appelle "probabilité de A") et qui vérifie les trois axiomes suivants :

- (A_1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- (A_2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (A_3) Pour toute famille $(A_k)_{k \in \mathcal{I}}$ d'évènements deux à deux incompatibles où $\mathcal{I}$ est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathcal{I}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \mathbb{P}\left(A_k\right)$.

Remarques

Remarque

La troisième hypothèse porte aussi le nom d'axiome des probabilités totales.

Remarques

Remarque

La troisième hypothèse porte aussi le nom d'axiome des probabilités totales.

Remarque

La probabilité $\mathbb{P}$ n'est pas une application de Ω dans $[0;1]$. Si Ω est fini ou infini dénombrable, nous verrons que la donnée de $\mathbb{P}$ sur les singletons inclus dans Ω suffit à caractériser $\mathbb{P}$. De fait, vous avez peut-être l'habitude de raisonner avec $\mathbb{P}$ comme application de l'univers dans $[0;1]$.

.

Remarques

Remarque

La troisième hypothèse porte aussi le nom d'axiome des probabilités totales.

Remarque

La probabilité $\mathbb{P}$ n'est pas une application de Ω dans $[0;1]$. Si Ω est fini ou infini dénombrable, nous verrons que la donnée de $\mathbb{P}$ sur les singletons inclus dans Ω suffit à caractériser $\mathbb{P}$. De fait, vous avez peut-être l'habitude de raisonner avec $\mathbb{P}$ comme application de l'univers dans $[0;1]$. **C'est une très mauvaise habitude qu'il faudra perdre aussi vite que possible**.

Plan

Probabilité de l'évènement contraire - 1

Soit un évènement A de probabilité $\mathbb{P}(A)$. Par définition du complémentaire, A et A^c sont incompatibles. Or, d'après l'axiome (A_2), on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega)\,.$$

On a aussi $\Omega = A \cup A^c$. Ainsi, il vient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \cup A^c\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)\,,$$

d'après l'axiome des probabilités totales, vu que A et A^c sont incompatibles. Conséquemment, on a le résultat suivant

Probabilité de l'évènement contraire - 1

Soit un évènement A de probabilité $\mathbb{P}(A)$. Par définition du complémentaire, A et A^c sont incompatibles. Or, d'après l'axiome (A_2), on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega)\,.$$

On a aussi $\Omega = A \cup A^c$. Ainsi, il vient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \cup A^c\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)\,,$$

d'après l'axiome des probabilités totales, vu que A et A^c sont incompatibles. Conséquemment, on a le résultat suivant

Théorème

Soit un évènement A. Alors, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Probabilité de l'évènement contraire - 2

Remarque

Comme $\Omega^c = \emptyset$, on en déduit $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$. La probabilité de l'évènement impossible est nulle.

Probabilité de l'évènement contraire - 2

Remarque

Comme $\Omega^c = \emptyset$, on en déduit $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$. La probabilité de l'évènement impossible est nulle.

Il convient de souligner qu'un évènement de probabilité nulle n'est pas nécessairement impossible. De même, un évènement de probabilité égale à 1 n'est pas nécessairement l'évènement certain. On dira d'ailleurs plutôt qu'un tel évènement est presque sûr.

Décomposition de tout évènement B

Soit une expérience aléatoire e. On note Ω l'espace fondamental associé. Soit un système complet d'évènements, $(A_1, \cdots, A_n)$. Soit maintenant B un évènement. On a alors le résultat suivant

Décomposition de tout évènement B

Soit une expérience aléatoire e. On note Ω l'espace fondamental associé. Soit un système complet d'évènements, $(A_1, \cdots, A_n)$. Soit maintenant B un évènement. On a alors le résultat suivant

Théorème

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(B \cap A_1\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(B \cap A_n\right) .$$

Exemple de décomposition d'un évènement

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On se donne les quatre évènements suivants :

- A_1 :="on obtient un cœur",
- A_2 :="on obtient un carreau",
- A_3 :="on obtient un pique",
- A_4 :="on obtient un trèfle".

Alors (A_1, A_2, A_3, A_4) est un système complet. Soit B l'évènement "on a un as". On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) =& \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \mathbb{P}(B \cap A_3) + \mathbb{P}(B \cap A_4) \\ =& \mathbb{P}\left(\{\text{on a l'as de cœur}\}\right) + \mathbb{P}\left(\{\text{on a l'as de carreau}\}\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(\{\text{on a l'as de pique}\}\right) + \mathbb{P}\left(\{\text{on a l'as de trèfle}\}\right) .\end{aligned}$$

Chacun de ces quatre évènements est de probabilité $\frac{1}{32}$ d'où l'on a $\mathbb{P}(B) = 4\frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Exemple particulier de décomposition

À nouveau, on peut s'intéresser au cas particulier du système complet (A, A^c). Alors, pour tout évènement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)\,.$$

Croissance de la probabilité - 1

Soit une expérience aléatoire e. Soit Ω l'espace fondamental. On considère deux évènements A et B liés à cette expérience aléatoire. On a le résultat suivant de croissance de la probabilité

Croissance de la probabilité - 1

Soit une expérience aléatoire e. Soit Ω l'espace fondamental. On considère deux évènements A et B liés à cette expérience aléatoire. On a le résultat suivant de croissance de la probabilité

Théorème

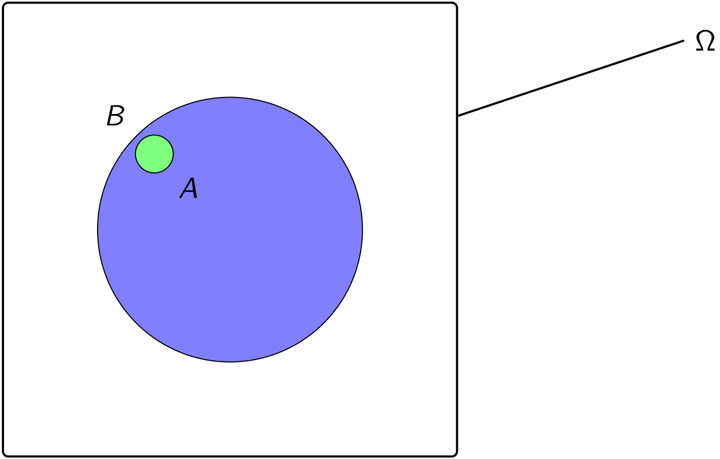
Si A implique B c'est-à-dire si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Croissance de la probabilité - 2

Avec un diagramme de Venn :

Croissance de la probabilité - 2

Avec un diagramme de Venn :



Théorème des probabilités totales

Théorème

Soit une expérience aléatoire e. On note Ω l'espace fondamental associé. Soient deux évènements A et B. Alors, on a

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) .$$

Théorème des probabilités totales

Théorème

Soit une expérience aléatoire e. On note Ω l'espace fondamental associé. Soient deux évènements A et B. Alors, on a

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) .$$

Remarque

Cette formule ressemble à la formule de Grassmann en algèbre linéaire.

Théorème des probabilités totales

Théorème

Soit une expérience aléatoire e. On note Ω l'espace fondamental associé. Soient deux évènements A et B. Alors, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) .$$

Remarque

Cette formule ressemble à la formule de Grassmann en algèbre linéaire.

Exercice

Prouver le Théorème des probabilités totales en utilisant un diagramme de Venn.

Théorème des probabilités totales

Théorème

Soit une expérience aléatoire e. On note Ω l'espace fondamental associé. Soient deux évènements A et B. Alors, on a

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) .$$

Remarque

Cette formule ressemble à la formule de Grassmann en algèbre linéaire.

Exercice

Prouver le Théorème des probabilités totales en utilisant un diagramme de Venn.

Exercice

Soient trois évènements A, B et C. Calculer $\mathbb{P}\left(A \cup B \cup C\right)$, sans utiliser les diagrammes de Venn.

Plan

Caractérisation de la probabilité - 1

Dans cette section, $\Omega := \{\omega_i \,,\ i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.

Caractérisation de la probabilité - 1

Dans cette section, $\Omega := \{\omega_i\,,\; i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.

On se donne une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'univers Ω, c'est-à-dire une fonction de 2^{Ω} dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois axiomes de la Définition.

Caractérisation de la probabilité - 1

Dans cette section, $\Omega := \{\omega_i\,,\ i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.

On se donne une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'univers Ω, c'est-à-dire une fonction de 2^Ω dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois axiomes de la Définition.

Théorème

La probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fondamental dénombrable Ω est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des évènements élémentaires (c'est-à-dire celles des singletons) : $\mathbb{P}\left(\{\omega_k\}\right) =: \mathbb{P}(\omega_k)$.

Caractérisation de la probabilité - 2

Preuve

On suppose connues les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(\omega_k)$, pour tout $k \in I$. Montrons alors que l'on peut calculer la probabilité de tout évènement. Soit un évènement A quelconque. En tant que sous-ensemble de Ω, il est fini ou infini dénombrable. Donc, il existe un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ tel que $A = \{\omega_j \ : \ j \in \mathcal{J}\}$. De fait, on a

$$A = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{\omega_j\} \,.$$

Caractérisation de la probabilité - 3

Or, les singletons sont deux à deux incompatibles. Ainsi, d'après l'axiome des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(\omega_j) \, .$$

La probabilité $\mathbb{P}(A)$ est ainsi entièrement déterminée pour tout $A \in 2^{\Omega}$.

Caractérisation de la probabilité - 4

Remarque

En appliquant ce raisonnement à $\Omega = \{\omega_i\,,\ i \in I\}$, on a

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(\omega_i) = 1\,.$$

Plan

Espace fondamental non dénombrable - 1

Théorème

Soit un univers Ω non dénombrable et muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On note $\mathrm{M} \subset \Omega$ le sous-ensemble qui contient les éléments ω de probabilité strictement positive. Alors M est fini ou infini dénombrable.

Espace fondamental non dénombrable - 1

Théorème

Soit un univers Ω non dénombrable et muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On note $\mathrm{M} \subset \Omega$ le sous-ensemble qui contient les éléments ω de probabilité strictement positive. Alors M est fini ou infini dénombrable.

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{M}_n := \left\{\omega \ : \ \mathbb{P}(\omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$. On observe que l'on a $\mathrm{M} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$. Il suffit maintenant de prouver que l'ensemble M_n est fini ou infini dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, une réunion dénombrable d'ensembles finis ou infinis dénombrables est un ensemble fini ou infini dénombrable. Supposons par l'absurde que l'un des ensembles M_n est infini. En particulier, il contient au moins $2n$ éléments distincts que l'on note $\omega_1, \cdots, \omega_{2n}$. Puis, il vient $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n) \geq \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(\omega_i) \geq 2n \times \frac{1}{n} = 2$ ce qui est impossible car $\mathbb{P}$ est une probabilité et donc on a $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Espace fondamental non dénombrable - 2

À partir de là, deux cas sont possibles. Ou bien $\mathbb{P}(\mathrm{M}) = 1$, ce qui signifie que l'on peut considérer M comme nouvel espace fondamental. Ou bien $\mathbb{P}(\mathrm{M}) < 1$, ce qui signifie qu'une partie de la "masse" est cachée dans les éléments de probabilité égale à 0, lesquels sont en quantité non dénombrable. Dans ce dernier cas, on ne peut caractériser la probabilité $\mathbb{P}$ par la seule donnée de la nullité de $\mathbb{P}$ sur chaque évènement élémentaire de M^c.

Espace fondamental non dénombrable - 3

Exemple

On pose $\Omega := [0;1]$. On considère la probabilité $\mathbb{P}_1$ définie par

$$\mathbb{P}_1(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} \mathrm{d}x \,,$$

où $\mathcal{I}$ est un intervalle quelconque inclus dans $[0;1]$. On considère la probabilité $\mathbb{P}_2$ définie par

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} 2x\mathrm{d}x \,.$$

Espace fondamental non dénombrable - 3

Exemple

On pose $\Omega := [0;1]$. On considère la probabilité $\mathbb{P}_1$ définie par

$$\mathbb{P}_1(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} \mathrm{d}x\,,$$

où $\mathcal{I}$ est un intervalle quelconque inclus dans $[0;1]$. On considère la probabilité $\mathbb{P}_2$ définie par

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} 2x\mathrm{d}x\,.$$

On peut vérifier facilement que $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont deux probabilités. Également, ces deux probabilités ne sont pas les mêmes puisque $\mathbb{P}_1([0;\frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$ alors que $\mathbb{P}_2([0;\frac{1}{2}]) = \frac{1}{4}$. Et pourtant,pour tout $\omega \in \Omega = [0;1]$, on a $\mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \mathbb{P}_2(\{\omega\}) = 0$.

Plan

Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ avec $N < \infty$. On a donc $N = \#\Omega$.

Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ avec $N < \infty$. On a donc $N = \#\Omega$.

Définition

Dans le cas particulier où $\mathbb{P}(\omega_1) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_N)$, on dit que l'espace fondamental fini Ω est muni de l'équiprobabilité.

Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ avec $N < \infty$. On a donc $N = \#\Omega$.

Définition

Dans le cas particulier où $\mathbb{P}(\omega_1) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_N)$, on dit que l'espace fondamental fini Ω est muni de l'équiprobabilité.

Théorème

Si $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$, on a $\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#\Omega}$ pour tout $1 \leq k \leq N$.

Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ avec $N < \infty$. On a donc $N = \#\Omega$.

Définition

Dans le cas particulier où $\mathbb{P}(\omega_1) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_N)$, on dit que l'espace fondamental fini Ω est muni de l'équiprobabilité.

Théorème

Si $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$, on a $\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#\Omega}$ pour tout $1 \leq k \leq N$.

Remarque

Une probabilité sur un univers Ω fini n'est pas nécessairement l'équiprobabilité.

Équiprobabilité - 2

Théorème

Si $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité sur $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\{\text{cas favorables}\}}{\#\{\text{cas possibles}\}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

pour tout évènement A.

Équiprobabilité - 3

Exemple

On jette un dé à six faces que l'on suppose non pipé. Les six résultats possibles ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 et ω_6 sont équiprobables. Ainsi, l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ est muni de l'équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{6}\,,$$

pour tout $1 \leq k \leq 6$. Soit l'évènement $A :=$"on obtient une face paire". Alors, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ puis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Équiprobabilité - 4

Exemple

On prend huit cartes dans un jeu de trente-deux cartes. On a exactement $\binom{32}{8} = \frac{32!}{8!24!} = 10\ 518\ 300$ façons de le faire. L'espace fondamental Ω est muni de l'équiprobabilité. On considère l'évènement A :="on ne prend aucun as". Il vient alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0.295\,.$$

Équiprobabilité - 4

Exemple

On prend huit cartes dans un jeu de trente-deux cartes. On a exactement $\binom{32}{8} = \frac{32!}{8!24!} = 10\ 518\ 300$ façons de le faire. L'espace fondamental Ω est muni de l'équiprobabilité. On considère l'évènement A :="on ne prend aucun as". Il vient alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0.295\,.$$

Définition

On dit que le tirage d'un individu de la population P finie est au hasard lorsque tout individu a la même probabilité d'être tiré. En d'autres termes, un tirage au hasard est fait suivant l'équiprobabilité.