Bases indispensables des Mathématiques

Julian Tugaut

FISE 1

Version du 19 décembre 2023

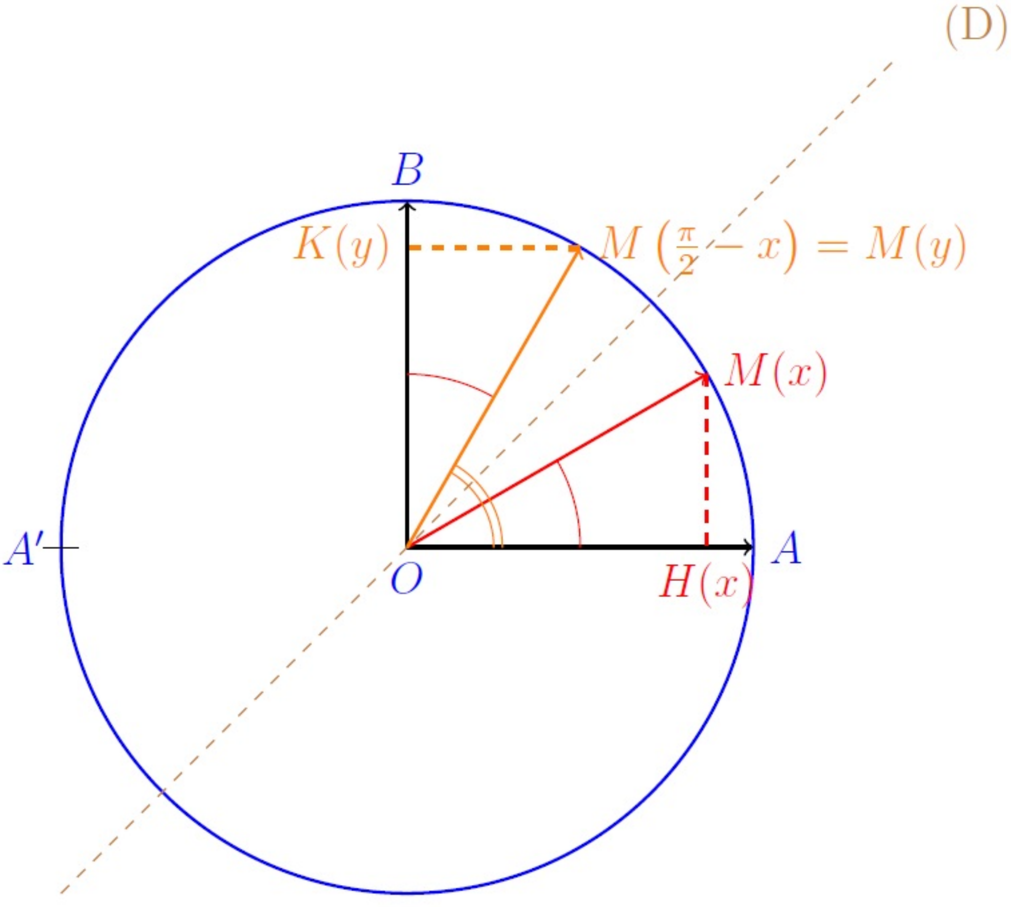


Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Avant-propos

"Que dois-je faire pour y arriver ?", "Pouvez-vous m'aider ?", "J'ai beaucoup de mal et j'ai peur de ne pas y arriver." Trois phrases que j'entends tous les ans depuis que j'enseigne à Télécom Saint-Étienne. Tous les ans, en début d'année, des étudiants qui viennent de DUT viennent me voir pour me signifier qu'ils ont du mal et qu'ils ont besoin d'aide.

L'aide, c'est justement le rôle de ce cours : "Bases Indispensables des Mathématiques". Il s'agit d'un cours de remise à niveau. Néanmoins, avec quinze heures de cours magistraux et quinze heures de travaux dirigés, il est absolument impossible de compenser les lacunes accumulées au cours des années par les étudiants qui sont justement la cible de ce cours.

Que faire alors ? Il faut bien admettre qu'en début d'année, je sais d'avance qui aura du mal même en travaillant. En effet, on ne peut pas rattrapper deux années de classes préparatoires en deux mois. Y a-t-il un moyen pour mettre les étudiants à égalité ? Je n'y crois pas une seule seconde. Pas en deux mois en tout cas. Tout ce que l'on peut (et doit) faire, c'est permettre à chacun de faire au mieux avec les connaissances qu'il a en début d'année.

L'ambition de ce livre n'est donc pas de mettre à égalité les étudiants mais de réduire les inégalités au maximum, sans toutefois que les étudiants issus de formations solides en mathématiques ne soient délaissés.

Quand j'ai commencé à rédiger ce livre, la question de la cible s'est immédiatement posée. En effet, le public du cours associé est divers : certains viennent de prépa MPI, de prépa MP, de prépa PC, de prépa PSI, de prépa PT. D'autres viennent de prépa TSI. D'autres encore sont issus du premier cycle de Télécom. Certains viennent de Licences variées. Enfin, dix ou douze étudiants par an viennent de DUT (RT, Informatique, GEII, MP)... Cela vaut-il le coût de faire un polycopié de cette taille (plus de 500 pages) qui s'adresse uniquement à dix ou douze étudiants par an ? Cela peut sembler cruel mais ma réponse est claire : "non, ça ne vaut pas le coût". Mais retournons la question : ne serait-il pas injuste de permettre l'inscription d'une dizaine d'étudiants sans leur donner tous les moyens possibles pour qu'ils y arrivent ?

Par conséquent, bien que la cible *principale* de ce livre soit l'étudiant de DUT (quel que soit le DUT d'ailleurs), nous avons tout fait pour ne pas délaisser les autres étudiants. En effet, les étudiants de TSI comme ceux qui sont issus du cycle

CITISE peuvent trouver leur compte dans ce polycopié. De même, les étudiants recrutés sur concours après CPGE trouveront avec cet ouvrage une sorte de *bible* à laquelle s'adosser en cas de besoin au cours de leurs années à Télécom.

À part cela, quel est le but de ce polycopié ? Vu la taille, il ne s'agit pas seulement de servir de support pour le cours de Bases Indispensables des Mathématiques. Sinon, le livre serait trois fois plus petit.

Les objectifs que j'ai poursuivis en rédigeant ce livre lors de ces trois dernières années étaient multiples.

D'abord, quoi qu'on en dise, un impétrant ingénieur a besoin de faire des mathématiques. Premièrement, les mathématiques sont le langage commun des sciences. Deuxièmement, elles sont un outil dans de nombreuses sciences dont le traitement du signal, qui est une science que découvriront les étudiants lors du tronc commun. Elles servent également en optique, en électromagnétisme... Troisièmement, on attend d'un ingénieur qu'il soit en mesure d'analyser un problème, quel qu'il soit. C'est justement ce qui est attendu en mathématiques : savoir se poser devant un problème et être en mesure de capitaliser sur ce que l'on connait, être en mesure de réinvestir ce que l'on a appris et finalement en dernier, de savoir résoudre le problème.

Ensuite, le tronc commun de Télécom et de toute école d'ingénieur qui se respecte contient des mathématiques et des matières à connotation mathématique comme le traitement du signal. Il va donc de soi que pour passer à l'année suivante voire pour ne pas se faire carrément virer, il est important de ne pas échouer à ces matières. Or, pour l'étudiant qui vient de DUT, la plupart des concepts sont totalement nouveaux. Au contraire, l'étudiant qui vient de CPGE en a déjà vu une bonne partie et même les concepts qu'il n'a pas encore vus, il peut y voir du sens en faisant un parallèle avec d'autres notions étudiées avant son arrivée à Télécom. Conséquemment, l'un des buts de ce livre est de permettre aux étudiants issus de formations moins solides pour la partie théorique de survivre à la première année et de manière générale au tronc commun. Il peut sembler exagéré de parler de "survie". Malheureusement, il s'agit bien de passer la lame de fond théorique qui va s'abattre sur eux.

Évidemment, le polycopié ne peut pas et ne doit pas être trop théorique. Sinon, les lecteurs qui ont de bonnes bases seront les seuls à bénéficier de ce livre. Les autres n'en tireraient que de la frustration. De la même manière, le polycopié ne peut trop faire la part belle à l'intuition et s'asseoir sur la théorie. Sinon, ce sont les lecteurs issus de CPGE qui n'y verraient que de la vulgarisation. Au-delà de ça, il est aussi important de se frotter à la théorie quand on veut faire ingénieur.

En résumé, l'ouvrage est théorique. Il le faut pour appréhender sérieusement les mathématiques. Mais la présentation se veut intuitive et élémentaire. Il le faut pour appréhender sereinement les mathématiques. La présentation a été conçue pour être claire la plupart du temps. Il m'est arrivé dans certaines sections de laisser libre court à ma fantaisie auquel cas je mentionne que la section peut ne pas être consultée en première lecture.

Tout en gardant la trame classique d'un cours de mathématiques de CPGE, certaines notions ont été épurées. D'autres ont carrément été élaguées. Ainsi, il peut sembler surprenant que l'on ne fasse pas la moindre arithmétique dans l'anneau des entiers. Je ne prétendrai pas que c'est inutile. Cela ne l'est pas. Néanmoins, il a fallu faire des choix et parer au plus urgent, au plus important. À côté de cela, certaines notions de mathématiques appliquées ont été ajoutées : les parties huit et neuf sur la topologie générale et sur la théorie de la mesure et de l'intégration. L'idée sous-jacente à l'ajout de la huitième partie est de sensibiliser les étudiants à certaines notions qui seront abordées dans le cours sur les distributions. La neuvième partie a été ajoutée pour faire plaisir à certains étudiants curieux.

Le polycopié ne se veut pas linéaire. Mais les mathématiques ne sont pas linéaires. Par ailleurs, les mathématiques ne se lisent pas mais s'écrivent et s'apprennent vraiment en résolvant des exercices. C'est pourquoi cet ouvrage en contient 217 dont la plupart sont corrigés.

Étant entendu que le livre repart de zéro, il ne nécessite pas de prérequis ou presque. En effet, il est préférable d'avoir un bon niveau de Terminale scientifique (ou équivalent suite à la dernière réforme). Il convient de noter qu'un néobachelier n'est pas le cœur de cible de ce livre.

Nous donnons maintenant l'organisation générale du manuscrit.

Dans la première partie, on reprend les fondamentaux du raisonnement, du calcul algébrique, des ensembles et des applications entre ensembles. Les mathématiques s'appuient sur des raisonnements logiques, sur des calculs algébriques et sur la théorie des ensembles. C'est pourquoi il est plus que crucial de consulter cette partie avant toute autre lorsque l'on débute. Bien que cette partie puisse sembler superflue au premier abord, elle ne l'est pas. En effet, les briques élémentaires qui fondent la maison Mathématique sont à avoir à portée de main avant de faire des mathématiques à proprement parler. Ainsi, bien que cette partie ne sera jamais évaluée dans votre scolarité à Télécom et bien que vous ne vous en servirez jamais directement, elle sera d'une utilité capitale, indirectement.

La deuxième partie traite des nombres complexes et donc bien sûr de la trigonométrie. Ici, le point de vue est aussi géométrique que possible. Ainsi, la plupart des résultats seront démontrés à l'aide de notions géométriques qui ont normalement été vues au collège voire en seconde. Il peut paraître inutile de revoir cette partie. En effet, quel que soit l'étudiant, il a des connaissances basiques en complexes. Malheureusement, ces connaissances basiques ne seront pas suffisantes pour aborder le traitement du signal. C'est pourquoi j'insiste pour que cette deuxième partie soit étudiée.

La troisième partie est consacrée aux fractions rationnelles. L'objectif est on ne peut plus simple : j'attends de l'étudiant qu'il sache décomposer une fraction rationnelle en éléments simples à l'issue du cours. En effet, pour intégrer comme pour inverser les transformées (Fourier ou Laplace ou en Z), il est crucial de savoir décomposer en éléments simples. Or, pour aborder la décomposition en éléments simples et ne pas en faire une simple recette de cuisine, il m'a fallu faire un chapitre entier sur les fractions rationnelles. Celles-ci étant *grosso modo* des fractions de polynômes, j'ai également fait un chapitre préparatoire sur les polynômes.

La quatrième partie concerne l'algèbre linéaire. Il s'agit d'un très gros morceau. Dans la vie courante, peu de choses sont linéaires. Peu d'équations qui s'appliquent dans le monde réel le sont. Mais on se ramène autant que possible à des systèmes ou à des équations linéaires. Pour aborder les cours de traitement du signal, la connaissance et surtout l'intuition des phénomènes linéaires est un plus indéniable. Cette partie contient sept chapitres. Le premier traite les matrices. Le deuxième s'intéresse à l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$. Le troisième s'occupe des espaces vectoriels généraux. Le quatrième traite des applications linéaires. Le cinquième, les déterminants. Le sixième est consacré aux systèmes linéaires. Enfin, le septième s'occupe de la réduction des endomorphismes.

Moins importante que la précédente, la cinquième partie traite des formes quadratiques et de certaines de ses applications. L'intérêt majeur est de pouvoir s'y adosser autant que possible lorsque nous aborderons la notion de covariance. En effet, la covariance est une forme bilinéaire symétrique et sa forme quadratique associée est la variance, laquelle n'est pas un produit scalaire.

La cinquième partie est au sujet de l'analyse. Il s'agit à nouveau d'un très gros morceau. On ne peut pas faire de mathématiques appliquées ni même d'applications des mathématiques sans connaître un tant soit peu l'analyse. Cette partie contient onze chapitres, tous importants. Le premier traite des suites numériques. Le deuxième et le troisième, des fonctions de la variable réelle et des propriétés de limite, de continuité et de dérivation. Le quatrième chapitre est à propos des développements limités. Le cinquième concerne le calcul intégral. Le sixième, les séries numériques. Le septième traite des familles sommables, dont tout l'intérêt est le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. Ensuite, le huitième chapitre parle des suites et des séries de fonctions. Le neuvième traite du cas particulier des séries entières tandis que le dixième regarde celui des séries de Fourier, prémices à la transformation de Fourier. Enfin, dans le onzième chapitre, on s'intéresse aux équations différentielles.

La septième et dernière partie est sur la topologie. En somme, cette partie aborde avec finesse l'art de la convergence. Ou plutôt, elle aborde l'art des convergences. Il est important de la consulter pour bien saisir le chapitre sur les convergences des variables aléatoires dans le cours de probabilités et statistiques.

Également, on y voit une sensibilisation au cours sur la théorie des distributions, lequel est à la base des cours de traitement du signal à Télécom.

Notons que pour chaque partie, nous avons rédigé une introduction aux chapitres qui la composent. Dans ces introductions, nous donnons l'intérêt, les objectifs, les pré-requis et l'organisation de ladite partie.

Il est maintenant temps de lister tous les autres cours sur lesquels je me suis appuyé et qui ne sont pas listés dans la bibliographie. En effet, on ne crée pas un livre de cet taille ex nihilo.

Citons, dans le désordre : les cours de CPGE que j'avais reçus par Messieurs Thorigny et Chapon, le cours de DUT GEA du Professeur Monnez, le cours du Docteur Maubon à la FST de Nancy et bien sûr le cours de topologie du Professeur Morel à l'ENS Cachan. Le premier polycopié de Bases Indispensables des Mathématiques par le Professeur Alata a été une base indispensable de l'actuelle version du polycopié.

Il va de soi que wikipedia et google m'ont largement aidé aussi.

Ce livre a été écrit avec LaTeX, via l'éditeur Texmaker. Les figures ont été faites via tikzpicture. Notons que la fin des preuves est signalée par un petit carré à droite.

J'achève cet avant-propos en soulignant l'importance de me signaler toute erreur, aussi infime soit-elle. Que ce soit en mathématiques ou en français, ou même que ce soit juste une virgule qui manque, si vous voyez une erreur ou si vous avez une suggestion n'hésitez pas à m'écrire. Il faut bien comprendre que ceci est la première version du polycopié et elle doit donc en contenir un nombre conséquent.

Première partie

Rappels et fondamentaux

Chapitre 1

Introduction

Cette partie peut paraître aride en première lecture. Néanmoins, on ne peut pas décemment faire de mathématiques ni même les appliquer si on en connait pas les règles. Les règles des mathématiques sont justement ce que l'on développe dans cette partie.

1.1 Intérêt

Peut-on courir sans avoir d'abord appris à se tenir debout ? La réponse à cette question est simple : “non, on ne peut pas”.

Il en est de même avec les mathématiques. Celles-ci s'appuient sur des raisonnements logiques, sur des calculs algébriques et sur la théorie des ensembles. C'est pourquoi il est plus que crucial de consulter cette partie avant toute autre lorsque l'on débute.

Comme je dis souvent en cours, il ne faut pas se précipiter. Aussi, prenez bien le temps de vous familiariser avec les concepts si ceux-ci sont nouveaux pour vous.

1.2 Objectifs

L'objectif est double. Il s'agit aussi bien de reprendre les bases avec ceux qui débutent : bases du raisonnement et bases du calcul. Mais il peut aussi s'agir de restaurer auprès d'un public plus averti des notions déjà vues mais qui se sont estompées au fil du temps.

Je serais bien sûr ravi que le lecteur se découvre une passion pour la logique, les ensembles, le calcul algébrique ou même les applications entre ensembles et les relations binaires. Néanmoins, ce n'est pas du tout l'objectif.

Les mathématiques doivent pouvoir être appliquées dans le monde dans lequel on vit à moins que l'on fasse de celles-ci son métier. Or, *a priori*, le lecteur se destine à être ingénieur. Donc autant le dire tout de suite : cette partie est, dans cet objectif, à peu près inutile. En revanche, pour aborder sereinement les autres parties, il convient d'avoir lue celle-ci.

De la même manière qu'il n'est pas nécessaire de savoir se tenir sur un seul orteil pour pouvoir courir, il n'est pas nécessaire de maîtriser totalement la partie de rudiments pour être capable de comprendre les huit autres parties.

1.3 Prérequis

Cette partie étant à la base des mathématiques, elle ne nécessite aucun prérequis pour être lue. Bien sûr, les connaissances de Terminale peuvent être utiles pour mieux comprendre. Et, mieux, des connaissances poussées acquises au cours de vos études post-bac seront un plus.

Par conséquent, si cette partie vous paraît trop difficile à absorber malgré plusieurs lectures successives, n'hésitez pas à diversifier vos lectures et à consulter d'autres livres.

1.4 Organisation

Dans ce paragraphe, on présente *grosso modo* ce que va être la suite de la première partie.

1.4.1 Rudiments de logique

Ce chapitre présentera le vocabulaire usuel ainsi que les stratégies globales de résolutions de problèmes mathématiques. S'il n'y a pas **un** problème mathématique mais bien une multitude, et bien que la plupart des problèmes admettent plusieurs solutions, les stratégies pour aborder les problèmes sont souvent les mêmes. Certes, les outils employés seront plus ou moins élaborés. Certes, les preuves seront plus ou moins longues. Mais s'il y a bien une constante dans toute preuve de tout problème, c'est que la démonstration est une succession d'étapes simples.

Les briques élémentaires pour établir une stratégie de preuve seront donc étudiées dans ce chapitre. On rappellera quelques raisonnements fallacieux dont il faut se méfier à tout prix.

1.4.2 Calculs algébriques

Dans ce chapitre, nous commencerons par donner des mots-clés qui servent régulièrement en mathématiques. Puis, l'on procèdera à quelques rappels de calculs comme les identités remarquables et les séries arithmétiques et géométriques. On introduira de nouvelles notations comme $\sum$ et $\prod$ qui nous simplifieront la vie. Enfin, on effectuera des rappels sur le trinôme à coefficients réels et sur les inéquations.

1.4.3 Ensembles

Essentiels pour comprendre les probabilités, les ensembles seront l'objet du quatrième chapitre de cette partie. Les opérations basiques seront montrées. De nombreuses propriétés seront démontrées. Il convient de noter que ce chapitre a pour mission principale de servir de base aux probabilités.

1.4.4 Applications et relations

Dans ce chapitre, nous présenterons les applications. Celles-ci sont centrales en mathématiques. En effet, avoir des ensembles, c'est bien et même très bien. Mais si l'on ne fait rien entre eux, on ne pourra pas extirper beaucoup d'informations. On peut même aller plus loin. Aucune structure un tant soit peu compliquée n'existe s'il n'y a pas d'applications entre ensembles.

Nous présenterons également la notion de relation. Moins importante dans cet ouvrage, elle permet avant tout de familiariser le lecteur à la notion de classe d'équivalence, l'équivalence étant un type particulier de relation. Or, il est absolument impossible de comprendre l'intégrale de Lebesgue si l'on n'a pas saisi que l'on ne travaille plus avec des fonctions mais bien avec des classes d'équivalence de fonctions.

Chapitre 2

Rudiments de logique

2.1 Les mathématiques

La mathématique est une science logico-formelle. Ainsi, elle est fondée sur la logique. Il est donc naturel de commencer ce livre par quelques éléments de logique. Avant cela, il convient de comprendre à quoi correspond l'activité mathématique. Que font les mathématiciens ? Comment les mathématiques sont-elles bâties ?

Peu ou prou, la mathématique repose sur des axiomes (hypothèses de travail dont la vérité ne fait aucun doute *a priori*). De divers axiomes, on en déduit des résultats à partir d'énoncés mathématiquement vrais. Ces énoncés qui vont des axiomes aux résultats sont des théorèmes dont les preuves sont aussi appelées démonstrations.

Et, les mathématiciens prennent les résultats obtenus comme hypothèses en veillant à ne jamais prendre d'axiome qui entreraient en conflit avec les axiomes présupposés pour obtenir les résultats utilisés.

Par exemple, supposer que tout espace vectoriel réel admet une base tout en refusant l'axiome du choix est une contradiction.

2.2 Vocabulaire usuel

2.2.1 Axiome

Définition 2.2.1 (Axiome)**.** *Un axiome est un énoncé supposé vrai* a priori *et que l'on ne cherche pas à démontrer.*

Exemple 2.2.2. *L'axiome du choix est un axiome au même titre que le lemme de Zorn (qui lui est équivalent).*

Exemple 2.2.3. *Dans "L'éthique", Spinoza part de définitions* et *d'axiomes, le troisième de ceux-ci étant : "D'une cause déterminée donnée, suit nécessairement un effet, et au contraire, s'il n'y a nulle cause déterminée, il est impossible qu'un effet s'ensuive". À noter que Spinoza entend démontrer des résultats par la méthode dite géométrique...*

Exemple 2.2.4. *Les cinq axiomes de Peano fondent toute l'arithmétique sur l'ensemble des entiers. Le cinquième des axiomes est l'axiome de récurrence, lequel est le fondement du raisonnement par récurrence.*

Remarque 2.2.5. *Deux personnes partant d'axiomes contradictoires peuvent diverger sans que l'un ou l'autre ait tort dans son raisonnement. Notons que cette remarque s'applique aussi bien en mathématiques, en sciences expérimentales mais aussi en économie, en sociologie...*

2.2.2 Proposition

Définition 2.2.6 (Proposition)**.** *Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux.*

Remarque 2.2.7. *On parle aussi d'assertion ou d'affirmation.*

Exemple 2.2.8. *"Tout nombre premier est impair" est une proposition. Elle est fausse d'ailleurs puisque* 2 *est un nombre premier pair. On dira par la suite que* 2 *est un contre-exemple de la dite proposition.*

Exemple 2.2.9. *"Tout carré d'un nombre réel est positif ou nul" est aussi une proposition. Elle est vraie d'ailleurs.*

Le mot "proposition" est ici à comprendre au sens premier du terme : on propose quelque chose. Il reste ensuite à la démontrer. Et, c'est à la personne qui propose de prouver. On parle de "charge de la preuve".

Remarque 2.2.10. *Par abus de langage, une proposition est souvent entendue comme une proposition vraie correspondant à un résultat intermédiaire ou d'importance plus ou moins modérée.*

2.2.3 Théorème, Corollaire, Lemme, Conjecture, Définition

Définition 2.2.11 (Théorème)**.** *Un théorème est une assertion dont on a démontré qu'elle était vraie.*

Exemple 2.2.12. *Le plus célèbre des théorèmes est sans doute celui de Pythagore, vu en quatrième. Ce dernier stipule que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés dans un triangle rectangle.*

Définition 2.2.13 (Corollaire)**.** *Un corollaire à un théorème est une conséquence du dit théorème.*

Remarque 2.2.14. *Le mot "corollaire" vient du latin "corollarium" ce qui signifie "pourboire" ou "gratification pour couronner le tout". C'est donc un résultat immédiat après que l'on a démontré le théorème dont il découle.*

Exemple 2.2.15. *Un exemple de corollaire est celui des valeurs intermédiaires.*

Définition 2.2.16 (Lemme). *Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.*

Exemple 2.2.17. *Le lemme de Fatou est des plus fameux en théorie de la mesure et de l'intégration.*

Définition 2.2.18 (Conjecture). *Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie sans pour autant disposer d'une démonstration pouvant en authentifier la véracité.*

Exemple 2.2.19. *La conjecture de Goldbach s'énonce ainsi : "Tout nombre entier pair supérieur à trois est la somme de deux nombres premiers".*

Remarque 2.2.20. *On peut aussi parler d'hypothèse comme dans le cas de l'hypothèse de Riemann.*

Définition 2.2.21 (Définition). *Une définition est un énoncé dans lequel on liste les particularités d'un objet.*

Remarque 2.2.22. *La définition d'un objet mathématique peut impliquer la non-existence de l'objet en question.*

Remarque 2.2.23. *Le mot "axiome" est parfois utilisé comme synonyme de "définition".*

2.3 Calcul propositionnel

L'objet d'étude de cette section est les propositions et les liens qui les unissent en tant que telles. On ne se préoccupe donc pas du contenu des propositions en question.

On rappelle qu'une proposition est un énoncé qui peut être vrai ou faux. On dit alors que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont "vrai" et "faux".

2.3.1 Équivalence logique

Définition 2.3.1. *Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanément vraies et simultanément fausses.*

En d'autres termes, P est vraie si Q est vraie et réciproquement. À l'inverse, P est fausse si Q est fausse.

Remarque 2.3.2. *Deux propositions équivalentes sont deux propositions ayant les mêmes* valeurs de vérité.

On peut le visualiser dans un tableau appelé *table de vérité* :

TABLE 2.1 – Table de vérité de l'équivalence logique $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai

Par ailleurs, pour simplifier, on posera V := Vrai et F := Faux. Ceci nous donne le tableau suivant :

TABLE 2.2 – Table de vérité de l'équivalence logique $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En première ligne de ce tableau, il faut lire que si les propositions P et Q sont vraies, la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie aussi.

En dernière ligne, si les deux propositions sont fausses, alors la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie. En effet, si les deux propositions sont fausses, elles ont même valeur de vérité et par conséquent, elles sont équivalentes si bien que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie.

Au contraire, si l'une des deux propositions est vraie et que l'autre est fausse, il s'ensuit que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.

L'équivalence logique joue le même rôle pour les propositions que l'égalité pour les nombres. En effet, les expressions "$2+2$", "$5-1$" et "quatre" sont différentes. Pourtant, on a bien $2+2=5-1$. De même, les propositions "$(x^2=4)$" et "$(x=2$ ou $x=-2)$" sont équivalentes bien qu'elles soient différentes.

2.3.2 Connecteurs logiques

Par essence, les connecteurs logiques connectent les propositions. Ces connecteurs sont : la négation, "et" et "ou".

2.3.2.1 Négation d'une proposition

Soit P une proposition. On définit sa négation (notée non(P) ou $\neg P$) à partir de sa table de vérité :

TABLE 2.3 – Table de vérité de $\neg P$

P	$\neg P$
V	F
F	V

De nombreuses erreurs peuvent être épargnées en prenant garde lors de la négation d'une proposition. Par exemple, la négation de “ce chat est blanc” n'est certainement pas “ce chat est noir”. En effet, le chat peut être roux...

De même, la négation de “f est la fonction nulle” n'est pas “$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$” mais bien “$\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$”.

Remarque 2.3.3. *Les propositions P et $\neg(\neg P)$ sont équivalentes. Il suffit en effet de vérifier qu'elles ont les mêmes valeurs de vérité :*

TABLE 2.4 – Table de vérité de $\neg(\neg P)$

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

En d'autres termes, la négation est une involution.

2.3.3 Connecteur logique “ou”

Soient P et Q deux propositions. On peut alors définir la proposition “P ou Q”, notée $P \vee Q$ par la table de vérité ci-dessous :

TABLE 2.5 – Table de vérité de $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Le connecteur logique “ou” fait ainsi penser à la réunion d’ensembles, même dans sa notation.

On peut noter que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P est fausse et Q est fausse.

Remarque 2.3.4. *Il est important d’avoir un langage rigoureux. La langue française est souvent ambigüe. Par exemple, le mot “ou” peut avoir deux significations : le “ou inclusif” et le “ou exclusif”. Ainsi, au restaurant, “fromage ou dessert” signifie l’un ou l’autre mais pas les deux c’est-à-dire que le “ou” est exclusif. En mathématiques, le “ou” est* **toujours** *inclusif.*

On dispose de la commutativité :

Théorème 2.3.5 (Commutativité)**.** *Soient P et Q deux propositions. On a $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.*

En effet, les deux propositions ont les mêmes valeurs de vérité :

Table 2.6 – Table de vérité de $Q \vee P$

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

On dispose aussi de l’associativité :

Théorème 2.3.6 (Associativité)**.** *Soient P, Q et R trois propositions. On a $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.*

Exercice 2.3.7. *Démontrer le Théorème 2.3.6 à partir d’une table de vérité.*

Les deux théorèmes qui viennent d’être énoncés signifient que l’on peut utiliser le “ou” comme on le souhaite sans se soucier de l’ordre, *à condition qu’il n’y ait pas d’autre connecteur logique.*

2.3.4 Connecteur logique “et”

Soient P et Q deux propositions. On peut alors définir la proposition “P et Q”, notée $P \wedge Q$ par la table de vérité ci-dessous :

Table 2.7 – Table de vérité de $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Le connecteur logique “et” fait ainsi penser à l’intersection d’ensembles, même dans sa notation.

On peut noter que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie.

On dispose de la commutativité :

Théorème 2.3.8 (Commutativité)**.** *Soient P et Q deux propositions. On a $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$.*

Exercice 2.3.9. *Démontrer le Théorème 2.3.8 à partir d’une table de vérité.*

On dispose aussi de l’associativité :

Théorème 2.3.10 (Associativité)**.** *Soient P, Q et R trois propositions. On a $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.*

Exercice 2.3.11. *Démontrer le Théorème 2.3.10 à partir d’une table de vérité.*

Les deux théorèmes qui viennent d’être énoncés signifient que l’on peut utiliser le “et” comme on le souhaite sans se soucier de l’ordre, *à condition qu’il n’y ait pas d’autre connecteur logique.*

2.3.5 Quelques propriétés

Théorème 2.3.12. *Soit P est une proposition. Alors :*
- $P \Leftrightarrow P \vee P$.
- $P \Leftrightarrow P \wedge P$.

Démonstration. $P \vee P$ et $P \wedge P$ sont vraies quand P est vrai et fausses sinon. Elles ont donc les mêmes valeurs de vérité. □

Exercice 2.3.13. *Démontrer le Théorème 2.3.12 en utilisant les tables de vérité.*

Présentons maintenant un résultat intuitif connu sous le nom de lois de Morgan :

Théorème 2.3.14. *Soient P et Q deux propositions. Alors :*
- $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$.
- $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$.

Démonstration. On démontre ces équivalences à l'aide des tables de vérité. On commence par la table de vérité de $\neg(P \wedge Q)$:

TABLE 2.8 – Table de vérité de $\neg(P \wedge Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

On fait désormais la table de vérité de $\neg P \vee \neg Q$:

TABLE 2.9 – Table de vérité de $\neg P \vee \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Et, on conclut en comparant les valeurs de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et $\neg P \vee \neg Q$:

TABLE 2.10 – Table de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et de $\neg P \vee \neg Q$

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

En faisant de même avec $\neg(P \vee Q)$ et de $\neg P \wedge \neg Q$, on obtient :

TABLE 2.11 – Table de vérité de $\neg(P \vee Q)$ et de $\neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

□

Remarque 2.3.15. *À partir de ces résultats, on en déduit que tout énoncé peut s'écrire en utilisant uniquement le connecteur $\wedge$ et la négation.*

On a vu précédemment que les connecteurs $\vee$ et $\wedge$ pouvaient être utilisés comme bon nous semble *à condition qu'il n'y ait que des $\vee$ ou que des $\wedge$.*

On peut donc se poser la question de comment se comportent les connecteurs logiques "et" et "ou" quand ils sont mélangés. On a ainsi une propriété de distributivité :

Théorème 2.3.16 (Distributivité)**.** *Soient P, Q et R trois propositions. On a*

- $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
- $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.

Démonstration. On peut démontrer ces deux équivalences à l'aide de tables de vérité :

TABLE 2.12 – Table de vérité de $(P \vee Q) \wedge R$ et de $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

et

TABLE 2.13 – Table de vérité de $(P \wedge Q) \vee R$ et de $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

□

2.3.6 Implication logique

Définition 2.3.17. *Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique $P \Rightarrow Q$ par sa table de vérité :*

TABLE 2.14 – Table de vérité de $P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 2.3.18. *Il convient de bien noter que Faux implique Vrai. En fait, Faux implique Tout. Également, il faut bien comprendre que ceci est une* définition.

Théorème 2.3.19. *Soient P et Q deux propositions. Alors*

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)\,.$$

Démonstration. $P \Rightarrow Q$ est fausse dans l'unique cas où P est vraie et Q est fausse ou encore quand $\neg P$ et Q sont toutes deux fausses. $P \Rightarrow Q$ a donc les mêmes valeurs de vérité que $(\neg P) \vee Q$. □

Exercice 2.3.20. *Démontrer le Théorème 2.3.19 à l'aide de tables de vérité.*

La règle suivante porte le nom de transitivité et est d'une importance capitale pour mener des démonstrations un tant soit peu élaborées.

Théorème 2.3.21. *Soient P, Q et R trois propositions. Alors, on a*

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\,. \tag{2.1}$$

Démonstration. On démontre ceci à l'aide d'une table de vérité en posant $S := (((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$:

TABLE 2.15 – Table de vérité de $S := (((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Ainsi, dans tous les cas, c'est vrai.

□

On peut lier l'implication et l'équivalence par le théorème suivant.

Théorème 2.3.22. *Soient P et Q deux propositions. Alors :*

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) .$$

Démonstration. Pour démontrer cette assertion, il suffit de vérifier que les deux propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ont les mêmes valeurs de vérité :

TABLE 2.16 – Table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Ainsi, une équivalence consiste en *deux* implications : l'une de gauche à droite et l'autre de droite à gauche. Conséquemment, quand on écrit $P \Leftrightarrow Q$, il convient de s'assurer que l'on a bien $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

2.3.6.1 Condition nécessaire et suffisante

Parfois, plutôt que d'écrire $P \Leftrightarrow Q$, on utilise des expressions en langue française :

- "Condition nécessaire et suffisante".
- "si et seulement si" dont on accepte l'abréviation "ssi".
- "Il faut et il suffit".

Ces trois expressions signifient toutes "logiquement équivalent".

Une question naturelle apparaît alors : à quoi cela sert-il d'utiliser ces expressions alors que c'est plus long à écrire ?

Il s'agit en fait d'éviter de mélanger les symboles mathématiques avec la langue française. Il peut effectivement être d'une grande aide de verbaliser en langue française pour comprendre ce que l'on cherche à démontrer.

Exemple 2.3.23. *On se donne la proposition suivante : ($n \geq 3$ et n premier)$\Rightarrow$ n impair.*

En langue française, cela donne : pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à trois, il est nécessaire que n soit impair ; voire n peut être un nombre premier supérieur ou égal à trois seulement si n est impair.

2.3.6.2 Négation, contraposée et réciproque

Théorème 2.3.24. *Soient P et Q deux propositions. Alors :*

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q)) \ .$$

Démonstration. On a $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow \neg\,(P \vee (\neg Q))$. Les lois de Morgan (Théorème 2.3.14 à la page 39) impliquent

$$\neg\,(P \vee (\neg Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg\neg Q)) \ .$$

Puis, comme $\neg(\neg Q) \Leftrightarrow Q$, le théorème est prouvé. □

Théorème 2.3.25. *Soient P et Q deux propositions. Alors :*

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \ .$$

Démonstration. La proposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est fausse si et seulement si $\neg Q$ est vraie et $\neg P$ est fausse, c'est-à-dire si et seulement si Q est fausse et P est vraie. Ainsi, $\neg Q \Rightarrow \neg P$ a les mêmes valeurs de vérité que $P \Rightarrow Q$. □

Définition 2.3.26. *Soient P et Q deux propositions. L'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$ s'appelle la contraposée (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

Exemple 2.3.27. *Le théorème de Pythagore stipule que si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2+BC^2$. La contraposée du théorème de Pythagore est la suivante : si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en C.*

D'après le Théorème 2.3.25, prouver l'implication ou prouver sa contraposée revient au même. On parle aussi de raisonnement par contraposée.

Il arrive que la contraposée et la réciproque soient confondus. Ce sont pourtant deux notions **essentiellement différentes**. Voyons maintenant la notion de réciproque d'une implication.

Définition 2.3.28. *Soient P et Q deux propositions. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la réciproque (ou l'implication réciproque) de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

Il s'agit en d'autres termes de l'implication qui, si on l'ajoute à la première donne une équivalence.

Exemple 2.3.29. *Le théorème de Pythagore stipule que si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$. La réciproque du théorème de Pythagore est la suivante : si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.*

2.4 Les quantificateurs

Les quantificateurs sont d'une importance capitale dès qu'une proposition dépend d'une variable x. On les voit maintenant.

2.4.1 Définition

On considère un ensemble E et $P(x)$ une proposition (dont on rappelle qu'elle peut être vraie ou fausse) dont les valeurs de vérité dépendent des éléments x de E.

Par exemple, considérons la proposition $P(x)$:="$x^2 = 4$" et $E := \mathbb{R}$. On ne peut pas dire que la phrase $x^2 = 4$ est vraie ou fausse avant de savoir ce que vaut x.

Définition 2.4.1. *Une proposition dont les valeurs de vérité sont fonctions d'une ou plusieurs variable(s) s'appelle un prédicat.*

Définition 2.4.2. *La lettre apparaissant après un quantificateur peut être remplacée par toute lettre n'apparaissant pas dans le prédicat. Cette variable (ou lettre) est une* variable muette.

Une variable muette peut se comprendre comme une variable locale en informatique : elle n'intervient que pour réaliser les calculs et son nom importe peu puisqu'elle disparaît à la fin de l'exécution du programme.

Le prédicat de l'exemple est vrai si et seulement si $x = 2$ ou $x = -2$. En d'autres termes, la proposition $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2$ ou $x = -2)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour abréger, on utilise le quantificateur $\forall$.

Définition 2.4.3. *La proposition "Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit en abrégé comme suit : "$\forall x \in E, P(x)$".*

Considérons maintenant la proposition "Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est fausse". On peut l'écrire "$\forall x \in E, \neg P(x)$". Cela signifie qu'il n'existe pas d'élément x de E tel que $P(x)$ est vraie. La négation de cette proposition est ainsi : "il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie".

Pour abréger, on utilise le quantificateur $\exists$.

Définition 2.4.4. *La proposition "Il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit en abrégé comme suit : "$\exists x \in E, P(x)$".*

Parfois, il peut n'y avoir qu'un seul élément x de E tel que $P(x)$ est vraie. Par exemple, si $P(x)$ est "$x^2 = 4$" avec $E := \mathbb{R}_+^*$, il n'y a bien qu'un seul réel positif tel que son carré vaut 4.

On utilise alors un autre quantificateur : $\exists!$.

Définition 2.4.5. *La proposition "Il existe un unique élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit en abrégé comme suit : "$\exists! x \in E, P(x)$".*

Remarque 2.4.6. $\forall$ *s'appelle le quantificateur universel tandis que* $\exists$ *s'appelle le quantificateur existentiel.*

2.4.2 Quantificateurs et négation

On va ici mélanger les quantificateurs et la négation. On commence par le cas où il y a une seule variable.

Théorème 2.4.7. *Soit un ensemble E et un prédicat $P(x)$ dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in E$. Alors :*
- $\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg P(x))$.
- $\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg P(x))$.

Le Théorème 2.4.7 est admis.

En d'autres termes, lorsque l'on prend la négation d'une proposition avec quantificateur, on échange $\forall$ et $\exists$.

De manière générale, on dispose du théorème suivant.

Théorème 2.4.8. *Pour prendre la négation d'une proposition écrite avec un nombre fini de quantificateurs et un prédicat, il suffit d'échanger,* en respectant les ordres*, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ et de les faire intervenir sur la négation du prédicat.*

Exemple 2.4.9. *Soient trois ensembles E, F et G et un prédicat $P(x, y, z)$ dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. Alors :*

$$\neg\left(\forall x \in E\ \exists y \in F\ \forall z \in G\ \ P(x, y, z)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in E\ \forall y \in F\ \exists z \in G\ \neg P(x, y, z)\right) .$$

2.4.3 Commutativité des quantificateurs (ou non)

On se donne à titre d'exemple un prédicat portant sur deux variables $x \in E$ et $y \in F$. On a alors les propriétés de commutativité suivantes :

$$(\forall x \in E\ \forall y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F\ \forall x \in E, P(x, y))$$

ainsi que

$$(\exists x \in E\ \exists y \in F, P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F\ \exists x \in E, P(x, y)) .$$

Ce qu'il faut retenir : on peut permuter des quantificateurs *de même nature.*

Il est alors naturel de se demander si l'on peut permuter $\forall$ et $\exists$. La réponse est *non.*

En effet :

$$(\exists x \in E\ \forall y \in F, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F\ \exists x \in E, P(x, y))$$

mais

$$(\exists x \in E\ \forall y \in F, P(x, y)) \not\Leftarrow (\forall y \in F\ \exists x \in E, P(x, y)) .$$

Dans la proposition de gauche, l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes avant les y et est donc constant quand y varie. Au contraire, dans la proposition de droite, l'élément x étant fourni après chaque y, il dépend de y et peut donc varier quand y varie.

Exemple 2.4.10. *Considérons par exemple* $P(x, y) :=$ "$x \times y = 0$" *avec* $E := \mathbb{R}$ *et* $F := \mathbb{R}$. *Alors, en effet, il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $x \times y = 0$. *Ce* x *en question est* 0.

Au contraire, si l'on prend $P(x, y) :=$ "$x + y = 0$" *avec* $E := \mathbb{R}$ *et* $F := \mathbb{R}$, *alors pour tout* $y \in \mathbb{R}$, *il existe* x *réel (et ce* x *est* $-y$ *: il dépend de* y*) tel que* $x + y = 0$. *Mais, il n'y a aucun* x *tel que pour tout* y *on ait* $x + y = 0$.

2.5 Les raisonnements classiques

Ici, on va développer quelques raisonnements classiques, sans pour autant être exhaustif.

2.5.1 Raisonnement déductif

On présente ici la règle du *modus ponens.*

Si P est une proposition vraie (donc un théorème) et si $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie (donc un théorème aussi), on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Il s'agit du raisonnement de base à reproduire quasiment à chaque fois.

2.5.2 Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie.

On suppose alors sa négation $\neg P$. Et, l'on montre que cela entraîne une proposition fausse Q. On en conclut alors que P est vraie. En effet, comme Q est fausse, l'implication $\neg P \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\neg P$ est fausse, c'est-à-dire si P est vraie.

2.5.3 Raisonnement par contraposition

Assez proche dans sa philosophie du raisonnement par l'absurde (et souvent confondu avec), le schéma du raisonnement par contraposition est le suivant.

Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il faut et il suffit de montrer que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie.

2.5.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est fondé sur la définition de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$.

On suppose que $P(n)$ est un prédicat dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer "$\forall n, P(n)$", on procède comme suit :

- Initialisation : on montre $P(0)$.
- Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour *un* $n \in \mathbb{N}$. On démontre alors que $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : on en déduit que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il existe des variantes à la récurrence : la récurrence finie, la récurrence complète, la récurrence descendante...

2.5.5 Raisonnement par contre-exemple

On cherche à infirmer une proposition de la forme $\forall x \in E, P(x)$. Il suffit alors d'exhiber un contre-exemple : on utilise alors tous les moyens mathématiquement rigoureux à notre disposition pour débusquer un élément x de E tel que $\neg P(x)$.

2.5.6 Raisonnement par Analyse-Synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est à utiliser pour déterminer les solutions d'un problème donné si le raisonnement avec des équivalences est impossible (ou juste délicat).

Dans la partie "analyse" (la première partie), on détermine les propriétés d'une éventuelle solution afin de limiter drastiquement les possibilités.

Dans la seconde partie, la "synthèse", on s'intéresse aux solutions obtenues dans l'analyse et l'on vérifie lesquelles sont effectivement solutions du problème initial.

On donne un exemple simple.

Exemple 2.5.1 (Décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire)**.** *Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.*

Analyse : *Supposons que f se décompose comme $g + h$ avec g paire et h impaire. On se donne $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = g(x) + h(x)$ et de même $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. On résout ensuite le système linéaire de deux équations à deux inconnues et l'on obtient $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.*

Synthèse : *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. La parité de g et l'imparité de h sont immédiates. De même, $g(x) + h(x) = \frac{(f(x)+f(-x))+(f(x)-f(-x))}{2} = f(x)$.*

De façon similaire, pour prouver qu'une matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, on procède par Analyse-Synthèse.

2.5.7 Disjonction de cas

On a :

$$((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))\ .$$

En guise d'exemple, on utilise ce raisonnement pour montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est pair.

Démonstration. Soit n un entier quelconque. Alors, n est impair ou n est pair.

Dans le cas où n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ d'où $n+1 = 2k+2$ et ainsi $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(k+1)(2k+1)$ est bien pair.

Dans le cas où n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ d'où $n+1 = 2k+1$ et ainsi $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2\,(k(2k+1))$ est bien pair.

Ainsi, en posant $P :=$ "n est impair", $Q :=$ "n est pair" ainsi que $R :=$ "$n(n+1)$ est pair", on dispose de $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$. Puis, on a $(P \vee Q) \Rightarrow R$. Or, $P \vee Q$ est vraie. La proposition R est alors vraie. $\square$

2.6 Erreurs classiques

Ici, on liste quelques erreurs classiques liées à la logique même.

- La première à laquelle nous pensons consiste à mal prendre la négation. Ainsi, le contraire de "ce chat est blanc" n'est pas "ce chat est noir" mais bien "ce chat n'est pas blanc". De même, le contraire de $x \leq 0$ n'est pas $x \geq 0$. C'est $x > 0$.
- Confondre l'implication et l'équivalence. Une équivalence est constituée de deux implications.
- Refuser la quantification (l'usage des quantificateurs). Par exemple, la phrase $\sin(x) \neq x$ est dépourvue de sens. Ou plutôt, elle n'a pas un sens précis. L'auteur voulait-il dire $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq x$ ou l'auteur voulait-il dire que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est diférente de la fonction $x \mapsto x$ auquel cas il s'agit de $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq x$. Pour éviter ce genre de confusions, tout résultat contenant une variable doit être *précédé* du quantificateur adéquat.
- Mal placer les quantificateurs. Par exemple, $\sin(x) \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$ n'est pas une phrase mathématiquement correcte.
- Croire que les propositions
$$\forall x \in E\ \exists y \in F, P(x,y)$$
et
$$\exists y \in F\ \forall x \in E, P(x,y)$$
sont les mêmes. On ne peut, en effet, pas permuter les quantificateurs de nature différente.
- Croire que l'on peut distribuer $\forall$ sur $\vee$. Ainsi, les phrases
$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$$

et

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$$

ne signifient pas la même chose. Donnons un exemple simple. On pose $f(x) := x$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon. De même, on pose $g(x) := x$ si $x \leq 0$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$; ce que l'on peut prouver par disjonction de cas. Pourtant, il existe $x_f \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_f) \neq 0$ et il existe $x_g \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_g) \neq 0$. Ainsi, $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ sont toutes deux fausses d'où $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ est fausse également. On peut par exemple prendre $x_f = 1$ et $x_g = -1$.

- Utiliser des quantificateurs interdits comme $\not\forall$ et $\nexists$.
- Utiliser des résultats pour lesquels on ne dispose pas de preuve.

2.7 Exercices

Exercice 1

Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- f est la fonction nulle où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- f est l'identité sur $\mathbb{R}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- f est croissante sur $\mathbb{R}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $\sin(x) = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Montrer : $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) = x$.

Exercice 3

Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- f n'est pas la fonction nulle où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- f n'est pas l'identité sur $\mathbb{R}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Écrire la négation des assertions suivantes :

- Tout entier naturel est plus grand que 5.
- Il existe un réel négatif.
- Pour tout $x \in E$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux prédicats.

Exercice 5

Démontrer $\neg P$ où P est la proposition “tous les nombres impairs sont premiers”.

Exercice 6

Soit n un entier naturel. Montrer que n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair.

Exercice 7

Montrer que pour tous les complexes a et b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,,$$

où $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chapitre 3

Calculs algébriques

Ce chapitre est d'un intérêt crucial. En effet, avec les rudiments de logique, il constitue l'une des deux jambes sur lesquelles nous allons nous appuyer.

Globalement, nous allons revoir certaines notions de lycée et les consolider avec des symboles d'un intérêt capital.

3.1 Vocabulaire

Avant d'entrer dans le vif du sujet, donnons quelques éléments de vocabulaire mathématique.

3.1.1 Quelques mots de liaison

Comme dit dans le chapitre précédent, on utilise la langue française pour exprimer les mathématiques. Néanmoins, certains mots sont plus importants que d'autres. Voyons ces mots importants en question.

- **Ainsi**. Signifie la conséquence.
- **D'après**. Sert à citer un résultat précédent.
- **Comme**. Introduit un argument.
- **Donc**. Exprime la conséquence ou la conclusion d'énoncés précédents.
- **D'où**. Exprime la conséquence ou la conclusion d'énoncés précédents.
- **Finalement**. Souligne le caractère conclusif.
- **Or**. Présente le fait qui explique ce qui suit.
- **Par conséquent**. Signifie la conséquence.
- **Conséquemment**. Signifie la conséquence.
- **Subséquemment**. Signifie la conséquence.
- **On en déduit**. Signifie la conséquence.
- **Il vient**. Signifie la conséquence.
- **Il s'ensuit**. Signifie la conséquence.

Remarque 3.1.1 (Orthographe)**.** *On n'écrit pas "il s'en suit" mais bien "il s'ensuit". Cela vient du verbe "s'ensuivre".*

3.1.2 Alphabet grec

En mathématiques, l'alphabet grec étant fortement utilisé, rappelons-le :

TABLE 3.1 – Alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom français
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
ζ	Z	dzêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi (se prononce Ksi)
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
φ	Φ	phi
χ	X	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

À noter que le phi minuscule se note parfois ϕ au lieu de φ.

3.2 Généralités

Une bonne maîtrise du calcul algébrique n'est pas une option en mathématiques. Procédons donc à quelques rappels.

3.2.1 Identités remarquables

Soient a et b deux réels (voire deux complexes). Alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab\,,\\ (a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Prouvons d'abord la première égalité. Pour ce faire, on utilise la distributivité du produit par rapport à l'addition, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 =&(a+b)(a+b)\\ =&a(a+b)+b(a+b)\\ =&a^2+ab+ba+b^2\,.\end{aligned}$$

Puis, la commutativité du produit nous dit que l'on a $ab+ba=ab+ab=2ab$ d'où

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab\,,$$

après avoir remarqué que l'on pouvait commuter les termes d'une somme finie. Posons $c := -b$. Alors :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 =&(a+c)^2\\ =&a^2+2ac+c^2\\ =&a^2+2a(-b)+(-b)^2\\ =&a^2-2ab+b^2\\ =&a^2+b^2-2ab\,.\end{aligned}$$

□

On a également

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2\,.$$

Démonstration. On utilise les propriétés algébriques élémentaires comme précédemment et l'on obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) =&a(a-b)+b(a-b)\\ =&a^2-ab+ba-b^2\\ =&a^2-ab+ab-b^2\\ =&a^2-b^2\,.\end{aligned}$$

□

Il est essentiel de pouvoir passer, **en un instant**, du membre de gauche au membre de droite et inversement du membre de droite au membre de gauche. Ceci est valable pour les trois identités remarquables présentées ci-dessus.

3.2.2 Somme des n premiers entiers

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

3.2.3 Somme des termes d'une suite géométrique

De même, si $a \neq 1$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\,. \tag{3.1}$$

3.2.4 Factorisation

De l'égalité (3.1), on peut en déduire la formule très pratique suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)\,. \tag{3.2}$$

Démonstration. D'abord, si $b = 0$ ou si $a = b$, l'égalité (3.2) est immédiate. Si, $b \neq 0$ et $b \neq a$, alors on a :

$$\begin{aligned} a^n - b^n =& b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1^n\right) \\ =& b^n\left(r^n - 1\right)\,, \end{aligned}$$

avec $r = \frac{a}{b} \neq 1$. Il vient :

$$\frac{r^n-1}{r-1} = 1 + \cdots + r^{n-1}\,.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} a^n - b^n =& b^n(r-1)\left(1 + \cdots + r^{n-1}\right) \\ =& (br - b)\left(b^{n-1} + b^{n-1}r + \cdots + b^{n-1}r^{n-1}\right) \\ =& (a-b)\left(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}\right) \\ =& (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)\,. \end{aligned}$$

□

Dans le cas où n est impair ($n = 2p+1$), on remarque $(-1)^{2p+1} = -1$ et l'on a alors :

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = a^{2p+1} - (-b)^{2p+1} = (a+b)\left(a^{2p} - a^{2p-1}b + \cdots - ab^{2p-1} + b^{2p}\right)\,.$$

3.3 Le symbole Σ

Dans certaines formules, on fait parfois une somme dont le nombre de termes n'est pas fixe. Par exemple, dans l'égalité (3.1), on a $n+1$ termes. C'est pourquoi on a utilisé des points de suspension. Néanmoins, cette notation n'est pas dénuée d'ambiguïté.

3.3.1 Définition

Soient n nombres complexes $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors, la somme de tous les nombres complexes $a_1, \cdots, a_n$ est notée

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

De manière plus générale, on peut considérer

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \cdots + a_n \,,$$

si $m \in [\![1;n]\!]$.

Remarque 3.3.1 (Nombre de termes)**.** *Dans la somme* $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$*, il y a* $n-m+1$ *termes et non pas* $n-m$*. De même, si l'indice de la somme commence à* 0*, alors il y a bien un terme de plus.*

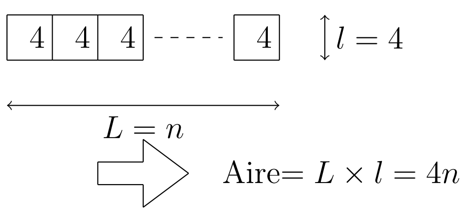
3.3.2 Somme de termes constants

L'exemple trivial suivant est d'une importance capitale.

$$\sum_{k=1}^{n} 4 = \underbrace{4 + \cdots + 4}_{n \text{ fois}} = 4n \,.$$

On peut l'illustrer avec l'image suivante :

FIGURE 3.1 – Somme de termes constants



Et, comme déjà précisé plus haut : $\sum_{k=0}^{n} 4 = 4(n+1)$. De manière générale, $\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$ et $\sum_{k=0}^{n} \lambda = (n+1)\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.3.3 Linéarité de la somme

Donnons-nous deux suites de nombres complexes $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k \,.$$

Pour obtenir cette égalité, on se sert de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{C}$ et de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Également, il est important de bien comprendre que cette égalité n'a été présentée que pour des sommes finies. Si les sommes ne sont pas finies, des phénomènes étranges peuvent se produire.

3.3.4 Progression arithmétique

La formule $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se réécrit donc $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

De manière plus générale, on a $\sum_{k=0}^{n-1} (ak + b) = nb + a\frac{n(n-1)}{2}$.

3.3.5 Progression géométrique

On peut aussi réécrire la formule (3.1) pour $a \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \,.$$

3.3.6 Sommes télescopiques

Dans la plupart des cas, on ne peut exprimer une somme de façon simple. C'est pourquoi il convient de se délecter des situations où l'on peut effectuer une telle simplification.

Une telle situation est celle des sommes télescopiques.

On se donne une suite de complexes $(b_n)_n$. On introduit la suite de complexes $(a_n)_n$ avec $a_n := b_{n+1} - b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, on dispose de la simplification suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_0 \,,$$

vu que les termes $b_1, \cdots, b_n$ se simplifient.

On peut établir cette formule par récurrence. On peut aussi faire comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} b_k - \sum_{k=0}^{n} b_k\\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + b_{n+1}\right) - \left(b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k\right)\\ &= b_{n+1} - b_0\,.\end{aligned}$$

Ici, on fait un changement de variable à la troisième ligne.

3.4 Le symbole $\prod$

3.4.1 Définition

De la même manière que pour la somme de n termes, on peut simplifier le produit de n facteurs.

Soient n nombres complexes $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors, le produit de tous les nombres complexes $a_1, \cdots, a_n$ est noté

$$\prod_{k=1}^{n} a_k\,.$$

3.4.2 Produit de facteurs constants

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. L'exemple trivial suivant est d'une importance capitale.

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha \times \cdots \times \alpha}_{n \text{ fois}} = \alpha^n\,.$$

3.4.3 Produits télescopiques

Comme pour la somme, on peut faire un produit télescopique.

On se donne une suite de complexes non nuls $(b_n)_n$. On introduit la suite de complexes $(a_n)_n$ avec $a_n := \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, on dispose de la simplification suivante :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \frac{b_{n+1}}{b_0}\,, \tag{3.3}$$

vu que les termes $b_1, \cdots, b_n$ se simplifient.

Exercice 3.4.1. *Démontrer la formule* (3.3) *par récurrence.*

On peut aussi obtenir la formule en utilisant les sommes télescopiques pour peu que $b_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, dans ce cas, on peut définir le logarithme népérien de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de même avec b_n. Ainsi :

$$\begin{aligned}\log\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) &= \sum_{k=0}^{n} \log(a_k) = \sum_{k=0}^{n} (\log(b_{k+1}) - \log(b_k)) \\ &= \log(b_{n+1}) - \log(b_0) \\ &= \log\left(\frac{b_{n+1}}{b_0}\right).\end{aligned}$$

La formule (3.3) s'obtient en prenant l'exponentielle.

3.5 Factorielle d'un entier naturel

Un produit classique est la factorielle d'un entier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, la factorielle de n est

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

Quelques factorielles à connaître par cœur : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$.

Par ailleurs, on pose $0! := 1$. En effet, la quantité $0!$ est un produit sur un ensemble de facteurs qui est vide. Il correspond ainsi à l'élément neutre pour la multiplication, à savoir 1.

Exemple 3.5.1 (Produit des premiers entiers pairs non nuls)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n := \prod_{k=1}^{n}(2k)$, le produit des n premiers entiers pairs non nuls. Alors, la commutativité du produit implique*

$$P_n = \left(\underbrace{\prod_{k=1}^{n} 2}_{=2^n}\right) \times \left(\underbrace{\prod_{k=1}^{n} k}_{=n!}\right) = 2^n n!.$$

Exemple 3.5.2 (Produit des premiers entiers impairs)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_n := \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$, le produit des n premiers entiers impairs. Alors, on remarque :*

$$\begin{aligned} P_n \times Q_n =& \left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right) \\ =& \prod_{p=1}^{2n} p \\ =& (2n)!\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit $Q_n = \frac{(2n)!}{P_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

3.6 Congruences

Soit un nombre réel $r > 0$.

Soient maintenant deux réels x et y. Alors x est dit congru à y modulo r si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kr$. On écrit alors $x \equiv y \pmod{r}$.

Bien qu'il y ait de nombreuses applications de la congruence (en arithmétique notamment), la première à laquelle on pense est la trignométrie.

La congruence simplifie en effet la formulation de certaines formules trigonométriques. Par exemple, on sait que $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si $x \equiv y \pmod{2\pi}$ ou $x \equiv -y \pmod{2\pi}$.

Donnons quelques propriétés de la congruence.

- On peut additionner deux congruences de même module. Si $x \equiv y \pmod{a}$ et si $x' \equiv y' \pmod{a}$ alors $x + x' \equiv y + y' \pmod{a}$.
- On peut multiplier une congruence par un réel non nul **sans oublier de multiplier aussi le module**. Si $x \equiv y \pmod{a}$ alors $\alpha x \equiv \alpha y \pmod{\alpha a}$ si $\alpha \neq 0$.
- Une congruence modulo un réel a non nul implique une congruence modulo $\frac{a}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, si deux réels sont congrus modulo 4π, ils le sont aussi modulo 2π.

3.7 Inégalités et inéquations

Bien que la manipulation des inégalités ne soit pas difficile, elle demande du soin pour éviter des erreurs grossières.

Voici les deux règles essentielles :

- Si on multiplie une inégalité par un nombre réel strictement positif, on ne change pas le sens de l'inégalité.
- Si on multiplie une inégalité par un nombre réel strictement négatif, on change le sens de l'inégalité.

Une règle tacite consiste donc à bien factoriser l'expression pour étudier plus facilement son signe.

Remarque 3.7.1. *Il n'y a pas de relation d'ordre* intéressante *dans* $\mathbb{C}$*. Dit autrement, on n'utilise jamais de relation d'ordre dans* $\mathbb{C}$*. Cela dit, il existe bien une relation d'ordre totale sur* $\mathbb{C}$ *: on pense à la relation d'ordre lexicographique. Toutefois, celle-ci n'est pas compatible avec la somme et le produit. Elle n'a donc qu'un intérêt très limité.*

3.8 Trinôme réel du second degré

On termine ce chapitre par quelques rappels sur le trinôme du second degré réel.

On se donne trois réels a, b, c avec $a \neq 0$. On introduit la fonction f définie par $f(x) := ax^2+bx+c$. Pour étudier son signe ainsi que son minimum (respectivement son maximum) si $a > 0$ (respectivement si $a < 0$), on utilise la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right),$$

où $\Delta := b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant.

Démonstration. Comme $a \neq 0$, il vient $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Toute l'idée est ensuite de reconnaître une identité remarquable :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x =& x^2 + 2\frac{b}{2a}x \\ =& x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ =& \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la ruse classique du mathématicien (ajouter une quantité et la retrancher en même temps).

On en déduit :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ =& a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ =& a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\ =& a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

□

On voit ainsi trois cas apparaître naturellement :

- Si $\Delta = 0$, alors l'expression $f(x)$ est factorisée et la fonction n'admet ainsi qu'une seule racine : $-\frac{b}{2a}$. De plus, l'extremum (maximum si $a > 0$ et minimum si $a < 0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et vaut 0.
- Si $\Delta > 0$, alors en utilisant une identité remarquable (à savoir $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$), on a deux racines réelles distinctes : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus, l'extremum (maximum si $a > 0$ et minimum si $a < 0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et vaut $-\frac{\Delta}{4a}$.
- Si $\Delta < 0$, on peut à nouveau utiliser une identité remarquable mais l'on a cette fois deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. De plus, l'extremum (maximum si $a > 0$ et minimum si $a < 0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et vaut $-\frac{\Delta}{4a}$.

3.9 Exercices

Exercice 1

1. Calculer (sans calculatrice) 4!, 5!, 10! et $A := \frac{43!5!}{7!41!}$.
2. Comparer $2! + 3!$ avec $5!$ puis $3! \times 4!$ avec $12!$.
3. Simplifier $\frac{n!}{(n-1)!}$ et $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$.
4. On rappelle que l'on a $\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}$ pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
5. Exprimer la fraction $\frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$ sans utiliser les pointillés. Puis, donner une expression en fonction de n de la fraction.

Exercice 2

On rappelle la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
1. Démontrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
2. En développant $(x+1)^2$ et en remplaçant x par $1, \cdots, n$, en déduire que l'on a $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ où $S_1(n) := \sum_{k=1}^n k$. Indication : on utilisera une somme télescopique.
3. Faire de même pour $S_2(n) := \sum_{k=1}^n k^2$ avec $(x+1)^3$.
4. Faire de même pour $S_3(n) := \sum_{k=1}^n k^3$ avec $(x+1)^4$.

Exercice 3

Démontrer que $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \in [\![1;n]\!]$ et en déduire la somme $\sum_{p=0}^n p\binom{n}{p}$.

Exercice 4

Démontrer que $\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}$ et en déduire $S_1(n) := \sum_{k=1}^{n} k$ ainsi que $P_1(n) := \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

Exercice 5

Calculer (sans calculatrice) les nombres suivants : 99^3, 998^2, 13^4, 102^3, $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ et $\left(\frac{7}{6}\right)^3$.

Exercice 6

Simplifier les expressions

$$A := \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2}$$

et

$$B := (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\,.$$

Chapitre 4

Ensembles

4.1 Définition

Définition 4.1.1 (Ensemble)**.** *On appelle ensemble toute collection d'objets, ces objets étant appelés "éléments de l'ensemble". Ce qui caractérise le fait qu'une collection d'objets est un ensemble est que pour tout objet que l'on peut considérer, cet objet est ou n'est pas élément de l'ensemble.*

Exemple 4.1.2. *L'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne (TSE). On sait reconnaître si quelqu'un est un étudiant de TSE ou ne l'est pas.*

Cantor utilisait les lettres majuscules pour les ensembles et les lettres minuscules pour les éléments d'ensembles. Nous ferons ici comme lui. Remarquons que les éléments d'un ensemble peuvent eux-mêmes être des ensembles...

4.2 Vocabulaire, notations

Notation 4.2.1 (Appartenance)**.** *Soit E un ensemble. Soit a un objet.*
Si a est élément de E, on note $a \in E$.
Si a n'est pas un élément de E, on note $a \notin E$.

Définition 4.2.2. *On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tout élément de A appartient à B. Plus formellement, A est inclus dans B lorsque*

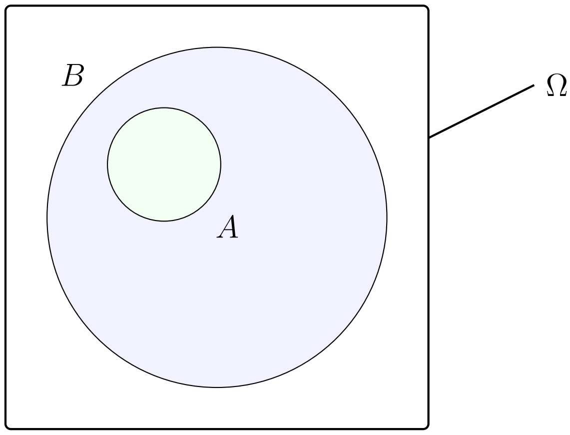
$$\forall \omega \in A\,,\ \omega \in B\,.$$

Remarque 4.2.3. *On dit aussi que B contient A ou que A est un sous-ensemble de B.*

Notation 4.2.4. *Si A est un sous-ensemble de B, on note : $A \subset B$.*
On peut aussi trouver la notation $B \supset A$.

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn (les fameux diagrammes avec les patates) pour se représenter l'inclusion d'un ensemble dans un autre :

FIGURE 4.1 – Inclusion d'un ensemble



Exemple 4.2.5. *Soit B l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne et A l'ensemble des FISE1 de Télécom Saint-Étienne. Alors, A est inclus dans B c'est-à-dire que l'on a $A \subset B$.*

Théorème 4.2.6. *Soient deux ensembles A et B. Alors, $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Remarque 4.2.7. *Ceci est à rapprocher de la formule*

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

sur l'implication et l'équivalence, voir à la page 43 au Chapitre 2.

4.2.1 Ensemble vide

Définition 4.2.8. *On définit l'ensemble vide comme étant l'ensemble qui ne contient aucun élément.*

Notation 4.2.9. *L'ensemble vide est noté $\emptyset$.*

Remarque 4.2.10. *Il ne faut pas confondre l'ensemble vide ($\emptyset$) avec le zéro (0). On a coutume de dire : "Être nul, c'est déjà exister".*

Notons que certaines axiomatiques permettent de recréer les mathématiques à partir de l'ensemble vide.

Définition 4.2.11 (Ensemble des parties d'un ensemble)**.** *Soit E un ensemble. Soit F un autre ensemble. On peut reconnaître si F est inclus dans E ou non. Si $F \subset E$, alors F est dit élément de $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E, ensemble des ensembles qui sont inclus dans E. On le note également 2^E ; vu qu'il est en bijection avec l'ensemble des applications de $\{0; 1\}$ dans E, ce dernier étant de cardinal 2^n si E est de cardinal n fini.*

Proposition 4.2.12. *$F \subset E \Longleftrightarrow \forall a \in F, a \in E \Longleftrightarrow F \in \mathcal{P}(E)$.*

Soit F un ensemble. Alors $F \notin \mathcal{P}(E)$ si et seulement s'il existe au moins un élément de F qui n'est pas un élément de E.

Proposition 4.2.13. *Il y a toujours au moins deux ensembles dans $\mathcal{P}(E)$: E et $\emptyset$ (l'ensemble sans élément, ensemble vide).*

En particulier, $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$. Ainsi, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Définition 4.2.14 (Produit cartésien de deux ensembles)**.** *Soient deux ensembles E et F. Leur produit cartésien, noté $E \times F$ est égal à $\{(x, y) \ : \ x \in E, \, y \in F\}$.*

4.3 Opérations sur les parties d'un ensemble

Les mathématiques sont une science logico-formelle. Nous présentons donc maintenant les opérations logiques élémentaires, traduites en langage ensembliste.

4.3.1 Intersection de deux ensembles

Définition 4.3.1. *On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments communs à A et à B.*

Notation 4.3.2. *L'intersection de deux ensembles A et B est notée $A \cap B$.*

Plus formellement, on peut écrire :

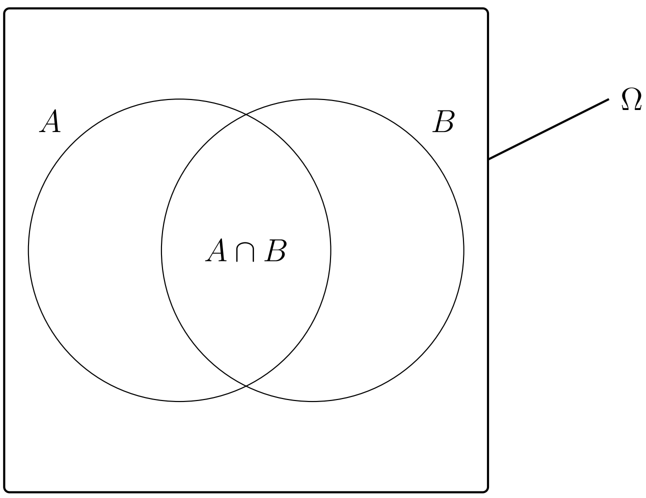
$$A \cap B = \{\omega \ : \ \omega \in A \, , \omega \in B\}$$

ou

$$\omega \in A \cap B \iff \omega \in A \text{ et } \omega \in B \, .$$

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter l'intersection de deux ensembles :

FIGURE 4.2 – Intersection de deux ensembles



Exemple 4.3.3 (Ensemble fini petit)**.** *Soit* $\Omega := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ *un ensemble de lettres. Soient les deux sous-ensembles de* Ω *:* $A := \{a, b, c, d, e\}$ *et* $B := \{c, d, e, f, g\}$*. Alors, on a :* $A \cap B = \{c, d, e\}$*.*

Exemple 4.3.4 (Ensemble fini grand)**.** *Soit* Ω *l'ensemble des ingénieurs formés en France. Soit* A *le sous-ensemble des ingénieurs exerçant dans l'industrie. Soit* B *l'ensemble des ingénieurs diplômés de TSE. Alors,* $A \cap B$ *est l'ensemble des ingénieurs diplômés de TSE qui travaillent dans l'industrie.*

Définition 4.3.5 (Ensembles disjoints)**.** *On dit que deux ensembles* A *et* B *sont disjoints lorsque leur intersection est vide : ils n'ont aucun élément en commun. En d'autres termes, on dit que* A *et* B *sont disjoints si l'on a* $A \cap B = \emptyset$*.*

Exemple 4.3.6. *Les deux ensembles* $A := [0; 1]$ *et* $B :=]1; 2]$ *sont disjoints. En effet,* $A \cap B = \emptyset$*.*

Notation 4.3.7. *Si* I *est un ensemble non vide et* $(A_i)_{i \in I}$ *est une sous-famille de sous-ensembles de* Ω*, on pose :*

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega \ : \ \forall i \in I, \omega \in A_i\} \ .$$

On présente maintenant les propriétés basiques de l'intersection.

Proposition 4.3.8 (Commutativité)**.** *Soient deux ensembles* A *et* B*. Alors*

$$A \cap B = B \cap A \, .$$

Proposition 4.3.9 (Associativité)**.** *Soient trois ensembles* A*,* B *et* C*.*
Alors :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C \, .$$

En résumé, si l'on n'a **que** des intersections, on peut mettre les ensembles dans l'ordre que l'on veut.

Proposition 4.3.10. *Soit un ensemble* A*. Alors, on a* $A \cap A = A$*.*

Proposition 4.3.11. *Soit un ensemble* A*. Alors, on a* $A \cap \emptyset = \emptyset$*.*

4.3.2 Réunion de deux ensembles

Définition 4.3.12. *On appelle réunion de deux ensembles* A *et* B *l'ensemble des éléments qui sont dans* A *ou (au sens inclusif) qui sont dans* B*.*

Notation 4.3.13. *La réunion de deux ensembles* A *et* B *est notée* $A \cup B$*.*

Plus formellement, on peut écrire :

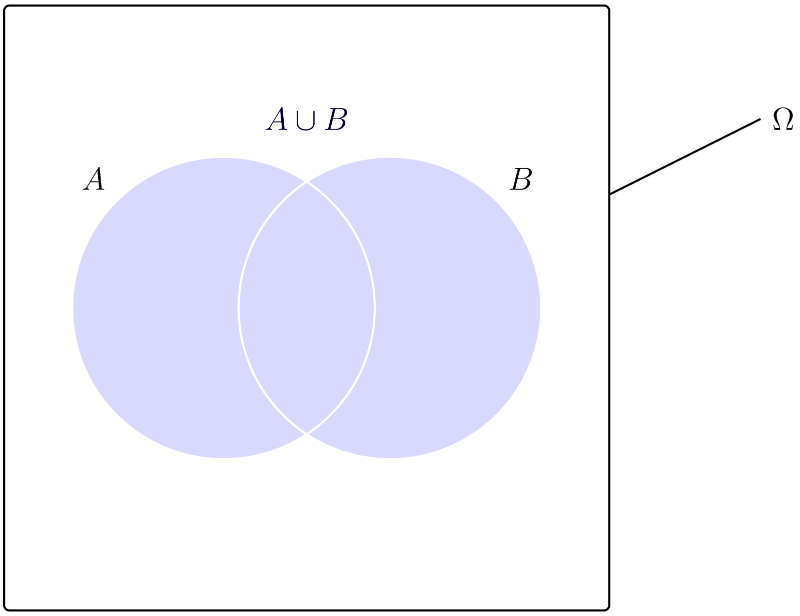
$$A \cup B = \{\omega \ : \ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

ou

$$\omega \in A \cup B \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\,.$$

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter la réunion de deux ensembles :

FIGURE 4.3 – Réunion de deux ensembles



On remarque dans ce diagramme que l'on a

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B\,.$$

Exemple 4.3.14 (Ensembles finis petits)**.** *Soient les deux ensembles de lettres :* $A := \{a, b, c, d, e\}$ *et* $B := \{c, d, e, f, g\}$*. Alors, on a :* $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$*.*

Exemple 4.3.15 (Ensembles finis grands)**.** *Soit* A *l'ensemble des ingénieurs diplômés de TSE et soit* B *l'ensemble des ingénieurs exerçant dans l'industrie. Alors* $A \cup B$ *est l'ensemble des ingénieurs qui travaillent dans l'industrie ou qui sont diplômés de TSE.*

Notation 4.3.16. *Si* I *est un ensemble non vide et* $(A_i)_{i \in I}$ *est une sous-famille de sous-ensembles de* Ω*, on pose :*

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega \ : \ \exists i \in I, \omega \in A_i\}\ .$$

On présente maintenant les propriétés basiques de la réunion.

Proposition 4.3.17 (Commutativité)**.** *Soient deux ensembles A et B. Alors $A \cup B = B \cup A$.*

Proposition 4.3.18 (Associativité)**.** *Soient trois ensembles A, B et C. Alors :*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C\,.$$

En résumé, si l'on n'a **que** des réunions, on peut mettre les ensembles dans l'ordre que l'on veut.

Proposition 4.3.19. *Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cup A = A$.*

Proposition 4.3.20. *Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cup \emptyset = A$.*

En quelque sorte, $\emptyset$ est l'élément neutre pour la réunion ; tandis que Ω est celui de l'intersection.

4.3.3 Propriétés de distributivité

Nous avons vu les propriétés de la réunion et celles de l'intersection. Nous présentons maintenant les propriétés de l'intersection par rapport à la réunion et réciproquement les propriétés de la réunion par rapport à l'intersection. Considérons trois ensembles A, B et C quelconques, tous inclus dans un ensemble Ω. Alors :

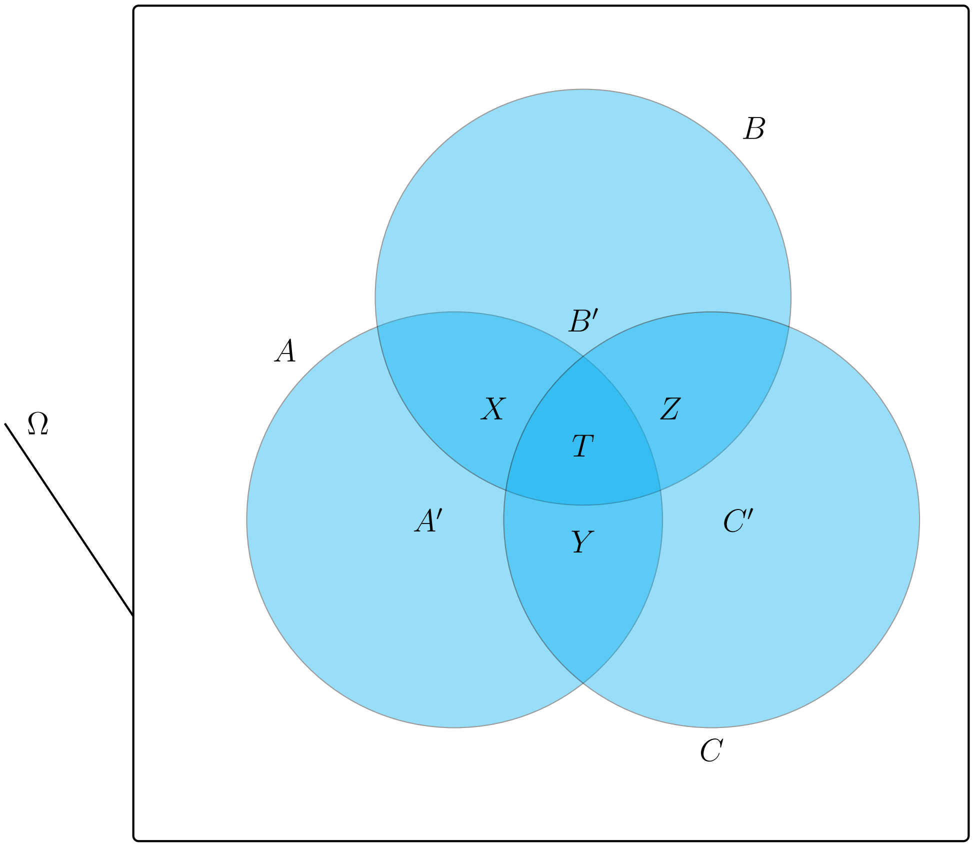
Proposition 4.3.21. *L'intersection est distributive par rapport à la réunion :*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\ .$$

Démonstration. Prouvons d'abord $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Par définition, ω appartient à A. De même, ω appartient à $B \cup C$. Ainsi, ω appartient à B ou il appartient à C. Si ω appartient à B, alors $\omega \in A \cap B$ d'où $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Si ω appartient à C, alors $\omega \in A \cap C$ d'où $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Prouvons maintenant $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors, $\omega \in A \cap B$ ou $\omega \in A \cap C$. Si $\omega \in A \cap B$, alors $\omega \in A$. Mais aussi, $\omega \in B \subset B \cup C$. Donc $\omega \in A \cap (B \cup C)$. De même, si $\omega \in A \cap C$, alors $\omega \in A$. Mais aussi, $\omega \in C \subset B \cup C$. Donc $\omega \in A \cap (B \cup C)$.
La preuve est achevée en appliquant le Théorème 4.2.6. $\square$

Cette propriété se voit bien lorsque l'on regarde sur des diagrammes de Venn :

FIGURE 4.4 – Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion



On constate que $B \cup C$ correspond à l'union des ensembles disjoints X, Y, Z, T, B' et C'. Puis, $A \cap (B \cup C)$ correspond à l'union des ensembles disjoints X, Y et T.

Inversement, $A \cap B$ correspond à l'union des ensembles disjoints X et T. Et, $A \cap C$ correspond à celle des ensembles Y et T d'où l'union $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ correspond à l'union des ensembles disjoints X, Y et T.

Proposition 4.3.22. *La réunion est distributive par rapport à l'intersection :*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ .$$

Démonstration. Prouvons d'abord $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Soit $\omega \in A \cup (B \cap C)$. Par définition, ω appartient à A ou ω appartient à $B \cap C$. Si $\omega \in A$, alors $\omega \in A \cup B$ et $\omega \in A \cup C$. Ainsi, on a $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Si $\omega \in B \cap C$, alors $\omega \in B \subset A \cup B$ et $\omega \in C \subset A \cup C$. Ainsi, on a $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Prouvons maintenant $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Soit $\omega \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Par définition, $\omega \in A \cup B$. Donc ω appartient à A ou ω appartient à B. Si $\omega \in A$, alors $\omega \in A \cup (B \cap C)$. Si $\omega \notin A$, alors $\omega \in B$. Or, $\omega \in A \cap C$. Comme $\omega \notin A$, on a $\omega \in C$ d'où $\omega \in B \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

La preuve est achevée en appliquant le Théorème 4.2.6. $\square$

4.3.4 Complémentaire d'un sous-ensemble

Définition 4.3.23. *Soit un ensemble Ω (comme l'univers des évènements en probabilités). Soit A un sous-ensemble de Ω.*
On appelle complémentaire de A dans Ω l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Remarque 4.3.24. *On dira "complémentaire de A" pour simplifier.*

Notation 4.3.25. *Le complémentaire de A est noté $\overline{A}$ ou A^c.*

On préfère la notation A^c car $\overline{A}$ désigne la fermeture (l'adhérence) de A en topologie, voir pages 442 et 421.
Plus formellement, on a :

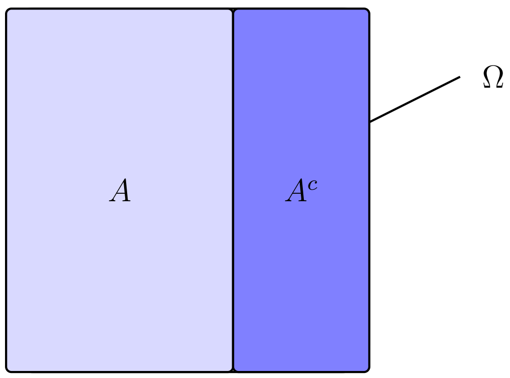
$$A^c = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \notin A\}$$

ou

$$\forall \omega \in \Omega\,, \quad \omega \in A^c \iff \omega \notin A\,.$$

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter le complémentaire d'un sous-ensemble :

Figure 4.5 – Complémentaire d'un sous-ensemble



On présente maintenant les propriétés classiques de la complémentation. On utilise ici la notation $\overline{A}$ pour des raisons de facilité d'écriture.

Proposition 4.3.26. *Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω.*
Alors, $\overline{\overline{A}} = A$.

Proposition 4.3.27. *Soit un ensemble Ω.*
Alors, $\overline{\Omega} = \emptyset$. De même, on a $\overline{\emptyset} = \Omega$.

Proposition 4.3.28. *Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω.*
Alors, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Les lois de Morgan que nous avons vues pour la logique dans le Chapitre 2 s'expriment également avec les ensembles.

Théorème 4.3.29 (Lois de Morgan)**.** *Soit un ensemble Ω et soient A et B deux sous-ensembles de Ω.*
Alors, on a

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{4.1}$$

et

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,. \tag{4.2}$$

Les Relations (4.1) et (4.2) s'illustrent particulièrement bien en regardant les diagrammes de Venn associés. On regarde ici la relation (4.1)

Exercice 4.3.30. *Prouver* (4.2) *avec des diagrammes de Venn.*

Exercice 4.3.31. *Démontrer rigoureusement (sans diagramme de Venn) le Théorème 4.3.29.*

Exemple 4.3.32. *Soit $\Omega := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ un ensemble de lettres. Soient les deux sous-ensembles de Ω : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$.*
Alors, on a $A^c = \{f, g, h, i\}$ et $B^c = \{a, b, h, i\}$.
Mais aussi, $A \cap B = \{c, d, e\}$ et $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.
Enfin, on a

$$A^c \cap B^c = \{h, i\} = (A \cup B)^c$$

ainsi que

$$A^c \cup B^c = \{a, b, f, g, h, i\} = (A \cap B)^c\ .$$

4.4 Partition d'un ensemble

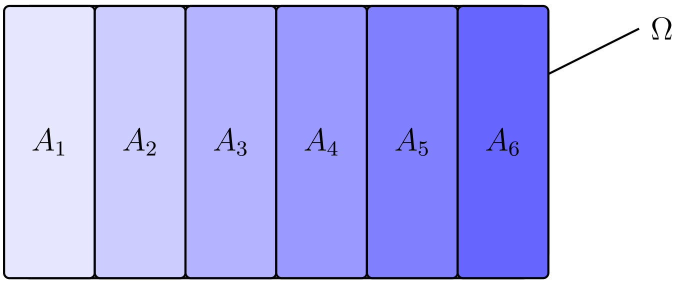
Définition 4.4.1. *Soit Ω un ensemble. Soient n sous-ensembles : $A_1, \cdots, A_n$. On dit qu'ils forment une partition de Ω s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est égale à Ω.*

Plus formellement, $(A_1, \cdots, A_n)$ est une partition de Ω si et seulement si

$$A_k \cap A_p = \emptyset \quad \text{si } \ k \neq p \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega\,.$$

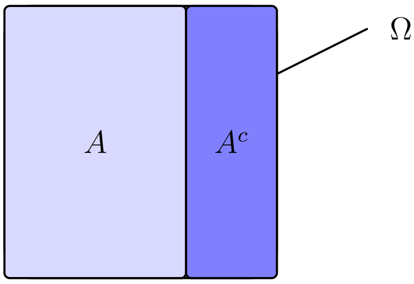
Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter la partition d'un ensemble :

FIGURE 4.6 – Partition d'un ensemble



Exemple 4.4.2 (Cas particulier de partition)**.** *Soit Ω un ensemble. Soit A un sous-ensemble de Ω. Alors (A, A^c) est une partition de Ω. En effet, on a $A \cap A^c = \emptyset$ et $A \cup A^c = \Omega$ par définition. Regardons cela sur un diagramme de Venn :*

FIGURE 4.7 – Partition particulière d'un ensemble



4.5 Exercices

Exercice 1

Soit $E := \{1; 3\}$. Déterminer $F := 2^E$ puis $G := 2^F$.

Exercice 2

Soit un ensemble Ω et deux sous-ensembles A et B. On suppose $A \subset B$. Montrer que $B^c \subset A^c$.

Exercice 3

Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0; \frac{1}{n}[$.

Exercice 4

Déterminer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0; 1 - \frac{1}{n}]$.

Exercice 5

Soient $\Omega_1 := \{1; 2; 4\}$ et $\Omega := \{3; 5\}$. Déterminer $\Omega_1 \times \Omega_2$ puis $\Omega_2 \times \Omega_1$

Exercice 6

Soit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x - y = 1\}$ et $B := \{(t + 1, 4t + 3) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 7

Soit Ω un ensemble. Soient A, B, C trois éléments de 2^Ω.

1. Démontrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.

2. Démontrer que si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$.

Chapitre 5

Applications et relations

5.1 Applications

5.1.1 Premières définitions

On commence par donner la définition générale (et théorique) de ce qu'est une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F.

Définition 5.1.1. *Soient E et F deux ensembles. On connait alors le produit cartésien $E \times F$. Soit G une partie de $E \times F$ c'est-à-dire un sous-ensemble de $E \times F$. On dit que G est le graphe d'une fonction de E vers F si et seulement si*

$$\forall x \in E, \{y \in F \ : \ (x,y) \in G\} = \emptyset \text{ ou } \{y \in F \ : \ (x,y) \in G\} = \{y_x\}.$$

On peut alors dire que la fonction f est définie par la donnée de E (l'ensemble de départ), de F (l'ensemble d'arrivée) et celle de G (graphe de f) que l'on note $G = G_f$.

Définition 5.1.2. *L'ensemble de définition D_f de la fonction f de E vers F est :*

$$D_f := \{x \in E \ : \ \{y \in F \ : \ (x,y) \in G\} \neq \emptyset\}.$$

On note que D_f est inclus dans E.

Définition 5.1.3. *En toute rigueur, une fonction est une application si et seulement si $D_f = E$ (f est alors dite partout définie).*

On peut donc dire que toute fonction est une application de D_f vers F.
En pratique, on confond "fonction" et "application".

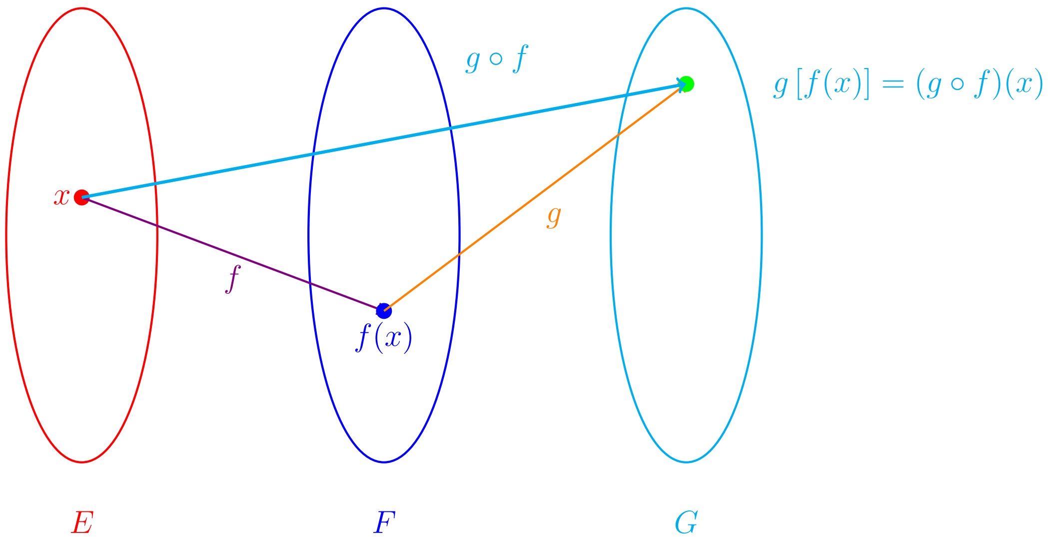
Définition 5.1.4. *Deux fonctions f_1 (définie par E_1, F_1 et G_1) et f_2 (définie par E_2, F_2 et G_2) sont égales si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ et $G_1 = G_2$.*

Notation 5.1.5. *L'ensemble des applications de l'ensemble E vers l'ensemble F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.*

Exemple 5.1.6. *Si $E = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $E^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E.*

Définition 5.1.7. *Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Alors, on définit l'application $g \circ f$ comme suit. $g \circ f$ admet E pour ensemble de départ, G pour ensemble d'arrivée et $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ pour tout $x \in E$.*

FIGURE 5.1 – Composition de deux applications



5.1.2 Propriété des applications

On commence par un exemple introductif : celui d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Voir le Chapitre 35 pour plus de détails.

On se donne ω un réel strictement positif et l'on considère l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = 0\,.$$

Résoudre l'équation, c'est déterminer l'ensemble des fonctions, notées y, définies, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$. Dans ce cas, E est l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Ici, F est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Ici, l'application sous-jacente est f de E dans F telle que

$$f(y) := y'' + \omega^2 y\,.$$

Des propriétés de l'application f pourront aider à résoudre certaines équations. Dans le cas présent, la linéarité de l'application f sur les espaces vectoriels E et F (voir le Chapitre 15 pour plus de détails) est essentielle.

Définition 5.1.8 (Injectivité). *Soient deux ensembles E et F et f une application de E vers F. On dira que f est injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent par f. En d'autres termes :*

$$\forall y \in F, \{x \in E \ : \ f(x) = y\} = \emptyset \ ou \ \{x \in E \ : \ f(x) = y\} = \{x_y\} \, .$$

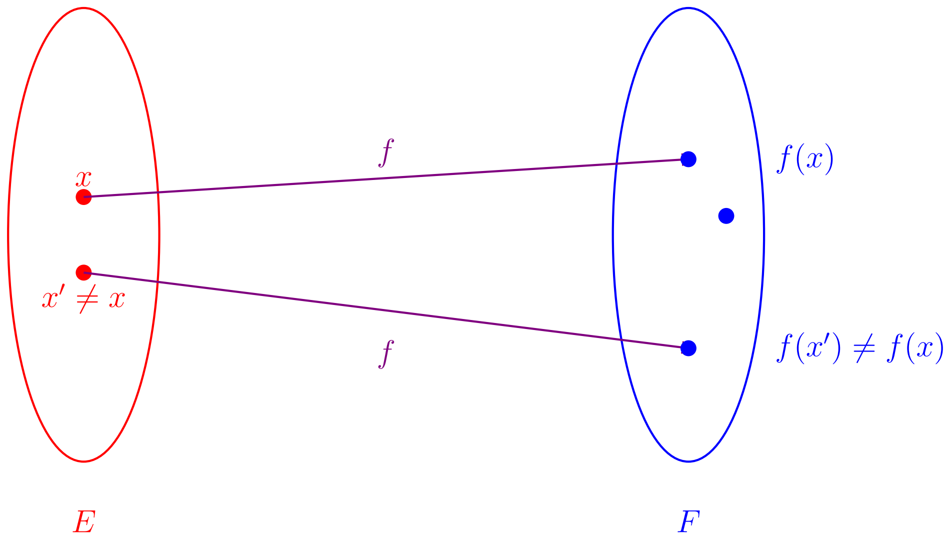
L'injectivité signifie également :

$$\forall (x, x') \in E^2, \ (f(x) = f(x')) \Leftrightarrow (x = x')$$

ce qui équivaut à

$$\forall (x, x') \in E^2, \ (x \neq x') \Leftrightarrow (f(x) \neq f(x')) \, .$$

FIGURE 5.2 – Injectivité d'une application



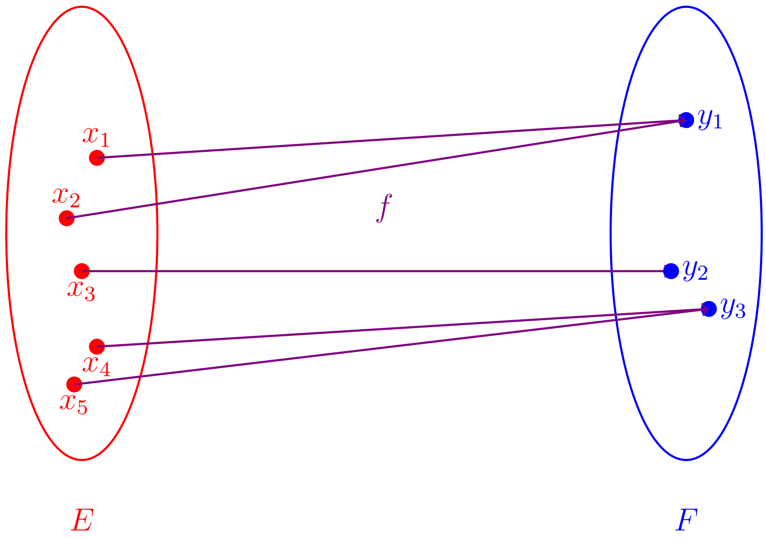
Exemple 5.1.9. *L'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) := x^2$ est injective.*

Exemple 5.1.10. *L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) := x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$ bien que 1 et -1 soient différents.*

Définition 5.1.11 (Surjectivité). *Soient deux ensembles E et F et f une application de E vers F. On dira que f est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f. En d'autres termes :*

$$\forall y \in F, \{x \in E \ : \ f(x) = y\} \neq \emptyset \, .$$

FIGURE 5.3 – Surjectivité d'une application



Exemple 5.1.12. *L'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) := x^2$ est surjective.*

Exemple 5.1.13. *L'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^2$ n'est pas surjective car -1 n'admet aucun antécédent dans $\mathbb{R}_+$.*

Une application bijective est une application à la fois injective et surjective :

Définition 5.1.14 (Bijectivité)**.** *Soient deux ensembles E et F et f une application de E vers F. On dira que f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent par f. En d'autres termes :*

$$\forall y \in F, \{x \in E \ : \ f(x) = y\} = \{x_y\} .$$

Remarque 5.1.15. *On a coutume de dire "chaque chose a sa place. Chaque place a sa chose". En d'autres termes, l'application qui à la chose associe la place est bijective.*

Exemple 5.1.16. *L'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) := x^2$ est bijective.*

Exemple 5.1.17. *L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := \sin(x)$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective (surjective non plus d'ailleurs).*

Théorème 5.1.18. *Soit $f \in F^E$ où E et F sont deux ensembles. Si f est bijective, alors il existe une unique application g de F vers E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ où l'on a pour tout $x \in E$: $\mathrm{Id}_E(x) = x$ et pour tout $y \in F$: $\mathrm{Id}_F(y) = y$.*

Définition 5.1.19. *Cette unique application g est appelée l'application réciproque de f et on la note f^{-1}.*

Remarque 5.1.20. *On note que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. En d'autres termes, l'application qui associe à une fonction bijective sa réciproque est une involution.*

5.1.3 Image directe et image réciproque d'un ensemble

On commence par définir l'image directe.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E vers F. Soit $A \in 2^E$ (c'est-à-dire $A \subset E$). On pose alors

$$f(A) := \{y \in F \ : \ \exists x \in E\,, f(x) = y\}\ .$$

Nous insistons auprès du lecteur pour qu'il soit très précautionneux quant à ce qu'est $f(A)$. C'est une notation qui désigne un sous-ensemble de F. On a donc $f(A) \subset F$ c'est-à-dire $f(A) \in 2^F$.

Remarque 5.1.21. *Si $f(E) = F$, cela signifie que l'application f est surjective.*

On définit maintenant l'image réciproque, pour laquelle il faut être encore plus précautionneux...

Soit $B \subset F$. Alors, on pose

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \ : \ \exists y \in B\,, f(x) = y\}\ .$$

Ici, f^{-1} n'est pas l'application réciproque de f. D'ailleurs, *rien* ne nous dit que f est bijective. Il s'agit simplement d'une notation. Ce genre de notation sera utilisée en probabilités pour désigner la mesure image d'une probabilité par une application.

5.2 Indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit Ω un ensemble. Soit $A \subset \Omega$. On considère alors l'application $\mathbb{1}_A$ qui va de Ω dans $\{0; 1\}$ et qui est définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}\ .$$

$\mathbb{1}_A$ est appelée fonction indicatrice de A.

On a ainsi défini une application Ξ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0; 1\}^E$ définie par

$$\Xi(A) := \mathbb{1}_A\,.$$

Cette application Ξ est une bijection. En effet :

- Ξ est surjective. Pour tout $\psi \in \{0; 1\}^E$, en choisissant $A_\psi := \psi^{-1}(\{1\})$, il vient $\psi = \mathbb{1}_{A_\psi}$.

- Ξ est injective. Soient A et B deux sous-ensembles de Ω. On suppose $\Xi(A) = \Xi(B)$. Alors $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. En particulier, pour tout $x \in A$, $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$ d'où $x \in B$. Et, si $x \notin A$, $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 0$ d'où $x \notin B$. Pour résumer, $A \subset B$ et $A^c \subset B^c$. Il s'ensuit que $A = B$.

On a ainsi exhibé une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0; 1\}^E$ ce qui explique la notation $2^E := \mathcal{P}(E)$ vu que $\#\{0; 1\} = 2$.

5.3 Relation d'équivalence sur un ensemble E

5.3.1 Relations binaires

Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est définie par la donnée de son graphe $G_{\mathcal{R}}$, une partie de $E \times F$. On définit alors :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in G_{\mathcal{R}} .$$

On a également $\neg (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x, y) \notin G_{\mathcal{R}}$.

On peut représenter une relation binaire par un tableau dans le cas où les ensembles E et F sont finis.

Supposons par exemple $E := \{a; b; c\}$ et $F := \{\alpha; \beta; \gamma; \delta\}$.

On suppose $a\mathcal{R}\beta$, $a\mathcal{R}\gamma$, $b\mathcal{R}\beta$, $b\mathcal{R}\delta$, $c\mathcal{R}\alpha$ et $c\mathcal{R}\delta$.

On suppose également $\neg (a\mathcal{R}\alpha)$, $\neg (a\mathcal{R}\delta)$, $\neg (b\mathcal{R}\alpha)$, $\neg (b\mathcal{R}\gamma)$, $\neg (c\mathcal{R}\beta)$ ainsi que $\neg (c\mathcal{R}\gamma)$.

On coche la case si les deux éléments sont en relation sinon, on ne la coche pas.

On obtient alors le tableau suivant :

TABLE 5.1 – Relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F

E \ F	α	β	γ	δ
a		X	X	
b		X		X
c	X			X

Très souvent, la relation binaire $\mathcal{R}$ est définie à l'aide d'un prédicat $P(x, y)$. Alors, $\forall(x, y) \in E \times F$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow P(x, y)$.

Dans ce cas, $G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E \times F \ : \ P(x, y)\}$.

5.3.2 Relation binaire sur un ensemble E

Une relation binaire sur l'ensemble E est une relation binaire de l'ensemble E vers lui-même, déterminée par son graphe, partie de E^2. Une relation binaire peut avoir plusieurs propriétés intéressantes.

Définition 5.3.1 (Réflexivité)**.** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est réflexive si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$. Ceci équivaut à $\forall x \in E$, $(x, x) \in G_{\mathcal{R}}$.*

En d'autres termes, le graphe de la relation binaire contient la "diagonale" de E^2.

Et, il en est de même pour le tableau, lorsque l'on peut définir un tel tableau.

Voici un exemple de tableau d'une relation binaire réflexive sur $E := \{a; b; c\}$:

Table 5.2 – Relation binaire réflexive $\mathcal{R}$ sur E

E \ E	a	b	c
a	X		
b		X	
c	X		X

Définition 5.3.2 (Symétrie)**.** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est symétrique si*

$$\forall(x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\,.$$

Ceci équivaut à $\forall(x, y) \in E^2$, $(x, y) \in G_{\mathcal{R}} \Rightarrow (y, x) \in G_{\mathcal{R}}$.

En d'autres termes, la "diagonale" est "axe de symétrie" de $G_{\mathcal{R}}$.

Voici un exemple de tableau d'une relation binaire symétrique sur l'ensemble $E := \{a; b; c\}$:

TABLE 5.3 – Relation binaire symétrique $\mathcal{R}$ sur E

E \ E	a	b	c
a			X
b			X
c	X	X	X

Voyons maintenant une propriété qui, bien qu'importante en mathématiques, sera très modérément utilisée dans ce livre : l'antisymétrie. En effet, cette propriété sert pour les relations d'ordre. Or, nous avons omis les relations d'ordre.

Définition 5.3.3 (Antisymétrie)**.** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est antisymétrique si* $\forall (x, y) \in E^2, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) \Rightarrow x = y$.

Voici un exemple de tableau d'une relation binaire antisymétrique sur $\{a; b; c\}$:

TABLE 5.4 – Relation binaire antisymétrique $\mathcal{R}$ sur E

E \ E	a	b	c
a	X	X	X
b			X
c			X

On pense ainsi à la relation d'ordre. En effet, si $x \leq y$ et $y \leq x$, on a bien $x = y$.

Remarque 5.3.4. *Il convient de noter que le Tableau 5.4 ne correspond pas à une relation d'ordre puisque l'on ne dispose pas de $b\mathcal{R}b$. En d'autres termes, la réflexivité fait ici défaut.*

Remarque 5.3.5. *Une relation binaire réflexive, symétrique et antisymétrique est nécessairement l'égalité.*

La dernière propriété (commune aux relations d'équivalence et aux relations d'ordre) est la transitivé.

Définition 5.3.6 (Transitivité)**.** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est transitive si*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow x\mathcal{R}z\,.$$

Exercice 5.3.7. *Donner un exemple de tableau d'une relation binaire transitive sur $\{a; b; c; d\}$.*

5.3.3 Relation d'équivalence

Définition 5.3.8. *Une relation d'équivalence d'un ensemble E est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*

Voici un exemple de tableau d'une relation d'équivalence sur $\{a; b; c\}$:

TABLE 5.5 – Relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E

E \ E	a	b	c
a	×		
b		×	×
c		×	×

Exemple 5.3.9. *L'égalité est une relation d'équivalence.*

Bien sûr, il ne s'agit pas de la seule relation d'équivalence. Ainsi, la relation $\mathcal{R}$ définie dans le Tableau 5.5 n'est pas l'égalité bien que ce soit une relation d'équivalence.

Exemple 5.3.10. *Soit $a \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^c$. Par exemple, $a = \pi$ ou $a = \sqrt{2}$. On considère alors la relation de congruence modulo a : Pour tous les réels x, y, on dira $x \equiv y \pmod a$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = ka$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence :*

- *Réflexivité : $x - x = 0 = 0 \times a$ avec $0 \in \mathbb{Z}$.*
- *Symétrie : $x - y = ka$ implique $y - x = (-k)a$, et $-k \in \mathbb{Z}$*
- *Transitivité : $x - y = k_1 a$ et $y - z = k_2 a$ impliquent $x - z = (k_1 + k_2)a$, et $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ si $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$.*

Dans ce cas, on note $\mathcal{C}(x)$, classe de x dans $\mathbb{R}$ pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, l'ensemble

$$\mathcal{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \equiv x \pmod a\} \ .$$

Soient maintenant x_1 et x_2 deux réels et soit $y \in \mathcal{C}(x_1) \bigcap \mathcal{C}(x_2)$. Il est facile de montrer qu'alors $x_1 \equiv x_2 \pmod a$ puis que $\mathcal{C}(x_1) = \mathcal{C}(x_2)$.

En d'autres termes, les classes d'équivalence sont soit disjointes soit égales.

Théorème 5.3.11. *Définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E revient à la donnée d'une partition de E.*

Le théorème 5.3.11 est admis.

La notion de relation d'équivalence va bien plus loin que l'arithmétique puisqu'elle est à la base de la construction de l'intégrale au sens de Lebesgue.

5.3.4 Relation d'ordre

Définition 5.3.12. *Une relation d'ordre d'un ensemble E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 5.3.13. *La relation d'ordre $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 5.3.14. *L'inclusion de sous-ensembles de Ω est une relation d'ordre.*

5.3.5 Équipotence d'ensembles

Soient E et F deux ensembles. On dit que ces ensembles sont équipotents si et seulement s'il existe une bijection φ de E dans F. On définit ainsi une relation d'équivalence qui généralise la notion intuitive de cardinal aux ensembles non finis.

En effet :

- Réflexivité. En considérant $\varphi := \mathrm{Id}_E$, il s'ensuit que E est équipotent à E.
- Symétrie. Si E est équipotent à F, alors il existe φ bijective de E dans F. En considérant φ^{-1}, la réciproque de φ, il vient que F est équipotent à E.

- Transitivité. Si E est équipotent à F et si F est équipotent à G, il existe deux fonctions bijectives φ et ψ de E dans F et de F dans G respectivement. Alors, $\psi \circ \varphi$ est bijective de E dans G d'où E est équipotent à G.

5.3.6 Rappels sur la dénombrabilité

Définition 5.3.15. *On dit qu'un ensemble est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments.*

Définition 5.3.16. *Un ensemble qui n'est pas de cardinal fini est dit infini.*

Exemple 5.3.17. *L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini. De même, $\mathbb{R}$ est infini.*

Définition 5.3.18. *On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.*

Exemple 5.3.19. *L'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, est dénombrable.*

Contre-exemple 5.3.20. *L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable.*

Proposition 5.3.21. *Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

5.4 Exercices

Exercice 1

Deux réels x et y sont en relation (ce que l'on note $x\mathcal{R}y$) si $xe^y = ye^x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Puis, pour tout réel x, déterminer le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence de x.

Exercice 2

Soient trois réels x, y et z. On admet que si $x \leq y$ alors $x+z \leq y+z$. Également, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$. On suppose dorénavant $z \geq 0$ et $x \geq y$. Montrer que l'on a $xz \geq yz$.

Exercice 3

Soient E, F, G et H quatre ensembles. On se donne f une application e E dans F, g une application de F dans dans G et h une application de G dans H. Montrer que $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_F \circ f = f$. Puis, montrer que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Exercice 4

Soient $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Montrer que l'application φ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{D}$ définie par $\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$ est bijective.

Exercice 5

Montrer que l'application f qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) := x + \sqrt{1+x^2}$ est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 6

Soit un ensemble Ω et soit l'application ψ de 2^Ω dans 2^Ω qui à A associe A^c. Montrer que ψ est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 7

Soit un ensemble Ω et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \Omega$. Déterminer $f(\{x\})$ et $f(\emptyset)$.

Deuxième partie

Trigonométrie et Nombres complexes

Chapitre 6

Introduction

6.1 Intérêt

Il est beaucoup plus simple de motiver cette partie que la précédente sur les rudiments de logique et sur les ensembles. En effet, je doute fortement qu'un seul étudiant scientifique ayant deux années post-bac derrière lui pense sincèrement que la trigonométrie ou les nombres complexes soient inutiles.

Néanmoins, il est important de bien dire au lecteur que cette partie doit être étudiée. Certes, elle l'a été longuement par le passé. Mais les mathématiques s'effacent de la mémoire quand on ne les pratique pas. Certes, il n'y aura plus de cours ou d'examens portant sur les nombres complexes en tant qu'objet d'étude. Mais, ils seront un outil indispensable dans d'autres disciplines que les mathématiques.

Je prends donc le pli, non pas de parler de leur intérêt pédagogique ou de leur intérêt scientifique général, mais bien de discuter de matières essentielles où il sera important de les maîtriser sur le bout des doigts.

D'abord, l'électronique utilise grandement les nombres complexes et la trigonométrie (à travers la notion de phase). Donc, autant certains domaines des mathématiques peuvent vous laisser tranquilles, autant les nombres complexes vont vous harceler pendant toute votre vie étudiante et peut-être même au-delà.

Ensuite, en école d'ingénieurs, vous allez découvrir une matière nouvelle ou plutôt une nouvelle science composée de plusieurs matières. Cette nouvelle science, le traitement du signal, dérive des mathématiques sans en faire partie. Ainsi, bien que les calculs et les raisonnements logiques y soient essentiels, elle n'a pas pour objet de démontrer des théorèmes. Ça, c'est le rôle des mathématiques, lesquelles sont ensuite appliquées dans d'autres sciences dont le traitement du signal.

Le traitement du signal, en tronc commun à travers quatre matières à Télécom, fait la part belle aux nombres complexes et à la trigonométrie. En effet, un outil essentiel est la transformation de Fourier (le passage dans le monde fréquentiel). Or, toute lacune en complexe se paie très très cher dès que l'on fait de la transformée de Fourier, que ce soit à temps continu ou à temps discret. Ensuite, la transformée de Laplace a des prérequis assez similaires vis à vis des complexes.

6.2 Objectifs

L'objectif est extrêmement simple : le lecteur doit maîtriser sur le bout des doigts les nombres complexes. Certes, les exercices n'auront que peu de portée voire aucune. Mais, ils permettront de s'exercer. Ainsi, l'étudiant qui aura avalé les deux chapitres suivants sera prêt pour le traitement du signal. Également, les nombres complexes et la trigonométrie lui seront utiles dans d'autres parties de ce document comme les suites et les séries numériques, les séries entières, les séries de Fourier, les équations différentielles mais aussi la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles. Par ailleurs, la lecture de cette partie donnera une intuition en algèbre linéaire de ce qu'est un espace vectoriel. En effet, $\mathbb{C}$ est un exemple d'espace vectoriel de dimension deux.

6.3 Prérequis

Les seuls prérequis sont la connaissance des raisonnements usuels et une maîtrise des calculs algébriques de base.

6.4 Organisation

Dans ce paragraphe, on présente *grosso modo* ce que va être la suite de la deuxième partie.

6.4.1 Trigonométrie

Dans ce chapitre, on repart du début avec le cercle trigonométrique. On présente les quantités d'intérêt à savoir le sinus, le cosinus et les quantités qui en découlent. On opte pour un point de vue géométrique autant que l'on peut. Nous avons mis de nombreuses images pour que les raisonnements soient plus limpides aux yeux du lecteur. Les propriétés essentiels sont données et démontrées.

6.4.2 Nombres complexes

Dans ce chapitre, on commence par construire le corps des complexes par analyse-synthèse, en admettant l'existence d'un objet i tel que $i^2 = -1$. On donnera des constructions alternatives plus rigoureuses qui pourront plaire aux étudiants issus de CPGE. Les étudiants qui n'ont pas de goût particulier pour la matière mathématique pourront éviter ces constructions en première lecture.

On présente ensuite les calculs de base et la géométrie plane associée puis l'on regarde les équations du second degré dans le corps des complexes. La notation exponentielle est fournie.

Chapitre 7

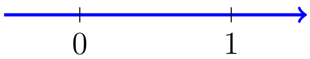
Trigonométrie

7.1 Fonctions circulaires

7.1.1 Droite réelle et cercle trigonométrique

Rappel 7.1.1. *À partir d'une droite du plan, en positionnant deux points* 0 *et* 1 *sur cette droite, on obtient tout nombre réel :*

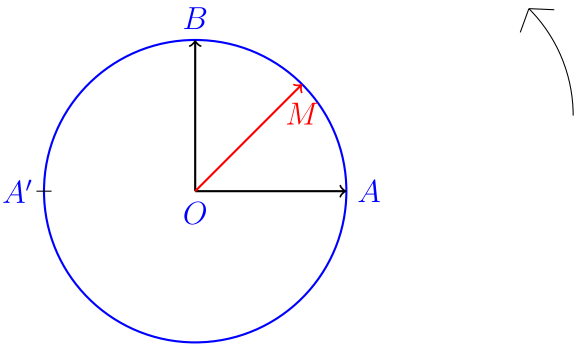
FIGURE 7.1 – Droite réelle



Le positionnement de 1 *sur la droite par rapport à* 0 *revient à orienter la droite.*

Rappel 7.1.2. *On se donne un cercle de centre* 0 *et de rayon* 1*.*

FIGURE 7.2 – Cercle trigonométrique



Le choix de l'orientation des axes perpendiculaires en O *détermine l'orientation du plan. Deux orientations sont possibles : le sens des aiguilles d'une montre et le sens contraire.*

Orienter le plan ou orienter le cercle de centre O et de rayon 1 est équivalent. En trigonométrie, on utilise l'orientation du sens trigonométrique, c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Soit M un point du cercle trigonométrique avec $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct du plan : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$. Alors, l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est défini. De plus, l'application $M \mapsto (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ définit une bijection du cercle trigonométrique sur l'ensemble des angles de vecteurs non nuls.

Proposition 7.1.3. *Il existe une surjection de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique. Soit φ cette application.*

Définition 7.1.4 (π)**.** *Soit A' le point diamètralement opposé à A sur le cercle trigonométrique. π est le plus petit élément réel positif x tel que $\varphi(x) = A'$.*

Remarque 7.1.5. *On peut définir π de beaucoup d'autres façons.*

Alors : $\varphi(x) = \varphi(y)$ est équivalent à $y \equiv x(2\pi)$.

7.1.2 Fonctions circulaires

Définissons ici les fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente. On pose $\overrightarrow{i} := \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{j} := \overrightarrow{OB}$. Alors, $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan.

On se donne un réel x. Et, on pose $M(x) := \varphi(x)$. $M(x)$ est alors un point du cercle trigonométrique. En associant à $M(x)$ ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on peut définir deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appelées cosinus et sinus.

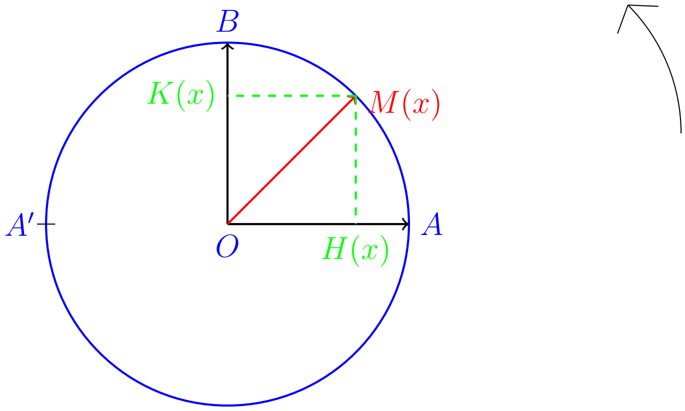
Définition 7.1.6 (Cosinus de x)**.** *On appelle cosinus du réel x l'abscisse dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du point $M(x)$. C'est aussi la distance $OH(x)$ où $H(x)$ est le projeté orthogonal de $M(x)$ sur la droite (OA).*

Notation 7.1.7. *Le cosinus de x est noté* $\cos(x)$.

Définition 7.1.8 (Sinus de x)**.** *On appelle sinus du réel x l'ordonnée dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du point $M(x)$. C'est aussi la distance $OK(x) = M(x)H(x)$ où $K(x)$ est le projeté orthogonal de $M(x)$ sur la droite (OB).*

Notation 7.1.9. *Le sinus de x est noté* $\sin(x)$.

FIGURE 7.3 – Sinus et cosinus



On en déduit immédiatement quelques propriétés.

Proposition 7.1.10. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1; 1]$ *et* $\sin(x) \in [-1; 1]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) = (\cos(x), \sin(x))$.

On a de plus la formule fondamentale suivante.

Proposition 7.1.11. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. Le triangle $OM(x)H(x)$ est rectangle en $H(x)$. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore qui nous donne

$$OM(x)^2 = OH(x)^2 + H(x)M(x)^2 = OH(x)^2 + OK(x)^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)\,.$$

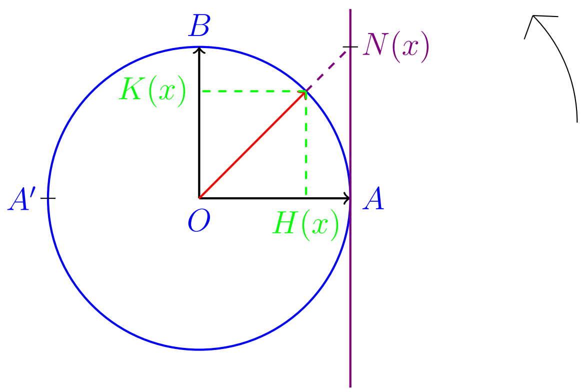
Or, $M(x)$ est sur le cercle trigonométrique donc $OM(x) = 1$, ce qui achève la preuve. $\square$

On définit ensuite la tangente comme suit.

Définition 7.1.12. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On appelle* $N(x)$ *l'intersection entre la droite* $(OM(x))$ *et la droite parallèle à la droite* (OB) *passant par* A. *Ce point* $N(x)$ *existe dès que* $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Alors, la tangente de x *est définie comme étant l'ordonnée du point* $N(x)$.

Notation 7.1.13. *La tangente de* x *est notée* $\tan(x)$.

FIGURE 7.4 – Tangente



On remarque immédiatement un lien entre la tangente, le cosinus et le sinus.

Proposition 7.1.14. *Pour tout* $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$*, on a*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

Démonstration. Les droites $(H(x)M(x))$ et $(AN(x))$ sont parallèles (car toutes les deux parallèles à la droite (OB)). Conséquemment, on peut appliquer le théorème de Thalès et l'on en déduit

$$\frac{OH(x)}{OA} = \frac{H(x)M(x)}{AN(x)}\,,$$

ce qui donne immédiatement

$$\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\sin(x)}{\tan(x)}\,.$$

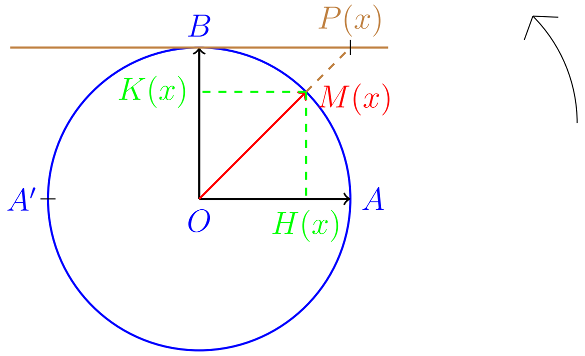
La preuve est ainsi achevée après des calculs algébriques très simples. □

On définit ensuite la cotangente comme suit.

Définition 7.1.15. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On appelle* $P(x)$ *l'intersection entre la droite* $(OM(x))$ *et la droite parallèle à la droite* (OA) *passant par* B*. Ce point* $P(x)$ *existe dès que* $x \notin \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$*.*
Alors, la cotangente de x *est définie comme étant l'abscisse du point* $P(x)$*.*

Notation 7.1.16. *La cotangente de* x *est notée* $\cot(x)$*.*

FIGURE 7.5 – Cotangente



On remarque immédiatement un lien entre la cotangente, le sinus et le cosinus.

Proposition 7.1.17. *Pour tout* $x \notin \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$*, on a*

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,.$$

Démonstration. Les droites $(K(x)M(x))$ et $(BP(x))$ sont parallèles (car toutes les deux parallèles à la droite (OA)). Conséquemment, on peut appliquer le théorème de Thalès et l'on en déduit

$$\frac{OK(x)}{OB} = \frac{K(x)M(x)}{BN(x)}\,,$$

ce qui donne immédiatement

$$\frac{\sin(x)}{1} = \frac{\cos(x)}{\cot(x)}\,.$$

La preuve est ainsi achevée après des calculs algébriques très simples. □

Ainsi, si $x \notin \left\{k\frac{\pi}{2}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a $\tan(x)\cot(x) = 1$.

7.2 Formules de trigonométrie

On rappelle d'abord

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\,. \tag{7.1}$$

En divisant cette formule par $\cos^2(x)$, il vient :

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\,, \tag{7.2}$$

pour tout $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Proposition 7.2.1 (Formule de relèvement)**.** *Soient deux réels a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.*

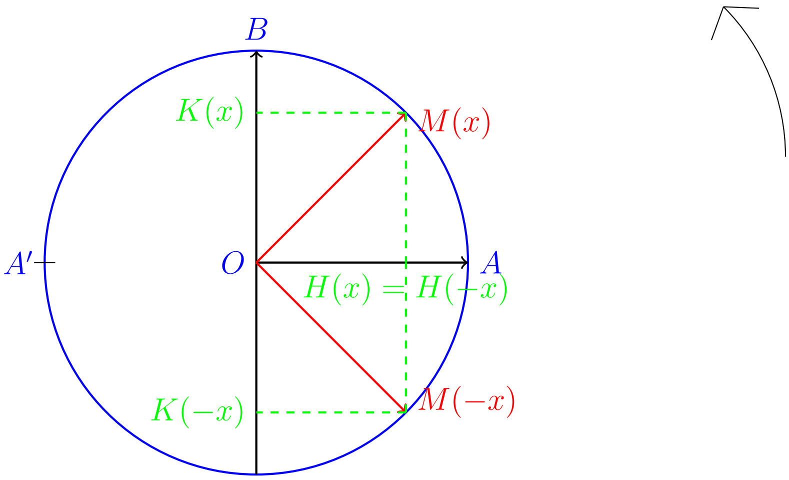
Démonstration. On considère le point $M(a, b)$ d'abscisse a et d'ordonnée b. Vu que l'on dispose de l'égalité $a^2 + b^2 = 1$, on en déduit que la distance de O à $M(a, b)$ est 1. En d'autres termes, $M(a, b)$ est sur le cercle trigonométrique. On appelle x l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM(a, b)}$. Il vient immédiatement $M(a, b) = \varphi(x)$ d'où $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$. □

Proposition 7.2.2 (Parité et imparité)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.*

La preuve est immédiate une fois que l'on a remarqué $H(-x) = H(x)$ et $K(-x) = -K(x)$ (le symétrique par rapport au point O du point $K(x)$).

La proposition s'illustre bien avec l'image suivante :

Figure 7.6 – Sinus, cosinus et parité



Une conséquence directe est la suivante pour tous les réels tels que les deux quantités suivantes sont définies

$$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \text{et} \quad \cot(-x) = -\cot(x)\,.$$

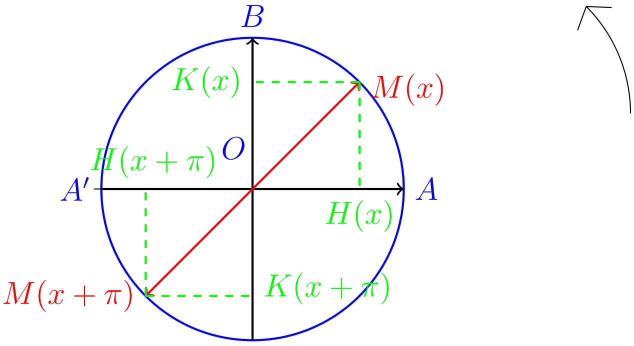
Proposition 7.2.3 (Périodicité)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.*

Cette propriété est une conséquence directe de $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$. En effet, effectuer une rotation d'angle 2π radians laisse la figure inchangée. Au contraire, effectuer une rotation de π radians revient à prendre la symétrie par rapport au point O. Il vient immédiatement

Proposition 7.2.4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ *et* $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$*.*

La proposition s'illustre bien avec l'image suivante :

FIGURE 7.7 – Sinus, cosinus et symétrie centrale



On en déduit les deux résultats suivants de périodicité.

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \quad \text{et} \quad \cot(x+\pi) = \cot(x)\,, \tag{7.3}$$

si x est dans le domaine de définition de chacune des deux fonctions. En utilisant ces propriétés, il vient

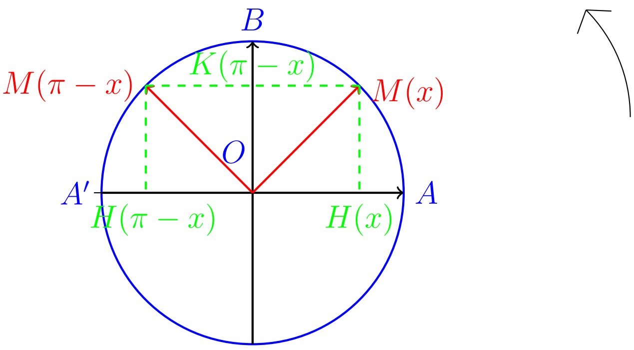
Proposition 7.2.5. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin(x)$*. Et, si* x *est dans le domaine de définition de la fonction tangente, on a* $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$*. Et de même,* $\cot(\pi - x) = -\cot(x)$*.*

Démonstration. On a $\cos(\pi - x) = \cos(x - \pi) = \cos(x + \pi - 2\pi) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$. Puis, $\sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = -\sin(x + \pi - 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin(x)$.

□

La proposition s'illustre bien avec l'image suivante :

FIGURE 7.8 – Sinus, cosinus et symétrie axiale



Proposition 7.2.6 (Échange entre cosinus et sinus)**.** *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Démonstration. **1.** On commence par se restreindre à l'intervalle $\mathcal{I} := \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1.1. En effet, supposons les formule prouvées pour tout $x \in \mathcal{I}$. Alors, pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $x = \frac{\pi}{2} + y$ où $y = x - \frac{\pi}{2} \in \mathcal{I}$. D'où $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(-y) = \cos(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin(\pi - x) = \sin(x)$. Ainsi, pour tout $x \in [0; \pi]$, la première formule est démontrée.

1.2. On considère dorénavant $x \in [-\pi; 0]$. Alors, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\cos(\frac{\pi}{2} - (-x)) = -\sin(-x) = \sin(x)\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, la formule $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ est vraie.

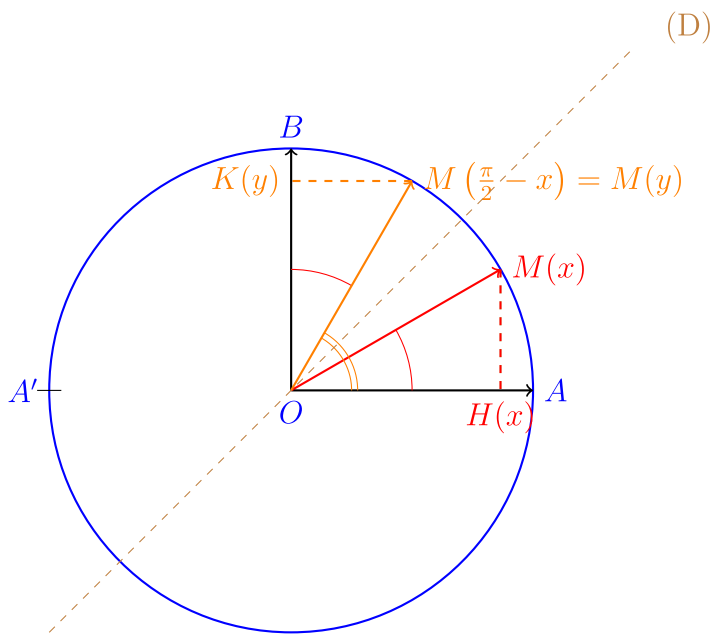
1.3. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, quelconque. Alors, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2n\pi + y$ où $y \in [-\pi; \pi]$. Par conséquent, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2n\pi - y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin(y) = \sin(y + 2n\pi) = \sin(x)$.

1.4. On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puis, comme la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ce qui prouve la seconde formule.

2. On remarque que la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ réalise une bijection de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$ donc il suffit de prouver la deuxième formule à savoir $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$ afin d'achever la preuve.

3. On se place sur le cercle trigonométrique comme suit :

FIGURE 7.9 – Échange entre cosinus et sinus

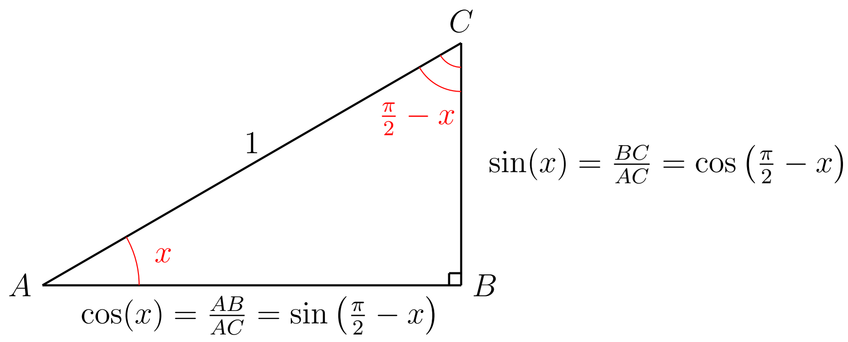


On remarque que le cercle est préservé par la symétrie par rapport à la droite (D) puis que le point $M(x)$ est envoyé par cette symétrie au point $M\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Puis, le point $H(x)$ est envoyé sur le point $N\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Or, la symétrie conserve les distances. Ainsi, la distance $ON\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (qui vaut par définition $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$) est égale à la distance $OH(x)$ (qui vaut par définition $\cos(x)$). La preuve est ainsi achevée.

$\square$

Remarque 7.2.7. *On peut aussi prouver cette relation d'échange en considérant un triangle rectangle et en utilisant les définitions du sinus et du cosinus dans un triangle rectangle :*

FIGURE 7.10 – Triangle rectangle et angles complémentaires



On en déduit aussitôt :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot(x)\,,$$

pour tout $x \notin \left\{k\frac{\pi}{2}\,;\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

7.2.1 Formules d'addition

On donne ici les formules à connaître par cœur sur le cosinus et le sinus. Soient a et b deux réels. On a alors

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\,, \tag{7.4}$$

et

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\,. \tag{7.5}$$

Donnons les preuves de ces formules.

Démonstration. Par définition, les coordonnées de $M(a)$ et de $M(a+b)$ sont

$$M(a)=(\cos(a),\sin(a)) \quad \text{et} \quad M(a+b)=(\cos(a+b),\sin(a+b))\,.$$

On pose maintenant $\overrightarrow{i_a} := \overrightarrow{OM(a)}$. On souhaite considérer un nouveau repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i_a}, \overrightarrow{j_a}\right)$. Il faut pour cela que les vecteurs $\overrightarrow{i_a}$ et $\overrightarrow{j_a}$ soient orthogonaux et que la norme de $\overrightarrow{j_a}$ soit 1. Il vient ainsi $\overrightarrow{j_a} = \pm(-\sin(a), \cos(a))$. Comme on souhaite que le repère soit direct, on obtient $\overrightarrow{j_a} = (-\sin(a), \cos(a))$. Ensuite, par définition, le point $M(a+b)$ se déduit du point $M(a)$ en effectuant une rotation d'angle b. Conséquemment, les coordonnées du point $M(a+b)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i_a}, \overrightarrow{j_a}\right)$ sont $\cos(b)$ et $\sin(b)$. Il vient donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM(a+b)} &= \cos(b)\overrightarrow{i_a} + \sin(b)\overrightarrow{j_a} \\ &= \cos(b)\left(\cos(a), \sin(a)\right) + \sin(b)\left(-\sin(a), \cos(a)\right) .\end{aligned}$$

Par identification avec $\overrightarrow{OM(a+b)} = (\cos(a+b), \sin(a+b))$, on a (7.4) et (7.5). □

De ces formules, on en déduit immédiatement d'autres formules :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \,, \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \,, \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \,, \\ \text{et} \quad \tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

7.2.2 Formules de duplication

On présente ici une formule qui dérive de (7.4) et de (7.5) :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \,. \tag{7.6}$$

On a également $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ (mais cette formule est moins importante). De la formule (7.6), on en déduit

Proposition 7.2.8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \textit{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \,.$$

Ces formules permettent de linéariser et donc d'intégrer plus facilement. On verra des formules de linéarisation plus générales dans la Sous-Section 7.2.5

Exercice 7.2.9. *Prouver la Proposition 7.2.8*

On a également

$$\tan^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)} \,.$$

7.2.3 Valeurs particulières

Grâce aux formules précédentes, on en déduit déjà des valeurs particulières, à savoir par cœur :

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Cotangente	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Démonstration. D'après la Proposition 7.2.6, on a $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Or, d'après la Proposition 7.1.11, on a aussi $\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1$ d'où l'on en déduit immédiatement $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car $\cos(\frac{\pi}{4}) > 0$.

Ensuite, on remarque $\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \cos(2\frac{\pi}{6}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{6})$ d'après la formule (7.6). Ainsi, $\sin(\frac{\pi}{6})$ est solution de l'équation du second degré $2X^2+X-1 = 0$. Celle-ci a deux solutions : -1 et $\frac{1}{2}$. Or, $\sin(\frac{\pi}{6}) \geq 0$ d'où $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. On en déduit immédiatement $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Puis, en utilisant Pythagore, il vient $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de même $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les calculs pour la tangente et la cotangente sont immédiats.

□

7.2.4 Formules essentielles pour l'intégration

Pour intégrer des fractions rationnelles de fonctions circulaires, on utilise la formule de Bioche (voir Proposition 29.2.6 à la page 342). Parfois, on est obligé d'exprimer les fonctions circulaires en fonction de $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour effectuer un changement de variable adéquat.

Proposition 7.2.10. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad et \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$$

avec $t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Et, si les quantités sont définies, on peut écrire

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad et \quad \cot(x) = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Exercice 7.2.11. *Prouver la Proposition 7.2.10.*

Remarque 7.2.12. *Lorsque $t = \pm\infty$, on a directement $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = 0$ ce qui est cohérent avec $\tan(x) = \pm\infty$ (d'où $x = (2k+1)\pi$ pour un entier k).*

7.2.5 Linéarisation

Il peut être pratique de linéariser des expressions pour pouvoir intégrer. On a alors besoin des formules

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}\,, \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\,, \\ \text{et}\quad \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}\,. \end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \cos(a+b)+\cos(a-b) =& \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \\ &+\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \\ =& 2\cos(a)\cos(b)\,. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de diviser par 2.
De même :

$$\begin{aligned} \cos(a-b)-\cos(a+b) =& \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \\ &-(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)) \\ =& 2\sin(a)\sin(b)\,. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de diviser par 2.

Exercice 7.2.13. *Démontrer la troisième formule.*

7.2.6 Factorisation

Au contraire, pour étudier le signe d'une somme, il peut être judicieux de factoriser :

$$\begin{aligned} \cos(a)+\cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\,, \\ \cos(a)-\cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\,, \\ \sin(a)+\sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\,, \\ \sin(a)-\sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,, \\ \text{et}\quad \tan(a)+\tan(b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}\,,\ \tan(a)-\tan(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}\,. \end{aligned}$$

Ces formules se prouvent en utilisant l'astuce

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} .$$

En effet, montrons la première égalité :

$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(b) =& \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) \\
=& \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&+ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
=& 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) .
\end{aligned}$$

7.2.7 Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := a\cos(x) + b\sin(x) ,$$

où a et b sont deux réels. On cherche à transformer $f(x)$ sous une forme plus simple à étudier.

Théorème 7.2.14. *Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 \neq 0$. Alors, on peut écrire*

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x - \theta\right) ,$$

où θ est tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ce théorème se prouve en utilisant la Propriété 7.2.1.

Exercice 7.2.15. *Résoudre l'équation*

$$2\sqrt{3}\cos(x) - 6\sin(x) = 2\sqrt{6} .$$

Solution : $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

7.3 Fonctions trigonométriques

On va étudier les fonctions cosinus, sinus et tangente ainsi que les fonctions réciproques.

7.3.1 Rappel : Étude d'une fonction de la variable réelle

Soit une fonction f que l'on cherche à étudier. Rappelons comment on procède à son étude.

D'abord, on donne son ensemble de définition. Puis, l'on s'intéresse à l'ensemble d'étude. En effet, en utilisant des propriétés comme la périodicité, la parité, la symétrie par rapport à une droite, on peut se restreindre à un petit intervalle.

Puis, sur l'ensemble d'étude, il faut

- Simplifier l'expression de $f(x)$.
- Calculer l'expression de $f(x)$.
- Étudier les variations de la fonction f.
- Étudier les limites aux bornes.
- Tracer la courbe.

7.3.2 Études de limites

Établissons ici quelques résultats de limites. Plus spécifiquement, on donne les dérivées des fonctions trigonométriques.

Théorème 7.3.1. *On a la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,. \tag{7.7}$$

Démonstration. Pour prouver la limite (7.7), on utilise *parfois* le résultat suivant : $\sin'(x) = \cos(x)$. Toutefois, pour montrer que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, on se sert de (7.7). Présentons maintenant une preuve de (7.7) qui ne l'utilise pas.

Comme la fonction sinus est impaire, on suppose sans rien changer à la généralité que x est positif.

Plaçons-nous dans le cercle trigonométrique. On appelle O le point de coordonnées $(0,0)$, $A := (1,0)$, $M(x) := (\cos(x), \sin(x))$ et $N(x) := (1, \tan(x))$. On appelle aussi $H(x)$ la projection de $M(x)$ sur la droite des abscisses : $H(x) := (\cos(x); 0)$. Le triangle $M(x)H(x)A$ est rectangle en $H(x)$ donc on en déduit

$$\left|\left|\overrightarrow{M(x)H(x)}\right|\right| \leq \left|\left|\overrightarrow{M(x)A}\right|\right|$$

puisque l'hypoténuse est le côté le plus long d'un triangle rectangle. Ceci se traduit ainsi :

$$\sin(x) \leq \left|\left|\overrightarrow{M(x)A}\right|\right|\,.$$

Comme le chemin le plus court entre deux points est un segment de droite, on en déduit que l'arc de cercle reliant A à $M(x)$ est plus long que $\left|\left|\overrightarrow{M(x)A}\right|\right|$. Par définition, la longueur de cet arc est x. Il vient :

$$\sin(x) \leq x\,.$$

On peut maintenant prouver que l'aire de la section d'angle x est égale à $\frac{x}{2}$. En effet, si $x = 2\pi\frac{1}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, l'aire de la section est égale à $\frac{\pi}{q} = \frac{x}{2}$ puis l'on peut étendre aux angles de la forme $x = 2\pi r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$. Enfin, l'on étend à $\mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et par continuité du sinus.
Or, cette section de disque est incluse dans le triangle $OAN(x)$. L'aire du triangle est donc plus grande que l'aire de la section, à savoir $\frac{x}{2}$. Or, l'aire du triangle vaut : $\frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan(x)$. Il vient :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)\,.$$

On rappelle que l'on a $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)}$ d'où

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1\,.$$

La continuité de la fonction cosinus en 0 achève la preuve.

Puis, pour prouver que $\sin'(x) = \cos(x)$, on écrit :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big\{ \sin(x)\,(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)\Big\}\,.$$

En utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = -2\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\sin\left(\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\,.$$

La limite (7.7) implique alors la convergence de $\frac{\cos(h)-1}{h}$ vers 0. Puis, l'application de (7.7) à nouveau implique

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)\,.$$

On prouve de la même manière

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\,(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \to -\sin(x)\,.$$

Toutefois, pour prouver (7.7), on a utilisé la continuité en 0 de la fonction cosinus puis pour prouver $\sin'(x) = \cos(x)$, on a utilisé la continuité en 0 de la fonction sinus. Pour cela, on utilise la décroissance de la fonction cosinus. Puis, l'on étudie la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n := \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Les formules trigonométriques donnent

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\,.$$

Conséquemment, l'on a

$$\begin{aligned}|1 - u_{n+1}| = 1 - u_{n+1} &= \frac{1 - \frac{1+u_n}{2}}{1 + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} = \frac{1 - u_n}{2\left(1 + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)}\\ &= \frac{|1 - u_n|}{2\left(1 + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)} \leq \frac{1}{2}\,|1 - u_n| \leq \frac{1}{2^n}\,|1 - u_0| = \frac{1}{2^n}\,.\end{aligned}$$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ tend vers 0. Puis, comme la fonction est décroissante par définition, on en déduit sa continuité en 0. La continuité de la fonction sinus en 0 vient de l'inégalité $0 \leq \sin(x) \leq x$ pour x positif. La preuve est désormais achevée.

□

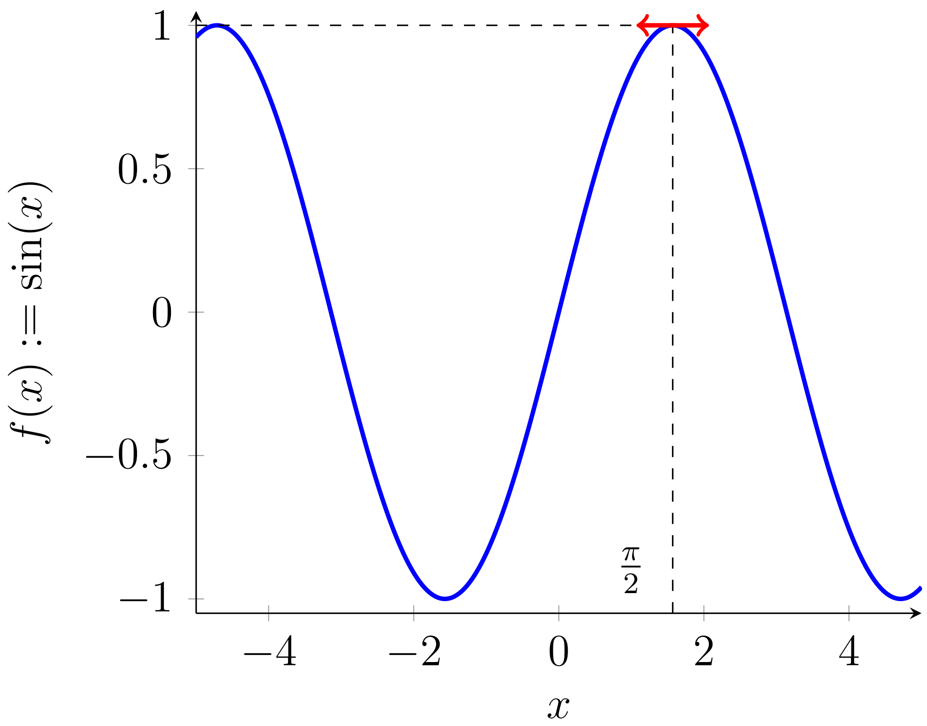
7.3.3 Fonctions sinus et arcsinus

La fonction sinus est définie, continue et dérivable (voir le paragraphe précédent) sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus 2π-périodique. On se restreint donc à l'intervalle $[-\pi;\pi]$. Puis, l'imparité nous permet de nous restreindre à $[0;\pi]$. Enfin, comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on sait que la droite verticale d'équation $(x = \frac{\pi}{2})$ dans le plan est axe de symétrie. On se restreint alors à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Par ailleurs, on note que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$. Sa réciproque est appelée arcsinus et est notée arcsin. La fonction arcsinus est définie, continue, dérivable de $[-1;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

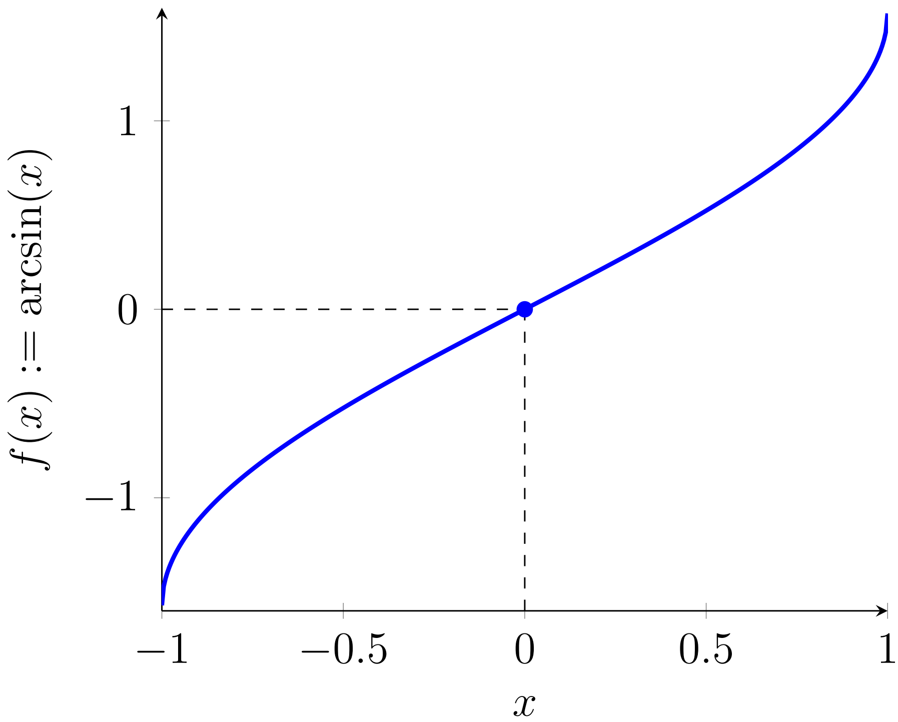
Après étude, on obtient les courbes :

Figure 7.11 – Fonction sinus



et

FIGURE 7.12 – Fonction arcsinus



Proposition 7.3.2. *Pour tout $x \in [-1;1]$, on a*

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

et

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Démonstration. La première égalité provient de la définition de la fonction arcsinus en tant que bijection réciproque de la fonction sinus de l'intervalle $[-1;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. La seconde vient de l'égalité

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) \ ,$$

d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or, le cosinus est positif sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ce qui achève la preuve. □

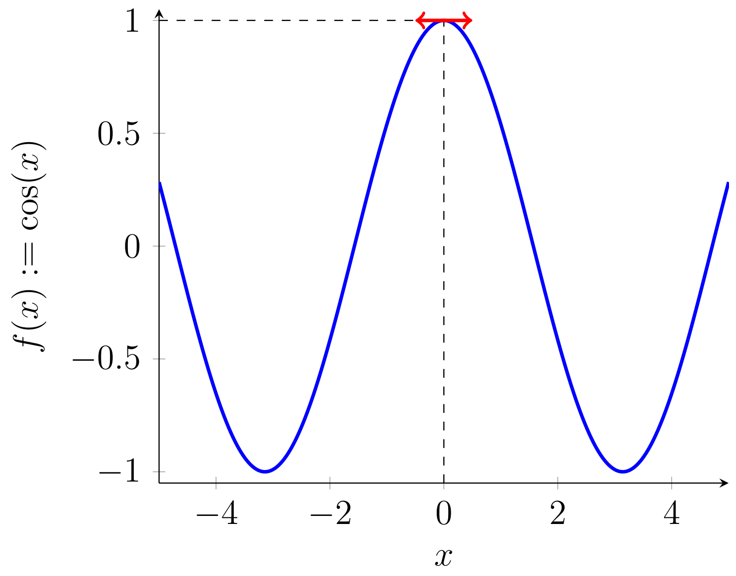
7.3.4 Fonctions cosinus et arccosinus

La fonction cosinus est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus 2π-périodique. On se restreint donc à l'intervalle $[-\pi;\pi]$. Puis, la parité nous permet de nous restreindre à $[0;\pi]$. Enfin, comme $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, on sait que le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ dans le plan est centre de symétrie. On se restreint alors à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Par ailleurs, on note que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$. Sa réciproque est appelée arccosinus et est notée arccos. La fonction arccosinus est définie, continue, dérivable de $[-1; 1]$ dans $[0; \pi]$.

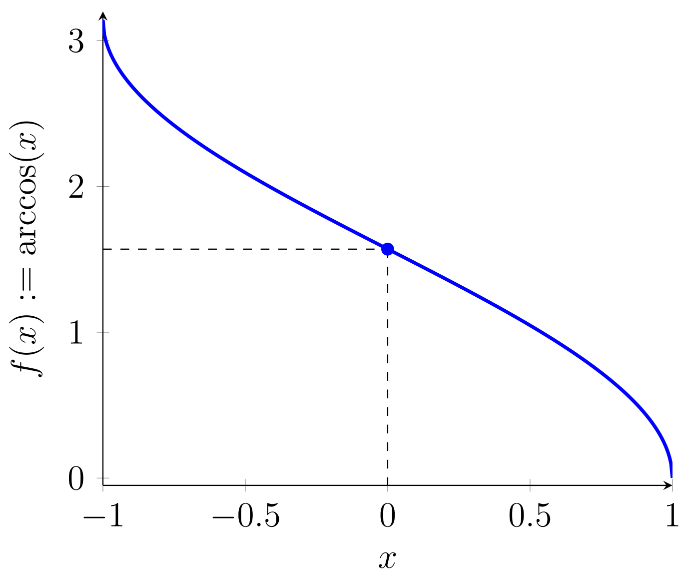
Après étude, on obtient les courbes :

Figure 7.13 – Fonction cosinus



et

Figure 7.14 – Fonction arccosinus



Proposition 7.3.3. *Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a*

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

et

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Démonstration. La première égalité provient de la définition de la fonction arccosinus en tant que bijection réciproque de la fonction cosinus de l'intervalle $[-1; 1]$ dans $[0; \pi]$. La seconde vient de l'égalité

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x))\ ,$$

d'où $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Or, le sinus est positif sur l'intervalle $[0; \pi]$ ce qui achève la preuve. $\square$

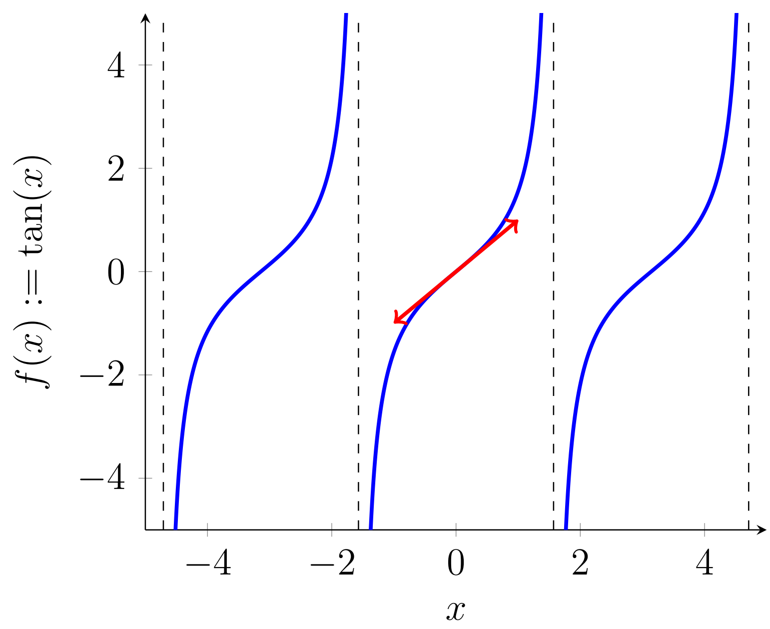
7.3.5 Fonctions tangente et arctangente

La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est de plus π-périodique. On se restreint donc à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Puis, l'imparité nous permet de nous restreindre à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Par ailleurs, on note que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque est appelée arctangente et est notée arctan. La fonction arctan est définie, continue, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

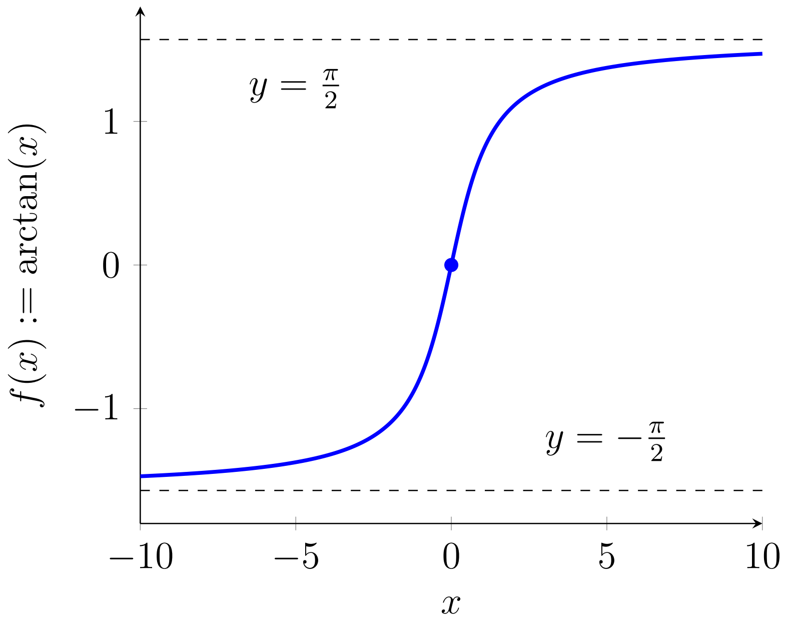
Après étude, on obtient les courbes :

Figure 7.15 – Fonction tangente



et

FIGURE 7.16 – Fonction arctangente



7.4 Exercices

Exercice 1

Sachant que $\sin(\alpha) = \frac{1}{4}$ et $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calculer $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

Exercice 2

Montrer que les expressions suivantes, quand elles existent, sont constantes :

- $A = \dfrac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\cos(x) - \sin(x)} + \dfrac{\cos^3(x) + \sin^3(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$.
- $B = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))(1 + \tan^2(x))$.

Exercice 3

Résoudre chacune des équations suivantes :

- $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
- $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$.
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
- $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
- $\tan(x)\tan(2x) = 1$.

- $\sqrt{3}\tan(x) = 2\sin(x)$.
- $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$.

Exercice 4

Calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5

On se donne α et β tels que $\tan(\alpha) = \frac{1}{5}$ et $\tan(\beta) = \frac{1}{239}$. Calculer $\gamma = 4\alpha - \beta$.

Exercice 6

Démontrer l'identité

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c) \\
&= 4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 7

Un circuit électrique est soumis à deux tensions : $3\cos(2\pi ft)$ et $4\sin(2\pi ft)$. Montrer que la tension somme, $3\cos(2\pi ft) + 4\sin(2\pi ft)$, peut s'écrire :

$$r\cos(2\pi ft + \varphi) \text{ avec } r > 0$$

Chapitre 8

Nombres complexes

Le mot “corps” que l'on utilise plus bas dans la Section 8.1 est lié à des concepts d'algèbre que nous verrons après. En première lecture, il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est un corps. Si toutefois, vous vous demandez ce qu'est un corps, je vous invite à aller à la page 156.

8.1 Corps des nombres complexes, $(\mathbb{C}, +, \times)$

Le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ est commutatif. Ce corps possède un défaut. Il n'est pas algébriquement clos. En d'autres termes, il existe des équations réelles qui n'ont pas de solution Par exemple, l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ bien que tous les coefficients soient des réels. La question que l'on se pose est alors la suivante : peut-on obtenir un corps, noté provisoirement $(\mathbb{K}, +, \times)$ tel que $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$, tel que la somme et la multiplication dans $\mathbb{K}$ coincident avec la somme et la multiplication pour les réels dans $\mathbb{R}$. Il faudrait aussi que ce corps soit algébriquement clos (tout du moins que l'équation $x^2 + 1 = 0$ admette une solution) et commutatif. De plus, on souhaite que le corps soit le plus petit possible.

On peut construire un tel corps à partir de ces impératifs. On montre qu'il existe, à isomorphisme près, un et un seul corps répondant à cette question, appelé corps des complexes et noté $(\mathbb{C}, +, \times)$ ou plus simplement $\mathbb{C}$.

8.1.1 Écriture algébrique d'un nombre complexe

On procède par Analyse-Synthèse.

Comme on veut que le corps des complexes étende le corps des réels, il faut que pour tout $a \in \mathbb{R}$, a soit un complexe.

Soit maintenant i **une** solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est un corps, $a + bi$ est un complexe pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Tout nombre z pouvant se mettre sous la forme $a + ib$ est donc un élément de $\mathbb{C}$.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{R}^2$. On pose $z := a + ib$ et $z' := a' + ib'$. Par définition de $\mathbb{C}$, on a $z + z' \in \mathbb{C}$ et $zz' \in \mathbb{C}$. On cherche à calculer ces deux complexes :

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')\,,$$

en utilisant la commutativité de la somme et du produit dans le corps des complexes. À nouveau, $z + z'$ est de la forme $\lambda + i\mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De même :

$$zz' = (a + ib)\,(a' + ib') = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b)\ ,$$

en utilisant la commutativité de la somme et du produit dans le corps des complexes. Ainsi, zz' peut aussi se mettre sous la forme $\lambda + i\mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On considère alors $\mathbb{K} := \{a + ib\ :\ a, b \in \mathbb{R}\}$. On vérifie que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet une solution. On peut donc prendre

$$\mathbb{C} := \{a + ib\ :\ a, b \in \mathbb{R}\}\ ,$$

en tant que plus petit corps commutatif qui étend $(\mathbb{R}, +, \times)$ et dans lequel l'équation $X^2 + 1 = 0$ admet au moins une solution.

Un problème subsiste : comment construire le complexe i ?

8.1.2 Autres constructions de $\mathbb{C}$

On peut construire $\mathbb{C}$ de manière plus rigoureuse.

8.1.2.1 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ avec une multiplication adéquate

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(a',b') \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$(a,b) + (a',b') := (a + a', b + b')\,,$$

et

$$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)\,.$$

On identifie $(1,0)$ à $1_{\mathbb{C}}$ et $(0,1)$ à i.

Exercice 8.1.1. *Montrer que muni de ces deux lois de composition internes,* $\mathbb{R}^2$ *est un corps commutatif dans lequel l'équation* $x^2 + 1 = 0$ *admet au moins une solution.*

8.1.2.2 $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'anneau (voir page 154 pour une définition de la structure d'anneau) et également espace vectoriel (voir page 201 pour une définition de la structure d'espace vectoriel) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées (voir page 181 pour une définition de ces objets) de taille deux. On identifie $1_{\mathbb{C}}$ à la matrice identité

$$1_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'on identifie le nombre complexe i à la matrice

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que l'on a $i^2 = -1_{\mathbb{C}}$, en utilisant le produit matriciel.

8.1.2.3 Extension de corps

Soient P et Q deux polynômes réels. On dit que P et Q sont équivalents si l'on a

$$P(X) - Q(X) = (X^2 + 1)D(X),$$

où D est un polynôme réel. On peut vérifier que cette notion d'*équivalence* est bien une relation d'équivalence au sens de la Subsection 5.3.3 à la page 85.

On identifie 1 à la classe d'équivalence du polynôme 1. En d'autres termes :

$$1_{\mathbb{C}} := \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \exists D \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X) - 1 = (X^2 + 1)D(X) \right\}.$$

De même, on identifie i à la classe d'équivalence du polynôme X :

$$i := \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \exists D \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X) - X = (X^2 + 1)D(X) \right\}.$$

Soit P un polynôme quelconque qui appartient à i. Alors, il existe un polynôme réel D tel que l'on ait $P(X) = X + (X^2 + 1)D(X)$. D'où :

$$\begin{aligned} P(X)^2 &= X^2 + 2X(X^2 + 1)D(X) + (X^2 + 1)^2 D(X)^2 \\ &= X^2 + 1 - 1 + \left(X^2 + 1\right)\left(2XD(X) + (X^2 + 1)D(X)^2\right) \\ &= -1 + \left(X^2 + 1\right)\underbrace{\left(1 + 2XD(X) + (X^2 + 1)D(X)^2\right)}_{=:\widetilde{D}(X)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, P^2 est dans la classe d'équivalence du polynôme -1. En d'autres termes : $i^2 = -1_{\mathbb{C}}$.

8.2 Calculs de base dans $\mathbb{C}$

Définition 8.2.1. *Soit un complexe $z = x + iy$. On appelle son conjugué, et l'on note $\overline{z}$, le complexe*

$$\overline{z} = x - iy\,.$$

Remarque 8.2.2. *Le conjugué de z est parfois noté z^*.*

Proposition 8.2.3. *Soient deux complexes z_1 et z_2. Alors $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. De plus : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.*

Définition 8.2.4. *Soit un complexe $z = x + iy$. Le réel x est la partie réelle de z : $x = \Re(z) = \mathrm{Re}(z)$.*

Définition 8.2.5. *Soit un complexe $z = x + iy$. Le réel y est la partie imaginaire de z : $y = \Im(z) = \mathrm{Im}(z)$.*

On a les résultats suivants :

- Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$.
- Pour tout $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2}$.

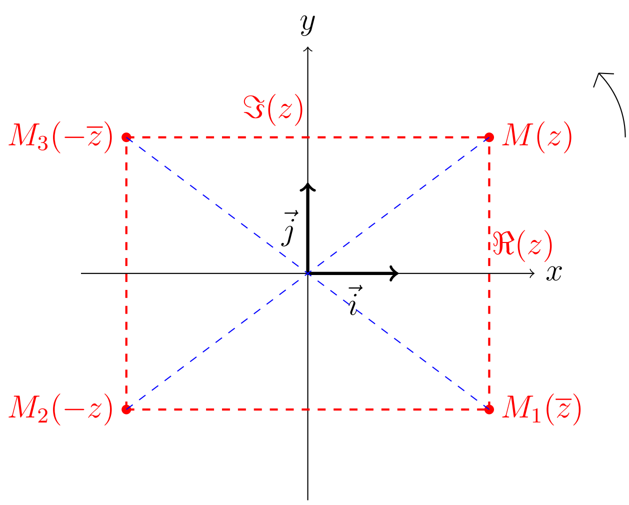
Proposition 8.2.6. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda.z := \lambda \times z$. Alors, $(\mathbb{C}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Et, sa dimension est deux. Une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ est $(1, i)$.*

Remarque 8.2.7. *Voir page 198 pour une définition précise de ce qu'est une base d'un espace vectoriel. Ici, cela signifie que si deux complexes sont égaux : $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.*

8.2.1 Interprétation géométrique

On rapporte le plan à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

FIGURE 8.1 – Plan muni d'un repère orthonormal direct



Tout point du plan est alors défini par le couple (x, y) de ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À chacun de ces points du plan, on peut donc associer un couple de réels et conséquemment un complexe $z = x + iy$. Tout point M du plan est donc défini par un unique nombre complexe z, appelé affixe du point M.

On peut interpréter la conjugaison d'un complexe comme la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Si z est réel, alors le point $M(z)$ associé est sur l'axe des abscisses. Si z est un imaginaire pur (c'est-à-dire si sa partie réelle est nulle), le point associé est sur l'axe des ordonnées.

Rappelons la définition du module d'un complexe.

Définition 8.2.8. *Soit un complexe $z = x+iy$. On appelle module de z la quantité $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.*

On remarque : $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Proposition 8.2.9. *Pour tous les complexes z_1, z_2, on a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.*

Démonstration. En effet, l'on a :

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 \times z_2 \times \overline{z_1 \times z_2}}\,,$$

par définition. Puis, comme le conjugué d'un produit est le produit des conjugués, il vient

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 \times z_2 \times \overline{z_1} \times \overline{z_2}}\,.$$

La commutativité nous donne

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 \times \overline{z_1} \times z_2 \times \overline{z_2}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1| \times |z_2|\,,$$

ce qui achève la preuve. □

Proposition 8.2.10. *Soit un complexe z. Alors $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$*

Cette propriété est immédiate après que l'on a remarqué $|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$.

Proposition 8.2.11. *Soient z_1 et z_2 deux complexes. On a alors $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re\left(z_1 z_2^*\right)$ où z_2^* est le conjugué de z_2.*

Démonstration. Ici, on utilise la notation z^* pour le conjugué d'un complexe z. Alors, par définition, on a :

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 =&(z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\
=&z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* \\
=&|z_1|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* + |z_2|^2 \\
=&|z_1|^2 + |z_2|^2 + \Re(z_1 z_2^*) + i\Im(z_1 z_2^*) + (\Re(z_1 z_2^*) - i\Im(z_1 z_2^*)) \\
=&|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re\left(z_1 z_2^*\right)\,.
\end{aligned}$$

□

8.3 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$ toute équation qui peut se mettre sous la forme
$$az^2 + bz + c = 0\,,$$
où a, b et c sont des complexes. Et, $a \neq 0$. L'inconnue est ici z.

8.3.1 Résolution de $z^2 = Z$

On commence par résoudre l'équation
$$z^2 = Z\,, \tag{8.1}$$
où Z est un complexe quelconque.

8.3.1.1 Si $Z \in \mathbb{R}_+$

Ici, $Z = X \geq 0$. Si $X > 0$, l'équation (8.1) a deux solutions réelles : $z = \sqrt{X}$ et $z = -\sqrt{X}$. Si $Z = 0$, il y a une unique solution : $z = 0$.

8.3.1.2 Si $Z \in \mathbb{R}_-^*$

Ici, z ne peut pas être réel car son carré est un réel strictement négatif. On peut toutefois écrire $Z = -X$ avec $X > 0$ puis l'équation devient
$$z^2 = (-1) \times X = \left(i\sqrt{X}\right)^2\,.$$
On a donc deux solutions distinctes à l'équation (8.1) : $i\sqrt{-Z}$ et $-i\sqrt{-Z}$.

8.3.1.3 Si $Z \notin \mathbb{R}$

On procède par Analyse-Synthèse.

Ici, $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathbb{R}$ et $Y \neq 0$. On recherche z sous la forme d'un complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors
$$x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY\,.$$
On obtient donc deux équations :
$$x^2 - y^2 = X\,, \tag{8.2}$$
et
$$2xy = Y\,. \tag{8.3}$$

On remarque par ailleurs : $|Z| = |z^2| = |z|^2$. Or, $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$. On a donc une troisième équation
$$x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{8.4}$$

Combinée avec l'équation (8.2), il vient

$$x^2 = \frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}.$$

Enfin, d'après l'équation (8.3), le signe de xy est celui de Y. Il y a donc deux solutions à l'équation (8.1) :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} + i\epsilon\sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} \\ \text{et} \quad z_2 &= -\sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} - i\epsilon\sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}, \end{aligned}$$

avec $\epsilon = 1$ si $Y > 0$ et $\epsilon = -1$ si $Y < 0$.

8.3.2 Résolution générale

On considère maintenant l'équation générale

$$az^2 + bz + c = 0.$$

où $a \neq 0$. On commence par diviser par a. Il vient

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Puis, l'on utilise la forme canonique et l'on obtient

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0.$$

Cette équation peut donc se mettre sous la forme

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

On est ainsi ramené au cas de l'équation (8.1). On procède donc comme suit pour résoudre une telle équation.

- On calcule $\Delta := b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$, on a une unique solution : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, on calcule δ, une racine complexe de Δ.
- On a alors deux solutions : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

8.4 Nombres complexes de module 1

Notation 8.4.1. *L'ensemble des nombres complexes de module* 1 *est noté* $\mathbb{U}$ *:*

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}.$$

8.4.1 Groupe $(\mathbb{U}, \times)$

Muni de la multiplication, $\mathbb{U}$ est ce que l'on appelle un groupe. En effet :

- $\mathbb{U} \neq \emptyset$ car $1 \in \mathbb{U}$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$, on a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1$ d'où $z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$.
- La multiplication est associative dans $\mathbb{C}$ donc dans $\mathbb{U}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $1 \times z = z$ et de plus $1 \in \mathbb{U}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1 \neq 0$ donc z est inversible dans $\mathbb{C}$. On note z^{-1} cet inverse. On a $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = 1$ donc $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

La multiplication étant commutative dans $\mathbb{C}$, on en déduit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe abélien (c'est-à-dire un groupe dont la loi de composition interne est commutative).

Proposition 8.4.2. *Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, z est un complexe. Donc, on peut écrire $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Or, $|z| = 1$ donc $x^2 + y^2 = 1$. D'après le théorème de relèvement, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. $\square$

Définition 8.4.3. *L'angle θ est appelé l'argument du complexe $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On note $\theta = \arg(z)$.*

Notation 8.4.4. *Pour simplifier l'écriture, on écrit :*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,.$$

Remarque 8.4.5. *L'exponentielle complexe est en fait plus profonde qu'une vulgaire notation.*

Proposition 8.4.6. *Pour tous les réels θ_1, θ_2, on a $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.*

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\ , \end{aligned}$$

d'après les formules (7.4) et (7.5) à la page 101.
Or, par le calcul, il vient

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 8.4.7 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad et \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) .$$

Démonstration. Par définition de l'exponentielle complexe, on a

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)\right) = \frac{1}{2}(2\cos(\theta)) = \cos(\theta) .$$

De même :

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \frac{1}{2i}(2i\sin(\theta)) = \sin(\theta) .$$

□

On peut se servir de cette formule pour linéariser des polynômes trigonométriques.

Proposition 8.4.8 (Formule de Moivre)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.*

Démonstration. On a $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$; ce qui achève la preuve.

□

8.4.2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Soit un nombre complexe non nul z quelconque. On a alors

$$z = |z|\frac{z}{|z|} .$$

Or, le module de $\frac{z}{|z|}$ est 1 donc il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ d'où

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) .$$

Définition 8.4.9. *Soit un complexe non nul quelconque z. On suppose que l'on peut écrire $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. Alors, ρ est le module de z et θ est son argument. On le note $\theta = \arg(z)$.*

Remarque 8.4.10. *On observe que l'on a $e^{2i\pi} = 1$ donc l'argument d'un complexe n'est pas unique. Il est défini modulo 2π.*

Proposition 8.4.11. *Pour tous les complexes z_1 et z_2, $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$*

8.5 Racines $n$ièmes

8.5.1 Racines $n$ièmes d'un complexe quelconque

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = z_0 \,. \tag{8.5}$$

On utilise ici la forme exponentielle $z = |z|e^{i\arg(z)}$ et $z_0 = |z_0|e^{i\arg(z_0)}$. L'équation (8.5) est équivalente à

$$|z|^n e^{i\times n\arg(z)} = |z_0|e^{i\arg(z_0)} \,. \tag{8.6}$$

L'équation (8.6) donne directement

$$z = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(z_0)}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,,$$

avec $k \in [\![0; n-1]\!]$. Il y a donc exactement n solutions.

8.5.2 Racines $n$ièmes de l'unité

On cherche à résoudre l'équation (8.5) avec $z = 1$. On a alors n solutions :

$$\omega_0 = 1\,, \quad \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}\,, \quad \cdots\,, \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\,, \quad \omega_{n-1} = e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \left(= \frac{1}{\omega_1}\right) .$$

On peut montrer

$$\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = 0 \,.$$

En effet, on remarque : $\omega_k = \omega_1^k$ avec $\omega_1 \neq 1$. Donc :

$$\omega_0 + \cdots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1^1 + \cdots + \omega_1^{n-1} = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = 0 \,.$$

8.6 Exercices

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

- $z^2 - 5(1+i)z + 17i = 0$.
- $z^2 - (2i+1)z + i - 1 = 0$.
- $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$.
- $z^2 - 6z + 11 = 0$.
- $iz^2 - 2iz + i - 2 = 0$.
- $2z^2 - (3+2i)z + 5 = 0$.
- $\frac{z^2}{2} - \sqrt{3}z + 2 = 0$.

- $z^2 + 8(1-i)z - 34i = 0$.
- $z^2 - (5+2i)z + 5(1+i) = 0$.
- $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$.
- $z^4 = -119 + 120i$.
- $z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0$.

Exercice 2

Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, distinct de 1, le nombre complexe $i\frac{1+z}{1-z}$ est en fait réel.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^2$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $x^2 = y$, $y^2 = z$ et $z^2 = x$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2z+1)^4 = (z-1)^4$.

Exercice 6

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S := u + u^2 + u^4$. Calculer $S + \overline{S}$ et $S\overline{S}$. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 7

Soit
$$\mathcal{C}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) .$$
Montrer que $\mathcal{C}_n = \frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$.

Troisième partie

Polynômes et Fractions rationnelles

Chapitre 9

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la troisième partie du livre, sur les polynômes et les fractions rationnelles.

9.1 Intérêt

Lorsque l'on écrit un livre de cours, il faut faire des choix. Mettre ou ne pas mettre les fractions rationnelles (lesquelles présupposent d'avoir vu les polynômes) est une question qui se pose vraiment. En effet, en école d'ingénieurs, cette partie relevant de l'algèbre voire de l'arithmétique n'est pas la plus utile.

Toutefois, l'objectif du cours “Bases Indispensables des Mathématiques” étant ce qu'il est et au vu de ce qui attend les étudiants lors du tronc commun en première année à Télécom, il aurait été peu judicieux d'éviter les fractions rationnelles.

En effet, ces dernières apparaissent naturellement dès que l'on fait de la transformée de Laplace ou de la transformée de Fourier ou même de la transformée en Z. Or, ces transformées sont d'un intérêt crucial en traitement du signal. Savoir décomposer en éléments simples n'est pas nécessaire mais il est quand même bien plus simple de savoir mener une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle raisonnable (et en général, dans les cas pratiques, on ne considère que des fractions raisonnables) plutôt que d'utiliser des produits de convolution multiples.

Par conséquent, nous avons estimé qu'il était de notre devoir de faire cette partie.

9.2 Objectifs

L'objectif est on ne peut plus simple : nous attendons du lecteur qu'il soit en mesure de décomposer en éléments simples les fractions rationnelles raisonnables qu'il sera amené à voir au cours du reste de sa vie étudiante.

9.3 Prérequis

Il est crucial de bien maîtriser les propriétés algébriques dans $\mathbb{R}$ mais aussi dans $\mathbb{C}$.

9.4 Organisation

Dans ce paragraphe, on présente *grosso modo* ce que va être la suite de la troisième partie.

9.4.1 Polynômes

On commence par présenter la notion de polynôme et l'on fournit de nombreux exemples au cours de ce chapitre. On introduit ensuite les opérations algébriques sur les polynômes puis l'on développe en partie la théorie de l'arithmétique sur les polynômes. Cette arithmétique prendra tout son sens dans le chapitre suivant.

La formule de Taylor est donnée et l'on explique ce qu'est une fonction polynomiale (non nécessairement sur un corps).

Les racines étant centrales (notamment dans le chapitre suivant), nous les étudions de même que la notion plus subtile de polynômes scindés.

9.4.2 Fractions rationnelles

La première section de ce chapitre porte sur la construction algébrique générale de ce que l'on appelle un corps de fractions. Cette notion peut être éludée en première lecture, notamment par les moins aguerris d'entre vous. En effet, cette première section, purement théorique, n'aura qu'un impact très limité pour l'utilisation pratique des fractions rationnelles.

Dans la deuxième section, conçue pour ne pas nécessiter d'avoir d'abord lu la première, nous reprenons les définitions et les opérations sur les fractions rationnelles. Bien sûr, la rigueur en pâtit.

Puis, nous abordons la notion de zéro et celle plus essentielle de pôle. Enfin, nous expliquons la décomposition en éléments simples, ce qui est le but de toute cette troisième partie. Nous donnons la forme générale. Et, surtout, un exemple compliqué sert de fil rouge pour nous exercer aux différentes techniques (voire astuces) pour décomposer en éléments simples.

Chapitre 10

Polynômes

Dans ce chapitre, on considère des polynômes sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. Ainsi, par la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. À noter que de manière générale, $\mathbb{K}$ est un corps (structure algébrique que nous présentons plus tard dans ce livre, voir page 156).

10.1 Premières définitions

Définition 10.1.1. *On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à une indéterminée X une expression de la forme*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n \,,$$

où n est un entier et où les coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$.

Remarque 10.1.2. *On note qu'il existe une correspondance bijective entre le polynôme P et les coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$. Dans certains cours, on définit d'ailleurs la notion de polynôme comme suit : on appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite $(a_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tous nuls à partir d'un certain rang.*

Notation 10.1.3. *L'ensemble des polynômes à une indéterminée X dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.*

Il est important de comprendre que l'on peut aussi considérer des polynômes à plusieurs indéterminées.

Exemple 10.1.4. *Les expressions $X^2 + 1$, X et $X^3 - X^2 - X + 7$ sont bien des polynômes.*

Contre-exemple 10.1.5. *L'expression $\sqrt{X^2 + 1}$ n'est pas un polynôme (à cause de la racine). De même, $\sqrt{X^2 + 2X + 1}$ n'est pas un polynôme.*

Contre-exemple 10.1.6. *L'expression $\sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!}$ n'est pas non plus un polynôme puisque la suite de coefficients n'est nulle à partir d'aucun rang.*

Remarque 10.1.7. *Un polynôme doit être vu comme une expression algébrique ou comme une suite de coefficients plutôt que comme une fonction. D'ailleurs, on parle d'indéterminée, pas de variable.*

Notation 10.1.8. *On pose* $X^0 := 1$. *On a ainsi* $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Définition 10.1.9. *Si le polynôme* P *est différent de* 0 *(c'est-à-dire s'il y a au moins un coefficient non nul), on appelle degré de* P *le plus grand* n *tel que* $a_n \neq 0$. *Le degré de* P *se note* $\deg(P)$.

Remarque 10.1.10. *Par convention,* $\deg(0) := -\infty$. *Cela peut surprendre au premier abord mais cette convention fera sens dans le chapitre suivant (sur les fractions rationnelles). De plus, le degré du produit étant la somme des degrés, on retrouve bien que le degré de* 0 *fois le polynôme* P *est la somme entre* $-\infty$ *et un entier positif ou nul ; ce qui donne bien* $-\infty$.

Notation 10.1.11. *L'ensemble des polynômes à une indéterminée* X *dans* $\mathbb{K}$ *et de degré inférieur ou égal à* n *est noté* $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 10.1.12. *Si* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *est non nul et tel que* $a_n \neq 0$, *alors* a_n *est le coefficient dominant de* P.

Définition 10.1.13. *Si* $a_n = 1$, *le polynôme* P *est dit unitaire, ou normalisé.*

10.2 Opérations algébriques

10.2.1 Addition et produit par un scalaire

Dans ce paragraphe, nous allons voir que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ admet une structure d'espace vectoriel (structure algébrique que nous verrons dans ce livre de par son importance en algèbre linéaire). Pour voir la définition de ce qu'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, nous référons à la page 201. À noter qu'il n'est pas besoin d'étudier la partie sur l'algèbre linéaire à la page 177 pour aborder la suite de ce chapitre.

Définition 10.2.1 (Somme de polynômes)**.** *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. *On a alors* $P(X) := \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *et* $Q(X) := \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ *où les suites de coefficients* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *sont nulles à partir d'un certain rang. On définit* $P+Q$ *comme étant* $(P+Q)(X) := \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)X^n$. *On peut remarquer que la suite de coefficients* $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ *est nulle à partir d'un certain rang. Ainsi,* $P+Q$ *est un élément de* $\mathbb{K}[X]$.

Définition 10.2.2 (Multiplication par un scalaire)**.** *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a alors* $P(X) := \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *où la suite de coefficients* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est nulle à partir d'un certain rang. On définit* λQ *comme étant* $(\lambda Q)(X) := \sum_{n\geq 0}(\lambda a_n)X^n$. *On peut remarquer que la suite de coefficients* $(\lambda a_n)_{n\geq 0}$ *est nulle à partir d'un certain rang. Ainsi,* λP *est un élément de* $\mathbb{K}[X]$.

Par conséquent, on a muni l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ de l'addition et de la multiplication par un scalaire. On peut vérifier aisément (après avoir lu le chapitre sur les espaces vectoriels à la page 201) que $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un espace vectoriel. Il en est de même pour $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$. Remarquons par ailleurs que $X^n + (-X^n) = 0$ donc l'ensemble des polynômes de degré égal à n n'est pas un tel espace vectoriel. C'est pour ceci que l'on considère l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Remarque 10.2.3. *L'espace vectoriel* $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ *admet* $(1, X, \cdots, X^n)$ *comme base canonique. Il s'ensuit que la dimension de* $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ *est* $n+1$. *En d'autres termes, si deux polynômes de* $\mathbb{K}_n[X]$ *sont égaux alors ils ont les mêmes coefficients.*

10.2.2 Produit de polynômes

On peut maintenant définir le produit dans l'ensemble $\mathbb{K}[X]$. Pour ce faire, on pose $X^p \times X^q := X^{p+q}$. Puis, par linéarité et distributivité de l'addition par rapport à la multiplication, si $P(X) := \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q(X) := \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ où les suites de coefficients $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont nulles à partir d'un certain rang, on pose $(P \times Q)(X) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ avec $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On peut remarquer que si $n \geq \deg(P) + \deg(Q) + 1$, alors $c_n = 0$. Ainsi $P \times Q$ est bien un polynôme.

Une question se pose naturellement : pourquoi ce produit est-il naturel ?

Plutôt que d'y répondre sous l'angle de la théorie, nous allons donner quelques exemples ; en ayant les fonctions polynomiales en ligne de mire.

Exemple 10.2.4. *On considère* $P(X) := 1 + X$ *et* $Q(X) := 1 - X$. *On s'attend à ce que le produit de* P *par* Q *soit* $(1 + X)(1 - X) = 1 - X^2$.
On a ici $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ *puis* $a_n = 0$ *si* $n \geq 2$. *De même, on a* $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ *puis* $b_n = 0$ *si* $n \geq 2$. *Or,* $(P \times Q)(X) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ *avec* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Calculons les coefficients* c_n. *D'abord,* $c_0 = a_0 b_0 = 1$. *Puis,* $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$. *Ensuite,* $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = -1$. *Et si* $n \geq 3$ *:*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{1} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0\,.$$

On a donc bien $(P \times Q)(X) = 1 - X^2$.

Regardons maintenant un exemple plus compliqué (et surtout plus général).

Exemple 10.2.5. *On considère* $P(X) := \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *et* $Q(X) := \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ *où les suites de coefficients* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *sont nulles à partir d'un certain rang. On s'attend à avoir*

$$\begin{aligned}(P\times Q)(X) &= P(X)Q(X)\\ &= \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right)\\ &= \left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k\right)\left(\sum_{p\geq 0} b_p X^p\right)\\ &= \sum_{k\geq 0, p\geq 0} a_k b_p X^{k+p}\,.\end{aligned}$$

On procède alors au "changement de variable" $n := k+p$ (si bien que $k = n-p$) :

$$\begin{aligned}(P\times Q)(X) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{p\geq 0} a_{n-p} b_p X^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p\geq 0} a_{n-p} b_p\right) X^n\,.\end{aligned}$$

Or, si $p \geq n+1$, on a $a_{n-p} = 0$ (par convention puisque la suite de coefficients est définie pour $n-p \geq 0$).

Il s'ensuit

$$(P\times Q)(X) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p} b_p\right) X^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) X^n\,.$$

On retrouve bien la définition du produit en suivant les calculs algébriques intuitifs.

Notation 10.2.6. *Le produit $P \times Q$ est désormais noté PQ.*

Voyons maintenant quelques propriétés sur le produit.

Proposition 10.2.7. *Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont non nuls, alors PQ est non nul et* $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

En d'autres termes, si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$. On dit donc que l'anneau (voir la page 154 pour une définition de la structure d'anneau) des polynômes est intègre.

On rappelle que le degré du produit étant la somme des degrés, si les deux polynômes sont non nuls, cette somme n'est pas égale à $-\infty$ et donc le produit est non nul.

10.2.3 Composition de polynômes

Comme pour le produit, la composition des polynômes correspond à l'intuition que l'on s'en fait.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) := \sum_{n\geq 0} a_n X^n$.

Définition 10.2.8. *On pose $(P\circ Q)(X) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Q(X))^n$. En d'autres termes, à l'indéterminée X, on substitue $Q(X)$. Puis, le polynôme $Q(X)^n$ est bien défini pour tout n par produit de polynômes.*

Exemple 10.2.9. *On considère $P(X) = 1 + X^2$ et $Q(X) = X^3$. Alors, $(P \circ Q)(X) = 1 + X^6$.*

Remarque 10.2.10. *Si P et Q sont non nuls, alors $(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.*

Remarque 10.2.11. *Si P et Q sont deux polynômes alors* a priori, *$P\circ Q \neq Q\circ P$. Reprenons ainsi P et Q comme dans l'Exemple 10.2.9. Alors $(Q \circ P)(X) = (1 + X^2)^3 = 1 + 3X^2 + 3X^4 + X^6$.*

10.2.4 Dérivation formelle

Il faut bien faire attention : on ne dérive pas par rapport à une variable ici. On procède à une dérivation **formelle**. Bien sûr, cette dérivation formelle sera cohérente avec la dérivation de la fonction polynômiale associée.

Définition 10.2.12. *On pose $(X^n)' := nX^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Et, $(X^0)' = 0$.*

On étend ensuite par linéarité en posant

$$P'(X) := \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1},$$

si $P(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$.

Proposition 10.2.13. *Soient P et Q deux élements de $\mathbb{K}[X]$. Alors :*

$$(PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Démonstration. On pose $P(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$. Alors :

$$(PQ)(X) = \sum_{n\geq 0} c_n X^n \quad \text{avec} \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

D'où

$$(PQ)'(X) = \sum_{n\geq 1} n c_n X^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) c_{n+1} X^n.$$

On calcule maintenant $P'Q + PQ'$. D'abord :

$$P'(X) = \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n \,.$$

$$(P'Q)(X) = \sum_{n\geq 0} d_n X^n \quad \text{avec} \quad d_n := \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} \,.$$

De même : $(PQ')(X) = \sum_{n\geq 0} e_n X^n$ avec

$$e_n := \sum_{k=0}^{n} (k+1) b_{k+1} a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \,.$$

Par conséquent, on a

$$(P'Q + PQ')(X) = \sum_{n\geq 0} (d_n + e_n)\, X^n \,.$$

Or, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
d_n + e_n =& \sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \\
=& \sum_{k=1}^{n} k a_k b_{n-k+1} + (n+1) a_{n+1} b_0 + a_0 (n+1) b_{n+1} \\
& + \sum_{k=1}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \\
=& (n+1) a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(k a_k b_{n-k+1} + a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \right) \\
& + (n+1) a_{n+1} b_0 \\
=& (n+1) a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^{n} (n+1) a_k b_{n+1-k} + (n+1) a_{n+1} b_0 \\
=& (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{(n+1)-k} \\
=& (n+1) c_{n+1} \,.
\end{aligned}$$

On a donc bien $(PQ)' = P'Q + PQ'$, vu que les coefficients sont égaux.

$\square$

10.2.5 Formule de Taylor

Théorème 10.2.14. *Soient $x_0 \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. On a alors :*

$$P(X + x_0) = P(x_0) + P'(x_0)X + \frac{P''(x_0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}X^n\,.$$

Remarque 10.2.15. *Dans le théorème précédent, pour tout polynôme Q défini par $Q(X) := \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, on a posé $Q(x_0) := \sum_{n\geq 0} b_n x_0^n$. Il s'agit d'une somme* **finie** *d'éléments de $\mathbb{K}$ (car tous les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang par définition) donc cette quantité est bien définie.*

Démonstration. La linéarité nous permet de nous restreindre aux monômes de degré p quelconque. On pose donc $P(X) := X^n$. Après une récurrence, on obtient une formule du binôme :

$$P(X + x_0) = (X + x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} X^k\,.$$

Or, la dérivée k-ième de P est : $P^{(k)}(X) = n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$ d'où $P^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x_0^{n-k} = k!\binom{n}{k}x_0^{n-k}$.

Il vient :

$$P(X + x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) X^k\,,$$

ce qui est la formule du théorème.

□

10.3 Fonctions polynomiales

Dans ce paragraphe, $\mathbb{A}$ est une algèbre sur le corps $\mathbb{K}$. En d'autres termes, $\mathbb{A}$ est muni d'une addition, d'une multiplication, d'une multiplication par les scalaires et certaines bonnes propriétés sont vérifiées. Nous ne donnons pas les dites propriétés dans ce cours mais imaginez que $\mathbb{A}$ est l'ensemble des matrices (voir page 181) sur $\mathbb{K}$ ou sur un corps plus grand que $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ est un corps plus grand que $\mathbb{R}$ par exemple).

On peut aussi penser à l'algèbre de convolution des distributions causales en traitement du signal.

On va ici donner une correspondance bijective et linéaire (c'est-à-dire un isomorphisme, voir la page 210) entre le polynôme et une fonction polynomiale pour peu que l'ensemble $\mathbb{A}$ soit infini. Le caractère bijectif est admis.

Définition 10.3.1. *Soit Φ l'application (linéaire) de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{A}^{\mathbb{A}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}$) définie par*

- *Si $P = 0$:*
$$\Phi(P)(x) := 0_{\mathbb{A}}\,,$$
où $0_{\mathbb{A}}$ est l'élément neutre pour l'addition de $\mathbb{A}$ (la matrice avec des coefficients nuls dans le cas des matrices carrées).
- *Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \neq 0$:*
$$\Phi(P)(x) := a_0 1_{\mathbb{A}} + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\,,$$
où $1_{\mathbb{A}}$ est l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{A}$ (la matrice identité dans le cas des matrices carrées).

Donnons quelques exemples de fonctions polynomiales associées à un polynôme.

Exemple 10.3.2. *On considère $P(X) := X^2 - 3X + 2$. On pose $\mathbb{A} := \mathbb{R}$. Alors, $\Phi(P)(0) = 2 \times 1_{\mathbb{R}} - 3 \times 0^1 + 0^2 = 2$. On a également $\Phi(P)(1) = 0$, $\Phi(P)(2) = 0$ et $\Phi(P)(3) = 2$.*

Exemple 10.3.3. *On considère $P(X) := X^2 - 3X + 2$. On pose $\mathbb{A} := \mathbb{C}$. Alors, $\Phi(P)(0) = 2 \times 1_{\mathbb{C}} - 3 \times 0^1 + 0^2 = 2$. On a également $\Phi(P)(i) = -1 - 3i + 2 = 1 - 3i$ et $\Phi(P)(4i) = -14 - 12i$.*

Dans les deux cas précédents, on a considéré $\mathbb{A}$ comme étant un corps. Voyons maintenant le cas des matrices carrées, voir la page 182 pour une définition de ce qu'est une matrice carrée.

Exemple 10.3.4. *On considère $P(X) := X^2 - 3X + 2$. On pose $\mathbb{A} := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 sur $\mathbb{R}$. On note 0_2 et I_2 les éléments neutres pour l'addition et la multiplication respectivement.*

Alors, $\Phi(P)(0_2) = 2 \times I_2 - 3 \times 0_2 + 0_2^2 = 2I_2$. De même, $\Phi(P)(I_2) = 2 \times I_2 - 3 \times I_2 + I_2^2 = 0_2$. On peut aussi calculer

$$\begin{aligned}\Phi(P)\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) &= 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0_2\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi(P)\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) &= 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Voici quelques propriétés :

Proposition 10.3.5. *Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{A}$. Alors :*
- $\Phi(P+Q)(x) = \Phi(P)(x) + \Phi(Q)(x)$.
- $\Phi(PQ)(x) = \Phi(P)(x) \times \Phi(Q)(x)$.
- $\Phi(\lambda P)(x) = \lambda\Phi(P)(x)$.
- $\Phi(P \circ Q)(x) = \Phi(P)(\Phi(Q)(x))$.
- $\Phi(P) = \Phi(Q)$ *si et seulement si* $P = Q$ *; à condition que* $\mathbb{A}$ *soit infini.*

10.4 Division et Factorisation

Ici, des connaissances en arithmétique des entiers seraient un plus indéniable mais elles ne sont pas nécessaires.

10.4.1 Division euclidienne

L'arithmétique des entiers peut s'étendre sur tout anneau un tant soit peu raisonnable. On étend donc la division euclidienne naturellement aux polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}[X]$. On admet en effet que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est suffisamment "raisonnable".

Définition 10.4.1. *Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On, dit que Q divise P s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$.*

Remarque 10.4.2. *On ne note pas $R = \frac{P}{Q}$. En effet, une telle quantité n'est généralement pas un polynôme.*

Théorème 10.4.3. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe deux polynômes Q et R tels que*
- $A = BQ + R$.
- $\deg(R) < \deg(B)$.

De plus, ainsi définis, les polynômes Q et R sont uniques.

On admet la preuve du Théorème 10.4.3.

Définition 10.4.4. *Le polynôme Q s'appelle le quotient de la division de A par B. Le polynôme R s'appelle le reste de la division de A par B. Par ailleurs, une telle décomposition s'appelle la division euclidienne de A par B.*

Exemple 10.4.5. *On effectue la division euclidienne de* $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1$ *par* $Q(X) = X^2 + 4$*. D'abord, le degré de* P *étant* 5 *et celui de* Q *étant* 2*, on a*

$$X^5 + X^4 + 2X^3 + 1 = X^3(X^2 + 4) + R_1(X)\,,$$

où le reste est $R_1(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1 - X^3 \times X^2 - 4X^3 = X^4 - 2X^3 + 1$*. Il reste un polynôme de degré* 4 *à savoir* $X^4 - 2X^3 + 1$ *alors que celui de* Q *est* 2*. On a ainsi*

$$X^5 + X^4 + 2X^3 + 1 = (X^3 + X^2)(X^2 + 4) + R_2(X)\,,$$

où le reste est $R_2(X) = 2X^3 + 1 - 4X^3 - 4X^2 = -2X^3 - 4X^2 + 1$*. Il reste un polynôme de degré* 3 *à savoir* $-2X^3 - 4X^2 + 1$ *alors que celui de* Q *est* 2*. On a ainsi*

$$X^5 + X^4 + 2X^3 + 1 = (X^3 + X^2 - 2X)(X^2 + 4) + R_3(X)\,,$$

où le reste est $R_3(X) = -4X^2 + 8X + 1$*. On continue comme suit :*

$$X^5 + X^4 + 2X^3 + 1 = (X^3 + X^2 - 2X - 4)(X^2 + 4) + R_4(X)\,,$$

où le reste est $R_4(X) = 8X + 17$*. Il s'agit d'un polynôme de degré strictement plus petit que celui de* Q*. On a donc terminé.*

Pour mieux organiser et mieux présenter, on procède comme dans le cas des entiers :

$$\begin{array}{rrrrrr|ll}
X^5 & +X^4 & +2X^3 & & & +1 & X^2 & +4 \\ \cline{7-8}
-X^5 & & -4X^3 & & & & +X^3 & \\ \cline{1-6}
& X^4 & -2X^3 & & & +1 & & \\
& -X^4 & & -4X^2 & & & +X^2 & \\ \cline{2-6}
& & -2X^3 & -4X^2 & & +1 & & \\
& & +2X^3 & & +8X & 0 & -2X & \\ \cline{3-6}
& & & -4X^2 & +8X & +1 & & \\
& & & +4X^2 & & +16 & -4 & \\ \cline{4-6}
& & & & 8X & +17 & &
\end{array}$$

On voit ainsi que le quotient est $X^3 + X^2 - 2X - 4$ *et que le reste est* $8X + 17$*.*

Remarque 10.4.6. *On dit que* B *divise* A *si et seulement si le reste de la division euclidienne de* A *par* B *est* $R = 0$*.*

10.4.2 Racines et factorisation de polynômes

On rappelle au lecteur que l'on peut associer une fonction polynomiale à valeurs dans $\mathbb{K}$ à tout polynôme sur $\mathbb{K}$, voir la page 138. Dorénavant, on utilise la notation P au lieu de $\Phi(P)$ pour désigner la fonction polynomiale en question. En effet, un corps est un anneau particulier.

Définition 10.4.7. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est une racine de P si $P(a) = 0$.*

Proposition 10.4.8. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors $X - a$ divise P si et seulement si a est une racine de P.*

Démonstration. D'après le Théorème 10.4.3, il existe deux polynômes Q et R tels que $P(X) = Q(X)(X - a) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(X - a) = 1$. Ainsi, R est de degré 0 ou $-\infty$. En d'autres termes, R est une constante $r \in \mathbb{K}$.

On considère la fonction polynomiale associée à P (que l'on note également P) et on l'applique à a : $P(a) = (a - a) \times Q(a) + r = r$. Si a est une racine de P, il vient $r = P(a) = 0$ d'où $P(X) = (X - a)Q(X)$ c'est-à-dire que $X - a$ divise P. Réciproquement, si $X - a$ divise P, on a $r = 0$ d'où $P(a) = 0$ si bien que a est une racine de P. □

Définition 10.4.9. *Si a est une racine de P, on appelle multiplicité de a le plus grand entier $n \geq 1$ tel que $(X - a)^n$ divise P. On dit alors que a est une racine d'ordre n de P.*

Théorème 10.4.10. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est une racine d'ordre supérieur ou égal à n de P si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0\,.$$

Démonstration. D'après la formule de Taylor (Théorème 10.2.14 à la page 137), on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k\,.$$

Si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$, il vient

$$P(X) = \sum_{k=n}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = (X - a)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\deg(P)-n} \frac{P^{(k+n)}(a)}{(k+n)!} (X - a)^k}_{=B(X)}\,.$$

Il s'ensuit que $(X - a)^n$ divise P donc a est une racine d'ordre supérieur ou égal à n de P.

Réciproquement, si $(X - a)^n$ divise P, l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)^n$ implique que l'on a :

$$P(X) = (X - a)^n Q(X) + R(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k\,,$$

où $R(X) = 0$. Il s'ensuit que le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

est nul c'est-à-dire que les coefficients $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ sont nuls pour $0 \leq k \leq n-1$ d'où $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$. $\square$

On peut obtenir un résultat plus précis en fixant la multiplicité de a :

Théorème 10.4.11. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors a est une racine d'ordre n de P si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0 \quad et \quad P^{(n)}(a) \neq 0\,.$$

Démonstration. Si a est une racine d'ordre n, elle est racine d'ordre supérieur ou égal à n d'où $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$. Mais, elle n'est pas racine d'ordre supérieur ou égal à $n+1$ d'où $P^{(n)}(a) \neq 0$.

Réciproquement, si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$, alors on a

$$P(X) = \sum_{k=n}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,(X-a)^k = (X-a)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\deg(P)-n} \frac{P^{(k+n)}(a)}{(k+n)!}\,(X-a)^k}_{=B(X)}\,.$$

Ainsi $(X-a)^n$ divise $P(X)$. Mais, comme $P^{(n)}(a) \neq 0$, on a $B(a) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$ donc a n'est pas une racine de B ce qui signifie que $X-a$ ne divise pas B si bien que $(X-a)^{n+1}$ ne divise pas P.

$\square$

On peut maintenant généraliser au cas où l'on a plusieurs racines.

Théorème 10.4.12. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ sont les racines de P d'ordres respectifs supérieurs à $m_1, m_2, \cdots, m_r$ si et seulement si*

$$(X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2}\cdots(X-a_r)^{m_r}$$

divise P.

La démonstration peut s'obtenir par récurrence sur r.

Exercice 10.4.13. *Effectuer cette récurrence.*

Corollaire 10.4.14. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Alors P a* au plus *n racines dans $\mathbb{K}$ (comptées avec leur multiplicité).*

Remarque 10.4.15. *On considère $P(X) = X^2+1$. Alors P a deux racines sur $\mathbb{C}$ mais n'en a aucune sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 10.4.16. *On considère $P(X) = X^2-1$. Alors P a quatre racines sur l'ensemble des matrices carrées de taille n. Notons toutefois que ce dernier ensemble n'est pas un corps. Ce n'est pas non plus un anneau intègre.*

On peut déterminer le reste de la division euclidienne en utilisant les racines du polynôme. En voici un exemple.

Remarque 10.4.17. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A(X) := X^n$. On pose $B(X) := X^2 - 3X + 2$. On remarque que 1 et 2 sont les deux racines du polynôme B. On effectue la division euclidienne de A par B et l'on obtient alors*

$$X^n = Q(X)B(X) + R(X) \quad \textit{avec} \quad \deg(R) \leq 1\,.$$

Il vient $R(X) = c + dx$ où $c, d \in \mathbb{R}$.

On en déduit

$$1^n = Q(1)B(1) + c + d \quad \textit{et} \quad 2^n = Q(2)B(2) + c + 2d\,.$$

Il s'ensuit $c + d = 1$ et $c + 2d = 2^n$ car $B(1) = B(2) = 0$. On est ainsi face à un système de deux équations linéaires à deux inconnues. On peut le résoudre facilement sans faire appel aux outils que l'on verra dans le Chapitre 18 à la page 231. En effet, on trouve $d = 2^n - 1$ et $c = 2 - 2^n$.

Le reste de la division euclidienne de X^n par $(X^2 - 3X + 2)$ est donc $(2 - 2^n) + (2^n - 1)X$.

Exemple 10.4.18. *Soit $P(X) = X^n + X + a$ avec $n \geq 1$. On se demande à quelles conditions $X^2 + X$ divise P. Procéder à la division euclidienne comme on a pu le faire précédemment peut s'avérer fastidieux si n est grand. Conséquemment, on utilise le fait que 0 et -1 sont deux racines simples (de multiplicité un) de $X^2 + X$. En effet, $X^2 + X$ divise P si et seulement si $P(0) = P(-1) = 0$. Cela revient à avoir*

$$a = 0 \quad \textit{et} \quad (-1)^n - 1 + a = 0\,.$$

On obtient donc $a = 0$ et n est pair.

10.5 Polynômes scindés

La notion de polynôme scindé apparaît naturellement en algèbre linéaire quand on veut diagonaliser ou triangulariser une matrice ou une application linéaire, voir page 241.

Définition 10.5.1. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 0$. Le polynôme est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il est constant ou (exclusif) s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (non nécessairement différents) tels que $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$.*

Remarque 10.5.2. *Il convient de souligner que le caractère scindé (ou non) d'un polynôme dépend fortement du corps que l'on considère. Par exemple, $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ car il n'admet pas de racine sur $\mathbb{R}$. Toutefois, $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ est bien scindé sur $\mathbb{C}$. Pour aller encore un peu plus loin, le polynôme $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est scindé sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}$.*

On souhaite étendre l'arithmétique sur $\mathbb{Z}$ à l'anneau $\mathbb{K}[X]$. Procédons donc à un petit rappel sur l'arithmétique dans l'anneau des entiers.

Rappel 10.5.3. *Si on considère l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$, seuls 1 et -1 sont inversibles. Le nombre $p \in \mathbb{N}$ est premier si et seulement si p admet exactement quatre diviseurs : 1, -1, p et $-p$. Et, tout nombre entier positif non nul peut s'écrire de façon unique comme étant le produit de nombres premiers.*

On cherche ici à étendre ces propriétés.

Remarque 10.5.4. *Les polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$.*

On définit maintenant l'équivalent des nombres premiers pour les polynômes.

Définition 10.5.5. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$. le polynôme P est irréductible si l'ensemble de ses diviseurs est constitué des constantes non nulles de $\mathbb{K}$ et des polynômes de la forme λP où $\lambda \in \mathbb{K}$ est non nul.*

"En d'autres termes, les seuls diviseurs de P (à polynômes inversibles près) sont P et 1."

Remarque 10.5.6. *Tout polynôme de degré un est irréductible ; ce que l'on prouvera dans la démonstration de la proposition suivante.*

On peut aller plus loin.

Proposition 10.5.7. *Tout polynôme irréductible qui admet une racine dans $\mathbb{K}$ est de degré un.*

Démonstration. Soit P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. On suppose que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P. On en déduit que $(X-a)$ divise P. Or, les seuls diviseurs de P sont des constantes non nulles et des polynômes de la forme λP avec $\lambda \neq 0$. Comme $X-a$ est de degré un, il ne peut s'agir d'une constante d'où $X - a = \lambda P(X)$ avec $\lambda \neq 0$. Ainsi, $P(X) = \frac{1}{\lambda}(X-a)$. Donc, P est de degré un. □

Remarque 10.5.8. *Il existe des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas de degré un. Exemple : X^2+1 est irréductible bien que de degré deux.*

On dit en fait que $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. Au contraire, le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. En d'autres termes :

Théorème 10.5.9 (d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme P non constant dans $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe. Ainsi, tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.*

Comme il n'y a pas de formule explicite pour résoudre les équations polynomiales dès que le degré dudit polynôme est supérieur ou égal à cinq (résultat lié à la théorie de Galois), on doit procéder à une démonstration théorique c'est-à-dire que l'on ne construit pas la solution. On va d'ailleurs procéder à un raisonnement par l'absurde.

Démonstration. Supposons que l'on dispose d'un polynôme non constant P qui ne s'annule pas. On a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On sait alors que $\beta := \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| > 0$.

Par définition de la borne inférieure, il existe une suite complexe $(z_p)_p$ telle que $|P(z_p)|$ converge vers $\beta > 0$ quand p tend vers l'infini. Soit

$$R_0 := \max\left\{\frac{2n}{|a_n|}\max_{0\le k\le n-1}|a_k|; 1\right\}.$$

Alors, pour tout z tel que $|z| \ge R_0$, on a

$$\begin{aligned}
|P(z)| =& \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \\
\ge& |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z|^k \\
\ge& |a_n||z|^n - n\max_{0\le k\le n-1}|a_k||z|^{n-1} \\
\ge& |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\frac{|a_n|}{2}\frac{2n}{|a_n|}\max_{0\le k\le n-1}|a_k| \\
\ge& \frac{1}{2}|a_n||z|^{n-1} \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

quand $|z|$ tend vers l'infini ; vu que $|z| \ge R_0$. Le passage de la première ligne à la suivante provient de l'inégalité triangulaire. Le passage de la ligne deux à la ligne trois est dû à l'inégalité $|z|^k \le |z|^{n-1}$ pour tout $k \le n-1$. En effet, z est de module supérieur à 1.

En particulier, si $|z|$ est supérieur à une valeur R_1, $|P(z)|$ est supérieur à $\beta+1$. Il s'ensuit que la suite $(z_p)_p$ est de module inférieur ou égal à R_1 pour p assez grand. Ainsi, $(z_p)_p$ est bornée. On peut donc extraire une sous-suite de $(z_p)_p$ qui converge vers une valeur $z_\infty \in \mathbb{C}$. La fonction $z \mapsto |P(z)|$ étant continue, on en déduit que $|P(z_\infty)| = \lim_{p\to\infty} |P(z_p)| = \beta$.

On vient ainsi de prouver l'existence de $z_\infty \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_\infty)| = \beta$. On va maintenant montrer qu'il existe $h \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_\infty + h)| < \beta$. La formule de Taylor nous donne

$$P(z_\infty + h) = P(z_\infty) + \frac{P^{(k)}(z_\infty)}{k!}h^k + h^{k+1}Q(h)\,,$$

où Q est un polynôme. Ici, k est le plus petit entier l supérieur ou égal à 1 tel que $P^{(l)}(z_\infty) \ne 0$. On sait qu'un tel entier existe. En effet, si $P^{(l)}(z_\infty) = 0$ pour tout $l \ge 1$, on en déduit que $h \mapsto P(z_\infty + h)$ est une constante et donc que P est un polynôme constant. Or, on a supposé que P n'était pas constant.

On développe maintenant le module au carré de $P(z_\infty + h)$:

$$\begin{aligned}
|P(z_\infty + h)|^2 =& P(z_\infty + h) \times \overline{P(z_\infty + h)} \\
=& |P(z_\infty)|^2 + \frac{P^{(k)}(z_\infty)}{k!}\overline{P(z_\infty)}h^k + \overline{\frac{P^{(k)}(z_\infty)}{k!}}P(z_\infty)h^k + h^{k+1}\widetilde{Q}(h)\,,
\end{aligned}$$

où $\widetilde{Q}$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On en déduit

$$|P(z_\infty + h)|^2 = |P(z_\infty)|^2 + \mathrm{Re}\left(h^k C\right) + h^{k+1}\widetilde{Q}(h)\,,$$

avec $C := \frac{P^{(k)}(z_\infty)}{k!}\overline{P(z_\infty)}$. C est une constante que l'on met sous forme polaire : $C = \rho e^{i\theta}$.

On met également h sous forme polaire : $h = |h|e^{i\varphi}$. Ainsi : $\mathrm{Re}\left(h^k C\right) = \mathrm{Re}\left(|h|^k e^{ik\varphi}\rho e^{i\theta}\right) = \rho|h|^k \cos\left(k\varphi + \theta\right)$. On prend $\varphi := \frac{\pi-\theta}{k}$. Il s'ensuit : $\mathrm{Re}\left(h^k C\right) = -\rho|h|^k$.

Par conséquent, on a

$$|P(z_\infty + h)|^2 - |P(z_\infty)|^2 = -\rho|h|^k + h^{k+1}\widetilde{Q}(h) = -|h|^k\left(\rho - h\frac{h^k}{|h|^k}\widetilde{Q}(h)\right)\,.$$

On note que $\lim\limits_{h\to 0} h\dfrac{h^k}{|h|^k}\widetilde{Q}(h) = 0$. Ainsi, si $|h|$ est assez petit, on a $\rho - h\frac{h^k}{|h|^k}\widetilde{Q}(h) \geq \frac{\rho}{2}$ et donc

$$|P(z_\infty + h)|^2 - |P(z_\infty)|^2 < -\frac{\rho}{2}|h|^k < 0\,.$$

Or, on a supposé que β était l'infimum de $|P(z)|$. C'est absurde. On en déduit donc que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

$\square$

Corollaire 10.5.10. *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[X]$ *sont les polynômes de degré un.*

On a également :

Corollaire 10.5.11. *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont les polynômes de degré un et les polynômes de degré deux à discriminant strictement négatif.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme irréductible. Si P possède une racine réelle a, on a donc $P(X) = (X-a)Q(X)$. Comme Q est irréductible, on en déduit que le polynôme Q est constant donc P est un polynôme de degré un.

Au contraire, si P n'a pas de racine réelle, on sait qu'il admet une racine complexe z. Comme $P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$, on en déduit que $\overline{z}$ est aussi une racine de P. D'où $P(X) = (X-z)(X-\overline{z})Q(X) = \left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2\right)Q(X)$. Comme P est irréductible, Q est une constante C. D'où P est un polynôme de degré deux avec discriminant strictement négatif (car $\Delta := \left(-2\mathrm{Re}(z)\right)^2 - 4|z|^2 = -4\mathrm{Im}(z)^2 < 0$).

$\square$

Exemple 10.5.12. *On cherche à factoriser le polynôme* $P(X) = X^4 + 1$ *dans* $\mathbb{R}[X]$. *Comme* P *n'a pas de racine dans* $\mathbb{R}$, *il est nécessairement de la forme* $P(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ *avec* $\deg(Q_1) = \deg(Q_2) = 2$. *On commence par factoriser* $P(X)$ *dans* $\mathbb{C}[X]$ *:*

$$P(X) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{-3i\pi}{4}}\right).$$

Puis, on développe les expressions conjuguées entre elles comme suit :

$$P(X) = \left(X^2 - 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + \left|e^{\frac{i\pi}{4}}\right|^2\right)\left(X^2 - 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) + \left|e^{\frac{3i\pi}{4}}\right|^2\right).$$

Il s'ensuit $P(X) = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$.

Remarque 10.5.13. *On peut aussi écrire :*

$$X^4 + 1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2,$$

et une identité remarquable permet de conclure facilement.

10.6 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Dans cette section, on choisit de ne pas entrer dans le détail de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ et de voir seulement ce dont on aura besoin au chapitre suivant sur les fractions rationnelles avec en vue la décomposition en éléments simples.

On ne définira donc pas le PGCD ni le PPCM des polynômes. Toutefois, la notion essentielle des polynômes premiers entre eux est la suivante.

Définition 10.6.1. *Soient P et Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. On dira que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :*

$$\forall R \in \mathbb{K}[X], R \text{ divise } P \text{ et } R \text{ divise } Q \text{ implique } R \text{ est de degré } 0,$$

c'est-à-dire que R est une constante.

Remarque 10.6.2. *Si P et Q sont premiers entre eux, ils n'ont pas de racine en commun. En effet, s'ils ont une racine $a \in \mathbb{K}$ en commun, $X-a$ divise $P(X)$ et $Q(X)$. Pourtant, le degré du polynôme $X-a$ n'est pas 0. On prend la contraposée et l'assertion est prouvée.*

Remarque 10.6.3. *La réciproque est fausse. Ainsi, dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes $P(X) := (X^2+1)(X+1)$ et $Q(X) := (X^2+1)(X+2)$ n'ont pas de racine (sous-entendu dans $\mathbb{R}$) en commun mais les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.*

Une propriété classique des entiers est de pouvoir être écrit de façon unique comme produit de nombres premiers et d'un élément inversible (1 ou -1). On dispose d'une propriété semblable avec les polynômes.

Théorème 10.6.4. *Tout polynôme non constant est le produit d'un scalaire par un produit de polynômes irréductibles* unitaires *de $\mathbb{K}[X]$. De plus, à l'ordre près des facteurs, cette décomposition est unique.*

La preuve du Théorème 10.6.4 est admise.

Rappel 10.6.5. *Dans la Définition 10.1.13, un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à* 1.

Corollaire 10.6.6. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et si* P *est un polynôme non constant de* $\mathbb{C}[X]$, *alors, on peut écrire :*

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{\alpha_k} \ ,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $z_1, \cdots, z_r \in \mathbb{C}$ *et* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

La preuve du corollaire est immédiate à partir du Théorème 10.6.4. En effet, les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $X - z$ où $z \in \mathbb{C}$.

De même, on a

Corollaire 10.6.7. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et si* P *est un polynôme non constant de* $\mathbb{R}[X]$, *alors, on peut écrire :*

$$P(X) = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{\alpha_k} \right) \times \left(\prod_{l=1}^{s} \left(X - 2\mathrm{Re}(z_l) + |z_l|^2 \right)^{\beta_l} \right) \ ,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_1, \cdots, x_r \in \mathbb{R}$, $z_1, \cdots, z_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ *et* $\beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathbb{N}^*$.

10.7 Exercices

Exercice 1

Soit $Q(X) := X^2 + 1$ et $P(X) := (X + 1)(3X^2 + 5)$. Calculer $(Q \circ P)(X)$ et $(P \circ Q)(X)$.

Exercice 2

Montrer que si le polynôme P divise le polynôme Q et si $Q \neq 0$ alors $\deg(P) \leq \deg(Q)$.

Exercice 3

Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^6 + 2X^5 + X^4 + X^3 + 1$ par $X^2 + 6$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 6$.

Exercice 5

Déterminer les racines du polynôme X^5-X^4-X+1 avec leur ordre de multiplicité.

Exercice 6

Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 dans le polynôme $X^4+3X^3-3X^2-7X+6$.

Exercice 7

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\,.$$

Chapitre 11

Fractions rationnelles

En première lecture, la première section peut être omise et il est possible d'aller directement à la page 159. En effet, il s'agit de la construction rigoureuse de l'ensemble des fractions rationnelles. Ainsi, l'étudiant est invité à ne consulter ce paragraphe qu'en cas de crise aigüe de curiosité.

11.1 Construction générale d'un corps de fractions

Pour commencer, nous allons donner les axiomes de base des structures algébriques qui auront un intérêt ici.

11.1.1 Structures algébriques

L'intérêt des structures algébriques est de pouvoir regrouper différents objets pour leur appliquer des résultats systématiques.

11.1.1.1 Lois de composition interne

On considère E un ensemble non vide : $E \neq \emptyset$.

Définition 11.1.1. *Une loi de composition interne, notée $*$, sur E est définie par la donnée d'une application de $E \times E$ dans E :*

$$\varphi \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (a, b) & \mapsto & \varphi(a, b) =: a * b \end{array} \right. .$$

Exemple 11.1.2. *On prend $E = \mathbb{N}$, ou $E = \mathbb{Z}$, ou $E = \mathbb{Q}$, ou $E = \mathbb{R}$, ou $E = \mathbb{C}$. Voici quelques lois de composition interne sur l'ensemble E :*

- $* = +$ *: l'addition.*
- $* = \times$ *: la multiplication.*

Exemple 11.1.3. *On peut prendre E l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact. Alors, le produit de convolution est une loi de composition interne.*

Lorsque les lois de composition interne satisfont de bonnes propriétés, on dispose de structures algébriques pour lesquelles de nombreux résultats sont obtenus. Listons les propriétés classiques des lois de composition interne.

Commutativité

Définition 11.1.4. *La loi de composition interne $*$ est dite commutative si et seulement si pour tous les éléments a et b de l'ensemble E, $a * b = b * a$.*

Exemple 11.1.5. *L'addition est commutative dans $\mathbb{R}$: $x + y = y + x$.*

Contre-exemple 11.1.6. *La soustraction n'est pas commutative dans $\mathbb{R}$: $1-2 \neq 2-1$.*

Associativité

Définition 11.1.7. *La loi de composition interne $*$ est dite associative si et seulement si pour tous les éléments a, b et c de l'ensemble E, on a*

$$a * (b * c) = (a * b) * c\,.$$

On peut alors écrire $a * b * c$.

Exemple 11.1.8. *La multiplication est associative dans $\mathbb{R}_+^*$: $(x \times y) \times z = x \times (y \times z) = x \times y \times z$.*

Contre-exemple 11.1.9. *La division n'est pas associative dans $\mathbb{R}_+^*$:*

$$1 = (4/2)/2 \neq 4/(2/2) = 4/1 = 4\,.$$

Élément neutre

Définition 11.1.10. *La loi de composition interne $*$ sur E admet un élément neutre si et seulement si*

$$\exists e \in E \quad \forall a \in E \ : \ a * e = e * a = a\,.$$

Exemple 11.1.11. 0 *est l'élément neutre de l'addition dans $\mathbb{R}$.* 1 *est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

Contre-exemple 11.1.12. *Dans l'ensemble des fonctions causales et localement sommables, le produit de convolution n'admet pas d'élément neutre. En effet, cet élément neutre est δ_0 qui est une distribution mais pas une fonction.*

Proposition 11.1.13. *Si la loi $*$ sur E admet un élément neutre, cet élément neutre est unique.*

Démonstration. Soient e_1 et e_2 deux éléments neutres pour la loi de composition interne $*$. On a alors

$$e_1 * e_2 = e_2$$

car e_1 est un élément neutre. De même, on a

$$e_1 * e_2 = e_1$$

car e_2 est un élément neutre. Il vient : $e_1 = e_2$. □

Inverse

Définition 11.1.14. *Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il est muni d'une loi de composition interne $*$. On suppose que $*$ admet un élément neutre e. On dit que $a \in E$ est inversible pour la loi de composition interne $*$ s'il existe $a' \in E$ tel que*

$$a * a' = a' * a = e\,.$$

Exemple 11.1.15. *Tous les réels sont inversibles pour l'addition dans $\mathbb{R}$.*

Contre-exemple 11.1.16. 0 *n'est pas inversible pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 11.1.17. *Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il est muni d'une loi de composition interne associative $*$. On suppose que $*$ admet un élément neutre e. Si $a \in E$ admet un inverse pour $*$, alors cet inverse est unique.*

Démonstration. On suppose qu'il existe $a' \in E$ et $a'' \in E$ tels que

$$a * a' = a' * a = e \quad \text{et} \quad a * a'' = a'' * a = e\,.$$

On a alors

$$a'' * (a * a') = a'' * e\,.$$

L'associativité nous donne

$$(a'' * a) * a' = a'' * e\,.$$

Or, $a'' * a = e$. Il vient

$$e * a' = a'' * e\,.$$

Par définition de l'élément neutre, on trouve $a' = a''$. □

Il convient de noter que l'inverse n'est pas nécessairement unique pour peu que la loi ne soit pas associative. On pense aux distributions et au produit de convolution. Alors, si l'on ne se restreint pas à l'algèbre de convolution des fonctions causales, on peut avoir un problème de définition du produit de convolution si bien que l'inverse n'est pas unique. C'est tout l'enjeu des fonctions de Green.

11.1.1.2 Groupe

On introduit ici la structure de groupe. Celle-ci joue un grand rôle applicatif. En effet, de nombreuses propriétés chimiques et biologiques proviennent des groupes d'invariance des composants chimiques ou des protéïnes. Ils sont aussi à la base de la théorie de Galois.

En fait, la théorie des groupes est aussi intrinsèquement liée à la notion de caractères. Ces derniers sont à la source de la transformée de Fourier dans le cas le plus général.

Définition 11.1.18. *On dit que le couple* $(\mathbb{E}, *)$ *est un groupe si les cinq axiomes suivants sont vérifiés.*

- $\mathbb{E}$ *est un ensemble non vide.*
- $*$ *est une loi de composition interne sur l'ensemble* $\mathbb{E}$.
- $*$ *est associative.*
- $*$ *admet un élément neutre.*
- *Tout élément de* $\mathbb{E}$ *est inversible pour la loi* $*$.

Définition 11.1.19. *Si de plus, la loi de composition interne* $*$ *est commutative, on dit que* $(\mathbb{E}, *)$ *est un groupe abélien ou un groupe commutatif.*

Remarque 11.1.20. *Si la loi* $*$ *est une addition, son élément neutre est noté* $0_{\mathbb{E}}$ *(spécifier le zéro peut être utile en algèbre linéaire). L'inverse d'un élément* a *est alors noté* $-a$.

Remarque 11.1.21. *Si la loi* $*$ *est une multiplication, son élément neutre est noté* $1_{\mathbb{E}}$. *L'inverse d'un élément* a *est alors noté* a^{-1}.

Remarque 11.1.22. *Si un ensemble dispose à la fois d'une addition et d'une multiplication, on note* $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{0_{\mathbb{E}}\} = \{a \in \mathbb{E} \ : \ a \neq 0_{\mathbb{E}}\}$.

Quelques exemples

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.
- $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe abélien.
- $(\mathbb{E}, \circ)$ est un groupe non commutatif où $\mathbb{E}$ est l'ensemble des transformations du plan laissant invariante une figure géométrique donnée et où $\circ$ est la composition.

11.1.1.3 Anneau

On va ici présenter la structure d'anneau, qui apparaît naturellement quand on fait du calcul matriciel. Il s'agit d'un ensemble muni de deux lois internes ayant certaines bonnes propriétés.

Distributivité On présente la distributivité d'une loi de composition interne par rapport à une deuxième loi de composition interne.

Définition 11.1.23. *Soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni de deux lois internes $*$ et T. On dit que la loi T est distributive par rapport à la loi $*$ si et seulement si pour tous les éléments a, b et c de l'ensemble $\mathbb{E}$, on a*

$$aT(b * c) = (aTb) * (aTc) \quad et \quad (a * b)Tc = (aTc) * (bTc)\,.$$

Remarque 11.1.24. *Si T est commutative, il suffit de vérifier une seule des deux égalités.*

Remarque 11.1.25. *Si $*$ est une addition et T une multiplication, cela revient à avoir*

$$a(b + c) = ab + ac \quad et \quad (a + b)c = ac + bc\,.$$

On pense également à la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection ; ou même à la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.

Définition On dit que le triplet $(\mathbb{E}, *, T)$ est un anneau si les cinq axiomes suivants sont vérifiés.

- $(\mathbb{E}, *)$ est un groupe abélien.
- T est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{E}$.
- T est associative.
- T admet un élément neutre.
- T est distributive par rapport à $*$.

En d'autres termes, le triplet $(\mathbb{E}, *, T)$ est un anneau s'il vérifie les dix axiomes suivants :

- $\mathbb{E}$ est un ensemble non vide.
- $*$ est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{E}$.
- $*$ est associative.
- $*$ admet un élément neutre.
- Tout élément de $\mathbb{E}$ est inversible pour la loi $*$.
- $*$ est commutative.
- T est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{E}$.
- T est associative.
- T admet un élément neutre.
- T est distributive par rapport à $*$.

Remarque 11.1.26. *Notons bien que l'on n'a pas demandé l'inversibilité de tous les éléments de $\mathbb{E}$ pour la loi T. D'ailleurs, l'élément neutre pour $*$* ne peut pas *être inversible pour T dès que l'ensemble $\mathbb{E}$ contient au moins deux éléments.*

Démonstration. Soit a un élément quelconque de $\mathbb{E}$ et e l'élément neutre pour la première loi de composition interne, $*$. On a alors

$$\begin{aligned}(aTe) * (aTe) &= aT(e * e)\\ &= aTe\,.\end{aligned}$$

Or, aTe est inversible pour la loi de composition interne $*$. On note b cet inverse. Il vient

$$b * (aTe * aTe) = (b * aTe) * aTe = e * aTe = aTe\,.$$

Or,

$$b * (aTe * aTe) = b * aTe = e\,.$$

On en déduit $aTe = e$ pour tout $a \in \mathbb{E}$. Si e est inversible pour T, il existe donc $e' \in E$ tel que $e'Te = e_T$ où e_T est l'élément neutre pour T. Or, $e'Te = e$. On trouve $e_T = e$. Puis, pour tous les éléments x et y dans $\mathbb{E}$, on a

$$(x * y)Te = (x * y)Te_T = x * y \quad \text{et} \quad (x * y)Te = e\,.$$

On a donc $x * y = e$. En particulier, $e * x = e$. Or, $e * x = x$. Il vient donc que l'ensemble $\mathbb{E}$ contient un unique élément, ce qui est faux par hypothèse. □

Un exemple classique d'anneau est celui de l'ensemble des matrices carrées réelles de taille $n \times n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, voir page 181. Un certain nombre d'éléments de cet anneau ne sont d'ailleurs pas inversibles.

Exemple 11.1.27. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau. En l'occurrence, seuls* 1 *et* -1 *sont inversibles pour la multiplication.*

11.1.1.4 Corps

La structure de corps est *la* structure algébrique sur laquelle on se place pour effectuer des calculs. Ainsi, l'enjeu du corps des complexes est de faire de la géométrie dans le plan uniquement par le calcul. De la même manière, le corps des quaternions permet de faire de la géométrie dans l'espace. On ne peut pas faire de géométrie par de simples calculs en dimension supérieure ou égale à quatre, d'après le théorème de Frobenius, voir par exemple le livre d'Algèbre de Perrin.

Définition On dit que le triplet $(\mathbb{E}, *, T)$ est un corps si les deux axiomes suivants sont vérifiés :

- $(\mathbb{E}, *, T)$ est un anneau.
- Tous les éléments de $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{e_*\}$ sont inversibles pour T.

En d'autres termes, le triplet $(\mathbb{E}, *, T)$ est un corps s'il vérifie les six axiomes suivants :

- $(\mathbb{E}, *)$ est un groupe abélien.

- T est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{E}$.
- T est associative.
- T admet un élément neutre.
- T est distributive par rapport à $*$.
- Tous les éléments de $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{e_*\}$ sont inversibles pour T.

En réécrivant tous les axiomes, on suppose donc :

- $\mathbb{E}$ est un ensemble non vide.
- $*$ est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{E}$.
- $*$ est associative.
- $*$ admet un élément neutre e_*.
- Tout élément de $\mathbb{E}$ est inversible pour la loi $*$.
- $*$ est commutative.
- T est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{E}$.
- T est associative.
- T admet un élément neutre.
- T est distributive par rapport à $*$.
- Tous les éléments de $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{e_*\}$ sont inversibles pour T.

Exemples La plupart des corps que l'on considère sont $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$. On note généralement $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, pour simplifier.

11.1.2 Corps des fractions

L'enjeu d'un corps de fractions est de générer un corps à partir d'un anneau. Cela revient donc à "inverser" tous les éléments de l'anneau (exception faite bien sûr de l'élément neutre pour la première loi).

On peut de suite noter qu'on ne pourra pas créer un corps à partir d'un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$ qui n'est pas intègre (dont le produit de deux éléments non nuls est nécessairement non nul). En effet, supposons que $a \times b = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors si l'on parvenait à inverser a et b, en notant a^{-1} et b^{-1} les inverses respectifs, on trouverait :

$$a^{-1} \times (a \times b) \times b^{-1} = \big(a^{-1} \times a\big) \times \big(b \times b^{-1}\big) = 1 \times 1 = 1\,,$$

en utilisant l'associativité de la multiplication. Mais par ailleurs, $a \times b = 0$ donc $a^{-1} \times (a \times b) \times b^{-1} = a^{-1} \times 0 \times b^{-1} = 0$. Il s'ensuit $0 = 1$. À moins de considérer un ensemble réduit à un unique élément donc sans le moindre intérêt, on aboutit à une contradiction.

Dorénavant, on se restreint au cas d'un anneau commutatif (dont la multiplication est commutative) intègre $\mathbb{A}$. C'est le cas notamment de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$.

On considère $\mathbb{A} \times \mathbb{A}^* := \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \ : \ b \neq 0\}$. On le munit de la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc\,.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence. En effet, $ab = ba$ par commutativité d'où $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ ce qui correspond à l'axiome de réflexivité.

De même, si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ alors $ad = bc$ d'où $cb = da$ par commutativité si bien que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$. Ceci correspond à l'axiome de symétrie.

Enfin, si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et si $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$, il vient $ad = bc$ et $cf = ed$. On a alors $adf = bcf = bed$ d'où $afd = bed$. Il vient $(af - be)d = 0$. Comme $\mathbb{A}$ est intègre, on en déduit $d = 0$ ou $af - be = 0$. Comme on a supposé $d \neq 0$, on obtient $af = be$ donc $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

On se donne alors la classe d'équivalence associée à (a,b). Cette classe d'équivalence sera notée $\frac{a}{b}$. Et, l'ensemble des classes d'équivalences est noté $\mathrm{Frac}\,(\mathbb{A})$. On le munit de l'addition et de la multiplication comme suit :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\,,$$

et

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\,.$$

Notons que ces opérations sont bien définies dans le sens où la somme comme le produit ne dépendent pas du représentant choisi. On se donne $(a',b')\mathcal{R}(a,b)$ et $(c',d')\mathcal{R}(c,d)$. Alors :

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}\,.$$

Or, $(a'd' + b'c', b'd')\,\mathcal{R}\,(ad + bc, bd)$. En effet, $(a'd' + b'c')\,bd = a'd'bd + b'c'bd = (a'b)dd' + (c'd)b'b = ab'dd' + cd'b'b = (ad + bc)\,b'd'$.

De même, $(a'c', b'd')\,\mathcal{R}\,(ac, bd)$ puisque $a'c'bd = (a'b)(c'd) = (ab')(cd') = acb'd'$.

Théorème 11.1.28. *L'ensemble* $\mathrm{Frac}\,(\mathbb{A})$ *muni de l'addition et de la multiplication est un corps. De plus, l'application de* $\mathbb{A}$ *dans* $\mathrm{Frac}\,(\mathbb{A})$ *qui envoie* a *sur* $\frac{a}{1}$ *est injective. Ceci permet donc d'identifier* $\mathbb{A}$ *comme étant un sous-anneau de* $\mathrm{Frac}\,(\mathbb{A})$.

Ainsi, tout élément non nul b de $\mathbb{A}$ admet un inverse $b^{-1} = \frac{1}{b}$ dans $\mathrm{Frac}\,(\mathbb{A})$. Et, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$.

C'est de cette manière que l'on crée le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

Définition 11.1.29. *Le corps des fractions rationnelles en* X *et à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *(un corps) est le corps des fractions de* $\mathbb{K}[X]$.

Notation 11.1.30. *On note cet ensemble* $\mathbb{K}(X)$.

Remarque 11.1.31. *Il convient de bien faire attention à l'écriture. En effet,* $\mathbb{K}[X]$ *(avec crochets) est l'anneau des polynômes tandis que* $\mathbb{K}(X)$ *(avec parenthèses) est le corps des fractions rationnelles.*

11.2 Définition des fractions rationnelles

Comme dans le chapitre sur les polynômes, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 11.2.1. *Une fraction rationnelle F sur $\mathbb{K}$ s'écrit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$.*

La justification théorique de cette écriture n'est pas fournie dans cette section. Le lecteur curieux est invité à lire la section précédente à partir de la page 151

Définition 11.2.2. *L'ensemble des fractions rationnelles se note $\mathbb{K}(X)$.*

Définition 11.2.3. *On dira que deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont égales si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.*

Définition 11.2.4. *Si $F = \frac{P}{Q}$, alors $\frac{P}{Q}$ est appelé* **un** *représentant de F.*

Exemple 11.2.5. *Les expressions $\frac{X}{X^2+1}$, $\frac{2X}{2X^2+2}$ et $\frac{X^2}{X^3+X}$ sont des représentants de la même fraction.*

Dès lors, comment calculer si plusieurs expressions représentent la même fraction rationnelle. Le même problème se pose dans $\mathbb{Q}$. La solution est alors de considérer la fraction la plus "simple" possible. Ainsi, on considère $\frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux.

On fait de même avec les fractions rationnelles.

Définition 11.2.6. *Si $F \in \mathbb{K}(X)$ est telle que $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où $Q \neq 0$ et où P est premier avec Q, alors le couple (P, Q) est unique à une constante (dans $\mathbb{K}$) multiplicative non nulle près.*

Définition 11.2.7. *Dans ce cas, on dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.*

Exemple 11.2.8. *Soit $F(X) := \frac{X^2}{X^3+X}$. Alors F admet $\frac{X}{X^2+1}$ pour représentant irréductible.*

11.2.1 Addition et multiplication dans $\mathbb{K}(X)$

On commence par introduire l'addition.

Définition 11.2.9. *Soient $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ deux éléments dans $\mathbb{K}(X)$. On pose*

$$F_1 + F_2 := \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}.$$

Remarque 11.2.10. *Ainsi définie, la somme de deux fractions rationnelles ne dépend pas des représentants choisis. La preuve de cette assertion est dans la Section 11.1.*

On introduit maintenant la multiplication.

Définition 11.2.11. *Soient* $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ *et* $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ *deux éléments dans* $\mathbb{K}(X)$. *On pose*

$$F_1 \times F_2 := \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}\,.$$

Remarque 11.2.12. *Ainsi défini, le produit de deux fractions rationnelles ne dépend pas des représentants choisis. La preuve de cette assertion est dans la Section 11.1.*

On introduit ensuite la multiplication par un scalaire.

Définition 11.2.13. *Soient* $F := \frac{P}{Q}$ *un élément dans* $\mathbb{K}(X)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On pose*

$$\lambda F := \frac{\lambda P}{Q}\,.$$

Remarque 11.2.14. *Ainsi défini, le produit d'une fraction rationnelle par un scalaire ne dépend pas du représentant choisi. La preuve de cette assertion est dans la Section 11.1.*

11.2.2 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 11.2.15. *Soit une fraction rationnelle* $F(X) := \frac{P(X)}{Q(X)}$. *Si* $F \neq 0$, *on appelle degré de* F *le nombre entier (non nécessairement positif) défini par*

$$\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)\,.$$

Et, si $F = 0$, *on pose* $\deg(F) := -\infty$.

Pour rappel, le degré d'un polynôme est défini dans la Définition 10.1.9 à la page 132.

Remarque 11.2.16. *Le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas du représentant choisi.*

Exemple 11.2.17. *On considère* $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. *Alors,* $\deg(F) = -1$.

Exemple 11.2.18. *On considère* $F(X) := \frac{X^4}{X^2+1}$. *Alors* $\deg(F) = 2$.

Remarque 11.2.19. *Comme on a pu le constater dans l'exemple précédent, une fraction rationnelle avec un degré positif n'est pas nécessairement un polynôme.*

Voyons maintenant quelques propriétés du degré des fractions rationnelles.

Proposition 11.2.20. *Soient* $F, G \in \mathbb{K}(X)$. *Comme pour le degré des polynômes,* $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$.

Exercice 11.2.21. *Démontrer la proposition.*

11.3 Zéros et pôles

La notion de pôle d'une fraction rationnelle est essentielle dans la décomposition en éléments simples, cette dernière étant centrale dans l'étude des fonctions de transfert en traitement du signal.

Avant cela, on définit la notion de zéro.

Définition 11.3.1. *Soit* $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. *On suppose que* $\frac{P}{Q}$ *est un représentant* irréductible. *Alors toute racine du numérateur* P *est un zéro.*

Exemple 11.3.2. *Soit* $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. *Alors* 0 *est un zéro de* F.

Contre-exemple 11.3.3. *Soit* $F(X) := \frac{X(X+1)}{(X^2+1)(X+1)}$. *Alors* -1 *n'est pas un zéro de* F.

Abordons maintenant la notion de pôle.

Définition 11.3.4. *Soit* $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. *On suppose que* $\frac{P}{Q}$ *est un représentant* irréductible. *Alors toute racine du dénominateur* Q *est un pôle.*

Exemple 11.3.5. *Soit* $F(X) := \frac{X}{X^2-1}$. *Alors* 1 *est un pôle de* F.

Contre-exemple 11.3.6. *Soit* $F(X) := \frac{X(X+2)}{(X^2-1)(X+2)}$. *Alors* -2 *n'est pas un pôle de* F.

11.4 Décomposition en éléments simples

Cette section est décomposée en deux parties. Dans la première, on donne les aspects théoriques de la décomposition en éléments simples tandis que dans la seconde, on donne quelques astuces pour pratiquer concrètement une décomposition en éléments simples.

Nous invitons fortement le lecteur à lire la première partie. En effet, celle-ci permet de mieux cerner la forme de la décomposition, ce qui est la première étape pour réussir à faire celle-ci.

D'abord, donnons deux motivations de la décomposition en éléments simples.

Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x} \mathrm{d}x\,?$$

Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) := \frac{x^{11}-x^5+1}{x^5+5x^3+4x}$. Est-il vraiment évident qu'une telle primitive est

$$F(x) := \frac{1}{4}\log(x) - \frac{1}{3}\log(1+x^2) - \frac{1}{3}\arctan(x) - \frac{3}{4}\log(4+x^2) + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)?$$

Sans procéder à la décomposition en éléments simples, cela semble impossible. Au contraire, si l'on remarque :

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1+2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{8-3x}{4+x^2}\,,$$

la connaissance des primitives usuelles permet de conclure immédiatement.

Une autre question à laquelle un étudiant en école d'ingénieurs peut être confronté est l'obtention de la fonction f de la variable réelle x telle que sa transformée de Laplace est égale à

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2+2p-4}{p^4+2p^3+p^2}\,.$$

La réponse est bien évidemment

$$f(x) := \left(10 - 4x - 10e^{-x} - 5xe^{-x}\right) H(x)\,,$$

où H est la fonction de Heaviside.

Mais, au-delà des techniques usuelles en mathématiques des signaux, pour aboutir à ce résultat, il fallait remarquer

$$\frac{p^2+2p-4}{p^4+2p^3+p^2} = -\frac{4}{p^2} + \frac{10}{p} - \frac{5}{(p+1)^2} - \frac{10}{p+1}\,.$$

En d'autres termes, il fallait avoir décomposé en éléments simples.

Remarque 11.4.1. *En fait, il était possible de ne pas procéder à la décomposition en éléments simples mais dans ce cas il fallait procéder à un produit de convolution entre deux distributions. Il était bien plus simple de décomposer en éléments simples.*

11.4.1 La théorie de la décomposition en éléments simples

On donne ici la formule générale de la décomposition en élément simples.

Théorème 11.4.2. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F tel que Q admet la décomposition en facteurs irréductibles suivante dans $\mathbb{K}[X]$:*

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{r} P_k(X)^{\alpha_k}\,.$$

Alors, la fraction F s'écrit de façon unique sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{Q_{k,j}(X)}{P_k(X)^j} \right)\,,$$

où $E \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $k \in [\![1;r]\!]$ et pour tout $j \in [\![1;\alpha_k]\!]$, on a $Q_{k,j} \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(Q_{k,j}) < \deg(P_k)$.

La preuve est admise.

Remarque 11.4.3. *E est la partie entière de F. Il s'agit aussi du quotient de la division euclidienne de P par Q.*

$F - E$ est la partie fractionnaire de F.

Définition 11.4.4. *Les fractions rationnelles $\frac{Q_{k,j}}{P_k^j}$ et E sont les éléments simples de la décomposition en éléments simples.*

Remarque 11.4.5. *De manière générale, les éléments simples de $\mathbb{K}(X)$ sont donc les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et les fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q^\alpha}$ où Q est irréductible et* $\deg(P) < \deg(Q)$.

Remarque 11.4.6. *Le degré de P est strictement inférieur au degré de Q et non pas celui de Q^α.*

Rappel 11.4.7. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $X - z_0$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$.*

On en déduit que la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$ est de la forme suivante.

Théorème 11.4.8. *Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z_1, \cdots, z_r$ les pôles de F d'ordres respectifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. F s'écrit alors de manière unique*

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - z_k)^j} \right) ,$$

où E est la partie entière de F et $A_{k,j} \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ et $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$.

Rappel 11.4.9. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de la forme $X - x_0$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou de la forme $(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)X + |z_0|^2)$ avec $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

On en déduit que la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ est de la forme suivante.

Théorème 11.4.10. *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $x_1, \cdots, x_r$ les pôles réels de F d'ordres respectifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Soient $z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s}$ les pôles* complexes *non réels de F d'ordres respectifs $\beta_1, \cdots, \beta_s$. F s'écrit alors de manière unique*

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\mathrm{deg}(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right) ,$$

où E est la partie entière de F, $A_{k,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ et $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$, $B_{l,j}, C_{l,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $l \in [\![1; s]\!]$ et $j \in [\![1; \beta_l]\!]$.

11.4.2 La pratique de la décomposition en éléments simples

Bien comprendre la théorie est une chose. Savoir faire une décomposition en éléments simples en est une autre.

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment, en pratique, mener à bien une telle décomposition. Nous donnons des exemples de fractions rationnelles et nous les décomposons avec les astuces que nous présentons.

Nous ne présenterons pas la pratique de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$. En effet, comprendre celle dans $\mathbb{R}$ est suffisant. Également, dans la pratique que les étudiants en auront, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ est à peu près inutile. Qu'il s'agisse de primitivation dans $\mathbb{R}$ ou de transformée de Laplace inverse pour retrouver une fonction réelle, le corps que l'on utilise est $\mathbb{R}$.

11.4.2.1 Procédure

On se donne une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F. Voici étape par étape la procédure à suivre.

- On calcule le degré de F, c'est-à-dire $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.
- Si $\deg(F) < 0$, on passe à l'étape numéro quatre. Si $\deg(F) \geq 0$, on commence par déterminer la partie entière E. Pour ce faire, on effectue la division euclidienne de P par Q. E est le quotient de cette division.
- On considère la partie fractionnaire de F : $G := \frac{P}{Q} - E = \frac{\widetilde{P}}{Q}$. On effectue ensuite la décomposition en éléments simples de G.
- On factorise le polynôme Q comme suit : $Q(X) = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{\alpha_k}\right) \times \left(\prod_{l=1}^{s} (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^{\beta_l}\right)$.
- On écrit la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{\widetilde{P}}{Q}$:

$$G(X) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\deg(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right).$$

- On détermine ensuite les coefficients $A_{k,j}$, $B_{l,j}$ et $C_{l,j}$.

La partie de la procédure la plus importante est la dernière donc il est assez décevant que rien ne soit expliqué sur comment obtenir les coefficients réels. En fait, il n'y a pas qu'une unique manière de procéder. Il y a toute une batterie de techniques qui dépendent fortement de la fraction rationnelle.

Nous ne présenterons pas toutes les techniques mais plutôt celles qui sont les plus simples et qui fonctionnent dans la plupart des cas.

11.4.2.2 Identification

Nous commençons par présenter la méthode la plus simple à comprendre mais aussi la plus pénible et lente à mettre en œuvre. En d'autres termes, il ne faut l'utiliser qu'en tout dernier recours.

On part de

$$G(X)=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_k}\frac{A_{k,j}}{(X-x_k)^j}\right)+\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\beta_l}\frac{B_{l,j}X+C_{l,j}}{(X^2-2\text{deg}(z_l)X+|z_l|^2)^j}\right),$$

et l'on met tout au même dénominateur. Puis, l'on identifie les coefficients du numérateur obtenu avec ceux de $\widetilde{P}$.

Voici un exemple :

$$G(X)=\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}\,. \tag{11.1}$$

La forme de la décomposition simple est alors

$$\frac{A}{X}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{\left(X^2+1\right)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}\,.$$

On détermine maintenant les huit coefficients en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned}
&X^3+4\\
=&A(X+1)\left(X^2+1\right)^2\left(X^2+4\right)+BX\left(X^2+1\right)^2\left(X^2+4\right)\\
&+(CX+D)X(X+1)(X^2+1)(X^2+4)+(EX+F)X(X+1)(X^2+4)\\
&+(GX+H)X(X+1)\left(X^2+1\right)^2\,.
\end{aligned}$$

On développe le membre de droite terme par terme en commençant par le premier terme.

$$\begin{aligned}
&A(X+1)\left(X^2+1\right)^2\left(X^2+4\right)\\
=&A(X+1)\left(X^4+2X^2+1\right)\left(X^2+4\right)\\
=&A(X+1)\left(X^6+6X^4+9X^2+4\right)\\
=&A\left[X^7+X^6+6X^5+6X^4+9X^3+9X^2+4X+4\right]\,.
\end{aligned}$$

On passe au second terme

$$\begin{aligned}
BX\left(X^2+1\right)^2\left(X^2+4\right)=&BX\left(X^6+6X^4+9X^2+4\right)\\
=&B\left[X^7+6X^5+9X^3+4X\right]\,,
\end{aligned}$$

puis au troisième terme

$$\begin{aligned}
&(CX+D)X(X+1)(X^2+1)(X^2+4)\\
=&(CX^2+DX)\left(X^4+5X^2+4\right)(X+1)\\
=&\left(CX^6+DX^5+5CX^4+5DX^3+4CX^2+4DX\right)(X+1)\\
=&CX^7+(C+D)X^6+(5C+D)X^5+5(C+D)X^4\\
&+(4C+5D)X^3+4(C+D)X^2+4DX\,,
\end{aligned}$$

et au quatrième terme

$$\begin{aligned}
&(EX+F)X(X+1)(X^2+4)\\
=&(EX+F)\left(X^4+X^3+4X^2+4X\right)\\
=&EX^5+(E+F)X^4+(4E+F)X^3+4(E+F)X^2+4FX\,,
\end{aligned}$$

et on termine avec le cinquième terme

$$\begin{aligned}
&(GX+H)X(X+1)\left(X^2+1\right)^2\\
=&(GX+H)(X^2+X)\left(X^4+2X^2+1\right)\\
=&(GX+H)\left(X^6+X^5+2X^4+2X^3+X^2+X\right)\\
=&GX^7+(G+H)X^6+(2G+H)X^5+2(G+H)X^4\\
&+(G+2H)X^3+(G+H)X^2+HX\,.
\end{aligned}$$

On aboutit ainsi à l'équation suivante après avoir remis en ordre les coefficients :

$$\begin{aligned}
X^3+4=&\;X^7\,(A+B+C+G)\\
&+X^6\,(A+C+D+G+H)\\
&+X^5\,(6A+6B+4C+D+E+2G+H)\\
&+X^4\,(6A+5C+5D+E+F+2G+2H)\\
&+X^3\,(5A+5B+4C+5D+4E+F+G+2H)\\
&+X^2\,(5A+4C+4D+4E+4F+G+H)\\
&+X\,(4A+4B+4D+4F+H)\\
&+4A\,.
\end{aligned}$$

L'identification des coefficients entre les deux polynômes nous donne

$$\begin{cases} 4A & = 4 \\ 4A+4B+4D+4F+H & = 0 \\ 9A+4C+4D+4E+4F+G+H & = 0 \\ 9A+9B+4C+5D+4E+F+G+2H & = 1 \\ 6A+5C+5D+E+F+2G+2H & = 0 \\ 6A+6B+5C+D+E+2G+H & = 0 \\ A+C+D+G+H & = 0 \\ A+B+C+G & = 0 \end{cases} .$$

Nous sommes maintenant en face d'un système de huit équations linéaires à huit inconnues. Ainsi, il reste encore beaucoup de calculs à faire.

Il va de soit que nous n'allons pas résoudre un tel système. Néanmoins, si nous le faisions, nous obtiendrions :

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{3}{20} \\ C = -\frac{11}{12} \\ D = \frac{1}{36} \\ E = -\frac{1}{2} \\ F = -\frac{5}{6} \\ G = \frac{1}{15} \\ H = -\frac{8}{45} . \end{cases} .$$

Cet exemple, que l'on reverra par la suite, illustre bien la difficulté de la mise en place de cette méthode.

11.4.2.3 Pôles simples réels

On suppose que $Q(X) = (X - x_1)\widetilde{Q}(X)$ où x_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que x_1 est racine simple de Q.

On a alors :

$$G(X) = \frac{A}{X - x_1} + \sum_{k=2}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\deg(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right) .$$

Puis, en multipliant par $X - x_1$, il vient

$$\frac{\widetilde{P}(X)}{\widetilde{Q}(X)} = A + (X - x_1) \left[\sum_{k=2}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\deg(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right) \right] .$$

Comme x_1 n'est pas un pôle de la fraction rationnelle $\sum_{k=2}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_k}\frac{A_{k,j}}{(X-x_k)^j}\right)+\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\beta_l}\frac{B_{l,j}X+C_{l,j}}{(X^2-2\deg(z_l)X+|z_l|^2)^j}\right)$, on en déduit que prendre $X := x_1$ annule les termes autres que A. Par conséquent, il vient :

$$A=\frac{\widetilde{P}(x_1)}{\widetilde{Q}(x_1)}.$$

Reprenons l'exemple (11.1) :

$$\begin{aligned}&\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}\\&=\frac{A}{X}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}.\end{aligned}$$

On multiplie par X et l'on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{X^3+4}{(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}\\&=A+X\left(\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}\right).\end{aligned}$$

On fait ensuite tendre X vers 0 et l'on trouve $\frac{4}{4}=A$ d'où $A=1$.

On calcule maintenant B en multipliant par $X+1$:

$$\begin{aligned}&\frac{X^3+4}{X(X^2+1)^2(X^2+4)}\\&=B+(X+1)\left(\frac{A}{X}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}\right).\end{aligned}$$

On fait ensuite tendre X vers -1 et l'on trouve $B=\frac{(-1)+4}{-1\times4\times5}=-\frac{3}{20}$.

11.4.2.4 Pôles simples complexes

On procède maintenant comme dans le cas réel.

On suppose que $Q(X)=\left(X^2-2\mathrm{Re}(z_1)X+|z_1|^2\right)\widetilde{Q}(X)$ où z_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que z_1 et $\overline{z_1}$ sont des racines simples de Q.

On a alors :

$$\begin{aligned}G(X) = &\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_k}\frac{A_{k,j}}{(X-x_k)^j}\right)\\&+\frac{BX+C}{X^2-2\deg(z_1)X+|z_1|^2}\\&+\sum_{l=2}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\beta_l}\frac{B_{l,j}X+C_{l,j}}{(X^2-2\deg(z_l)X+|z_l|^2)^j}\right).\end{aligned}$$

Puis, en multipliant par $X^2-2\mathrm{Re}(z_1)X+|z_1|^2$, il vient

$$\begin{aligned}&\frac{\widetilde{P}(X)}{\widetilde{Q}(X)} = BX+C\\&+\left(X^2-2\mathrm{Re}(z_1)X+|z_1|^2\right)\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_k}\frac{A_{k,j}}{(X-x_k)^j}\right)\\&+\left(X^2-2\mathrm{Re}(z_1)X+|z_1|^2\right)\sum_{l=2}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\beta_l}\frac{B_{l,j}X+C_{l,j}}{(X^2-2\deg(z_l)X+|z_l|^2)^j}\right).\end{aligned}$$

Comme z_1 n'est pas un pôle de la fraction rationnelle $\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_k}\frac{A_{k,j}}{(X-x_k)^j}\right)+\sum_{l=2}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\beta_l}\frac{B_{l,j}X+C_{l,j}}{(X^2-2\deg(z_l)X+|z_l|^2)^j}\right)$, on en déduit que prendre $X := z_1$ annule les termes autres que $BX+C$. Par conséquent, il vient :

$$Bz_1+C=\frac{\widetilde{P}(z_1)}{\widetilde{Q}(z_1)}.$$

Puis, comme $z_1\notin\mathbb{R}$, on peut identifier pour trouver B et C.

Reprenons l'exemple :

$$\begin{aligned}&\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}\\&=\frac{A}{X}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}.\end{aligned}$$

On multiplie par X^2+4 et l'on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2}\\&=(X^2+4)\left(\frac{A}{X}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}\right)+(GX+H).\end{aligned}$$

On fait ensuite tendre X vers $2i$ et l'on trouve $\frac{-8i+4}{2i(2i+1)\times 9} = 2iG + H$ d'où $G = \frac{1}{15}$ et $H = -\frac{8}{45}$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{-8i+4}{2i(2i+1)\times 9} &= \frac{1}{9}\frac{(2-4i)(-i(1-2i))}{i(-i)(1+2i)(1-2i)} \\
&= \frac{1}{9}\frac{(2-4i)(-2-i)}{5} \\
&= \frac{1}{45}(-8+6i) \\
&= -\frac{8}{45} + 2i\frac{1}{15}\,.
\end{aligned}$$

Or, $(1, 2i)$ est une base du corps des complexes. De fait, l'égalité

$$2iG + H = -\frac{8}{45} + 2i\frac{1}{15}$$

permet de conclure sur les valeurs de G et de H.

Il reste maintenant à déterminer C, D, E et F.

11.4.2.5 Pôles multiples

Dans le cas des pôles multiples, on multiplie par $(X-x_1)^{\alpha_1}$ puis l'on fait tendre X vers x_1. On obtient alors

$$A_{1,\alpha_1} = \frac{\widetilde{P}(x_1)}{\widetilde{Q}(x_1)}\,,$$

où l'on a $Q(X) = (X - x_1)^{\alpha_1}\widetilde{Q}(X)$ et où x_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$.

On peut procéder de même avec les pôles complexes.

Reprenons l'exemple :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}\,.$$

On multiplie par $(X^2+1)^2$ et l'on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+4)} \\
&= (X^2+1)^2\left(\frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{GX+H}{X^2+4}\right) + (X^2+1)(CX+D) + EX + F\,.
\end{aligned}$$

On fait ensuite tendre X vers i et l'on trouve $\frac{-i+4}{i(i+1)\times 3} = Ei + F$ d'où $E = -\frac{1}{2}$ et $F = -\frac{5}{6}$.

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{-i+4}{i(i+1)\times 3} &= \frac{1}{3}\frac{(4-i)(-i(1-i))}{i(-i)(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{1}{6}(4-i)(-1-i)\\ &= \frac{1}{6}(-5-3i)\\ &= -\frac{5}{6}-i\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer C et D.

11.4.2.6 Réitération du processus

On retranche alors $\frac{A_{1,\alpha_1}}{(X-x_1)^{\alpha_1}}$ et l'on recommence avec $(X-x_1)^{\alpha_1-1}$. Et ainsi de suite. On va procéder autrement pour notre exemple.

11.4.2.7 Utilisation de l'infini

Une technique utile (dans le cas où le degré est strictement négatif, ce qui est le cas ici dans la mesure où l'on a uniquement la partie fractionnaire) est de multiplier par X puis de faire tendre X vers l'infini.

On peut aussi être amené à multiplier par X^2 ou X^3...

Reprenons l'exemple :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} = \frac{A}{X}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}\,.$$

On multiplie par X et l'on fait tendre X vers l'infini.

Or, on a

$$X\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} = \frac{X^3+4}{(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} \simeq \frac{X^3}{X^7} = \frac{1}{X^4}\,.$$

Ainsi, $XG(X) \longrightarrow 0$ quand X tend vers l'infini.

De même,

$$X\left(\frac{A}{X}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}+\frac{EX+F}{(X^2+1)^2}+\frac{GX+H}{X^2+4}\right) \simeq A+B+C+\frac{E}{X^3}+G\,,$$

ce qui tend vers $A+B+C+G$ quand X tend vers l'infini. Il s'ensuit

$$0 = A+B+C+G\,.$$

Conséquemment, $C = -A-B-G = -1+\frac{3}{20}-\frac{1}{15} = -\frac{11}{12}$.

Il reste maintenant à déterminer D.

11.4.2.8 Prendre des valeurs particulières de X

On peut prendre $X = x_0$ où x_0 n'est pas un pôle de la fraction rationnelle. Puis, on obtient une équation linéaire qui lie les coefficients entre eux.

Reprenons l'exemple :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}\,.$$

On prend $X = 1$ et il vient

$$\frac{5}{1\times 2\times 4\times 5} = A + \frac{B}{2} + \frac{C+D}{2} + \frac{E+F}{4} + \frac{G+H}{5}\,.$$

On en déduit $D = \frac{1}{4} - 2A - B - C - \frac{E+F}{2} - 2\frac{G+H}{5} = \frac{1}{36}$.

On retrouve ainsi les valeurs précédemment obtenues pour A, B, C, D, E, F, G et H.

11.4.2.9 Changements de variables judicieux

Une autre technique qui peut servir consiste en un changement de variable.

Plutôt que de théoriser, donnons un exemple.

On considère $F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+1)}$. On sait alors que la forme de la décomposition en éléments simples est

$$F(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{CX+D}{X^2+1}\,.$$

On peut toutefois poser $Y := X^2$. On a alors

$$F(X) = \widetilde{F}(Y) = \frac{1}{Y(Y+1)} = \frac{\lambda}{Y} + \frac{\mu}{Y+1}\,.$$

On utilise les techniques précédentes et l'on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ d'où l'on a directement

$$F(X) = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^2+1}\,.$$

11.4.2.10 Utilisation de la parité et de l'imparité

Dans l'exemple du paragraphe précédent, on peut noter que F est paire. D'où les coefficients devant $\frac{1}{X}$ et $\frac{X}{X^2+1}$ sont forcément nuls.

11.5 Exercices

Exercice 1

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_1(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}.$$

Exercice 2

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}.$$

Exercice 3

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_3(X) = \frac{2X^5 + 10X^3 + 12X}{(X+1)^3(X-1)^3}.$$

Exercice 4

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_4(X) = \frac{X^5}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

Exercice 5

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_5(X) = \frac{2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72}{(X^2 + 4X + 5)^3}.$$

Exercice 6

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_6(X) = \frac{X^5 + 5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}.$$

Exercice 7

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_8(X) = \frac{X^2}{X^4 - 2\cos(a)X^2 + 1}\,.$$

Quatrième partie

Algèbre linéaire

Chapitre 12

Introduction

Comment pourrait-on décemment faire un livre sur les bases indispensables des mathématiques sans inclure une partie sur l'algèbre linéaire ?

12.1 Intérêt

L'intérêt de l'algèbre linéaire peut sembler évident à qui est suffisamment avancé dans des études scientifiques. Néanmoins, nous estimons que la question est légitime, notamment pour ceux qui n'ont pas pratiqué la science mathématique avec intensité.

À vrai dire, on peut estimer sans trop se tromper que l'algèbre linéaire est sans conteste le premier gros morceau de cet ouvrage, l'autre étant l'analyse.

Ce serait mentir de prétendre que tout est linéaire. Mieux, peu de phénomènes scientifiques sont linéaires. Mais les phénomènes linéaires sont les mieux compris et l'on fait tout pour se ramener au cas linéaire. Que l'on s'intéresse à des équations aux dérivées partielles (nous n'aborderons pas ce sujet dans ce livre) ou aux équations différentielles stochastiques (nous ne l'aborderons pas non plus), on se ramène autant que possible au cas où tout est linéaire.

Qui dit "linéaire" dit "ligne". On pense immédiatement aux équations de droites que l'on a vues en troisième. On peut penser aux systèmes d'équations à plusieurs inconnues (systèmes linéaires bien sûr). En d'autres termes, quel que soit le lecteur post-bac, il baigne depuis longtemps dans le monde merveilleux de l'algèbre linéaire.

Nous ne donnerons pas d'éthymologie dans ce chapitre. Nous ne parlerons pas non plus des très nombreuses applications de l'algèbre linéaire dans les autres sciences (que ce soit l'économie, les sciences sociales, la recherche opérationnelle et en particulier, la planification et l'optimisation, les systèmes dynamiques et par suite les sciences physiques...).

Nous nous contenterons d'évoquer à quoi l'algèbre linéaire peut bien servir dans des études d'ingénieurs généralistes en évitant de sortir le couplet sur la culture mathématique que tout ingénieur se doit d'avoir. Après tout, si ça ne servait à rien, autant ne pas l'enseigner et avoir des vrais experts...

Comme déjà dit dans un chapitre introductif précédent, les étudiants en première année de cycle ingénieur vont toucher du doigt une science qui leur est jusque là totalement inconnue à savoir le traitement du signal. Le traitement du signal peut être présenté de diverses manières. L'une d'entre elles, et c'est celle qui est retenue à Télécom consiste à étudier la théorie des distributions. Nous n'allons bien sûr pas développer cette théorie ici car ce serait hors de propos mais pour faire court, une distribution est une forme linéaire continue. Nous allons nous concentrer sur le mot "linéaire". Ce mot fait immédiatement écho à l'algèbre linéaire. Ainsi, pour bien sentir la théorie des distributions, il convient de connaître la notion d'espaces vectoriels de manière suffisamment poussée. Il convient de savoir ce qu'est une application linéaire.

Également, la notion de système LIT jouera un rôle prépondérant. Qu'est un système LIT ? C'est un système linéaire et invariant dans le temps. À nouveau, le mot "linéaire" apparaît. Les systèmes LIT étant à la base de tout système un tant soit peu compliqué, il faut à nouveau bien saisir ce qu'est une transformation linéaire.

Retournons en mathématiques : les équations différentielles les mieux comprises (quoique pas complètement) sont les équations différentielles linéaires (et lorsque les coefficients sont constants, ces équations correspondent en fait à des systèmes LIT analogiques). De même, les suites sophistiquées les mieux comprises sont des suites satisfaisant une équation linéaire (si les coefficients sont constants, on a cette fois-ci un système LIT numérique). Toujours en mathématiques, la notion de matrice joue un rôle prépondérant dans la compréhension de ce qu'est la matrice de covariance, en particulier avec les variables aléatoires gaussiennes multidimensionnelles. L'inversion des matrices c'est-à-dire la résolution de systèmes linéaires est centrale en analyse numérique comme en statistiques.

Le logiciel matlab, en analyse numérique, est fondé sur la notion de matrice. Or, un ingénieur qui ne maîtrise ni matlab, ni le traitement du signal, ni les systèmes LIT n'est pas un vrai ingénieur. Vous l'aurez compris : un ingénieur se doit de maîtriser au moins superficiellement l'algèbre linéaire s'il veut prétendre au titre de "vrai ingénieur".

Ainsi, bien que l'algèbre linéaire en tant que telle ne soit pas un objet d'étude à proprement parler à Télécom, il convient de lire cette partie. Ce n'est pas une option.

12.2 Objectifs

Cette partie poursuit divers objectifs. Il s'agit de donner une première idée de ce dont il retourne à qui n'a jamais étudié formellement la notion d'espaces vectoriels. Il s'agit de donner les outils essentiels pour que tout étudiant puisse aborder sereinement le cours sur les distributions, le cours sur les systèmes, le cours sur les signaux aléatoires (la transformée de Fourier comme la transformée de Laplace et celle en Z étant linéaires), les cours de probabilités et statistiques et d'estimation pour le signal en tronc commun.

12.3 Prérequis

Bien que l'on reprenne tout depuis le début, en prenant l'exemple des matrices pour commencer, il convient de maîtriser la notion d'équation de droite. Il convient également de savoir ce qu'est un système linéaire. Il faut également bien relire la première partie pour ne pas être débordé par les raisonnements typiques de l'algèbre linéaire.

La lecture des chapitres les plus théoriques sur ce qu'est un groupe ou sur ce qu'est un corps peut être un plus. Enfin, la lecture du chapitre sur les polynômes peut être un plus.

12.4 Organisation

Nous avons choisi dans ce cours de commencer par les matrices, bien qu'il puisse être raisonnable de d'abord traiter les espaces vectoriels généraux, puis l'espace $\mathbb{R}^n$, puis les applications linéaires et après seulement les matrices.

En effet, le produit des matrices peut sembler bizarre à première vue. Il prend son sens quand on étudie ce qu'est une application linéaire.

Néanmoins, nous avons opté pour un point de vue qui limite le saut conceptuel. Nous commençons donc par les matrices, puis nous enchaînons avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Nous étendons aux espaces vectoriels généraux. Nous présentons la notion d'applications linéaires. Le déterminant est ensuite introduit en vue de pouvoir résoudre dans le chapitre suivant les systèmes linéaires. Nous terminons par un bref chapitre sur la réduction des endomorphismes.

12.4.1 Matrices

Nous commençons la quatrième partie par un chapitre sur les matrices. L'approche se veut la moins théorique possible. Nous munissons nos ensembles de matrices (les plus raisonnables seulement en fait) d'une structure d'algèbre puis nous étudions la notion d'inverse et de transposée, laquelle prendra tout son sens dans la partie suivante sur les formes quadratiques.

12.4.2 Étude de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, nous étudions le caractère vectoriel des ensembles de n-uplet. Nous munissons ainsi cet ensemble d'une structure dite d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Nous étudions ensuite les sous-espaces vectoriels (droites, plans, etc). La notion de sommes d'espaces vectoriels est étudiée de même que celle de supplémentaire (à ne surtout pas confondre avec la notion de complémentaire).

Des notions élémentaires d'algèbre linéaire sont données : familles libres, familles génératrices, bases et bien sûr, la dimension.

12.4.3 Espaces vectoriels

Dans ce quatrième chapitre de la quatrième partie, nosu étendons les notions vues précédemment à des cas beaucoup plus généraux où cette structure d'espace vectoriel se répète, ce qui en fait sa force.

La notion de dimension, dont elle jouera un rôle prépondérant par la suite, est utilisée. Par ailleurs, notons par avance que la dimension peut être infinie. Mieux, dans les cas les plus riches, elle est infinie.

12.4.4 Applications linéaires

Les applications lient les ensembles entre eux. Les applications linéaires font de même tout en préservant la structure d'espace vectoriel. Nous voyons en particulier qu'en dimension finie, chacune d'entre elle est entièrement décrite par une matrice. Des exemples ainsi que du vocabulaire sont donnés. On voit leurs propriétés et on introduit la notion de noyau et d'image. Ces notions sont essentielles pour aborder la réduction des endomorphismes ou même pour aborder la notion de projection (ce qu'est l'espérance pour l'ensemble des variables aléatoires réelles admettant une espérance).

12.4.5 Déterminant

Le déterminant est un outil des plus précieux car il détermine l'inversibilité ou non de la matrice et donc de l'application linéaire sous-jacente. Il peut également être utilisé pour résoudre des systèmes linéaires, ce qui est l'objet du chapitre suivant. On donne ensuite différentes techniques pour calculer le déterminant d'une matrice.

12.4.6 Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, on présente le pivot de Gauss pour résoudre des systèmes linéaires et pour inverser des matrices.

12.4.7 Diagonalisation et triangularisation des matrices

On termine la quatrième partie par la réduction des endormorphismes. En d'autres termes, on se ramène au cas de matrices plus simples à étudier du point de vue des systèmes dynamiques ou de l'inversibilité. On utilise notamment la notion de déterminant qui est centrale pour comprendre ce qu'est le polynôme caractéristique.

Chapitre 13

Matrices

13.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion d'un intérêt crucial en algèbre linéaire (et pas seulement) : celle de matrice.

Il est certes criticable de commencer par les matrices plutôt que par les applications linéaires (et donc par les espaces vectoriels) mais nous avons choisi la présentation qui soit la plus simple et la plus pédagogique possible. Également, les matrices servent aussi à comprendre les formes quadratiques. En ce sens, il est judicieux de ne pas les traiter comme un simple outil pour représenter les applications linéaires.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soulignons toutefois que $\mathbb{K}$ pourrait être un corps commutatif quelconque.

Enfin, bien que le produit de deux matrices puisse sembler non naturel à première vue, on verra dans le chapitre sur les applications linéaires qu'il découle directement de leur interprétation.

13.2 Définitions

Une matrice est un tableau de nombres. Donnons une définition précise.

Définition 13.2.1. *Soient n et p deux entiers strictement positifs. Un tableau rectangulaire ayant n lignes et p colonnes et constitué d'éléments de $\mathbb{K}$ est appelé une matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \quad \text{ou} \quad (a_{i,j})_{i,j}\,.$$

Définition 13.2.2. *Les $a_{i,j}$ s'appellent les coefficients de la matrice. Étant donné un coefficient, le premier indice est celui de la ligne tandis que le second est celui* *de la colonne. Ainsi, le coefficient $a_{k,l}$ se trouve à l'intersection de la k-ième ligne et de la l-ième colonne.*

Définition 13.2.3. *L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Définition 13.2.4. *Une matrice telle que $n = p$ est appelée une matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées se note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Donnons quelques exemples de matrices :

Exemple 13.2.5. *La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ -i & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 49 \\ 3128 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Également, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$.

Enfin, (4) est une matrice aussi : $(4) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$.

On dit que deux matrices sont égales si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et si les coefficients de chaque matrice sont égaux lorsqu'ils ont des indices de ligne et de colonne identiques.

Exemple 13.2.6. *Voici des exemples de matrices qui ne sont pas égales :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Définition 13.2.7. *Les coefficients $a_{i,i}$ d'une matrice carrée s'appellent les coefficients diagonaux.*

Définition 13.2.8. *Une matrice carrée dont les coefficients non diagonaux sont nuls est appelée une matrice diagonale.*

Exemple 13.2.9. *La matrice suivante est diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.*

Définition 13.2.10. *Une matrice carrée telle que $a_{i,j} = 0$ si $i < j$ est appelée une matrice triangulaire supérieure. De même, une matrice carrée telle que $a_{i,j} = 0$ si $i < j$ est appelée une matrice triangulaire inférieure.*

Exemple 13.2.11. *Les deux matrices suivantes sont respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 13.2.12. *Une matrice diagonale est à la fois une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.*

Définition 13.2.13. *Une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée une matrice ligne.*

Définition 13.2.14. *Une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée une matrice colonne.*

Remarque 13.2.15. *Étant donnée une matrice $A := (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la i-ième ligne de A est donnée par la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ et la j-ième colonne de A est donnée par la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.*

Définition 13.2.16. *La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée* matrice nulle. *On la note $0_{\mathcal{M}_{n,p}}$, voire 0 s'il n'y a pas de confusion.*

Remarque 13.2.17. *Cette notation n'est pas anodine. En effet, nous verrons que l'élément neutre pour l'addition est la matrice 0.*

Définition 13.2.18. *La matrice diagonale (donc carrée) dont tous les coefficients sont égaux à 1 est appelée* matrice identité*. La matrice identité de taille n est notée I_n.*

Remarque 13.2.19. *À nouveau, cette notation n'est pas anodine. En effet, nous verrons que l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice I_n.*

13.3 Règles de calcul

Définissons maintenant les règles de calculs sur les ensembles de matrices.

13.3.1 Produit d'une matrice par une constante

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, on définit la matrice $B := \lambda A$ comme suit :

$$B := \lambda A := (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

En d'autres termes, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; p]\!]$, on a $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

13.3.2 Somme de deux matrices

Soient deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on définit la somme $A+B$ comme suit :

$$A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\,.$$

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$. La somme $A+B$ n'est définie que si $n = r$ et $p = s$.

Exemple 13.3.1. *La matrice $I_2 - I_3$ n'est pas définie vu qu'elles n'ont pas les mêmes nombres de lignes et de colonnes.*

13.3.3 Produit de deux matrices

On commence par définir le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne :

Définition 13.3.2. *Si $A := (a_1, \cdots, a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et si $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors le produit de A par B, que l'on note AB est défini comme étant $AB := (a_1b_1 + \cdots + a_pb_p) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$.*

Remarque 13.3.3. *À partir de maintenant, on confondra $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$.*

Exemple 13.3.4. *On dispose du produit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30\,.$$

On peut maintenant généraliser à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Définition 13.3.5. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors le produit de A par B, que l'on note AB est défini comme étant la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont la i-ième ligne est le produit de la i-ième ligne de A par B.*

Exemple 13.3.6. *On dispose du produit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

On définit maintenant le produit général de deux matrices (dont on peut prendre le produit, ce qui n'est pas toujours le cas) :

Définition 13.3.7. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le produit de A par B, que l'on note AB est défini comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient à la ligne $i \in [\![1;n]\!]$ et à la ligne $j \in [\![1;q]\!]$ est le produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.*

Remarque 13.3.8. *On a donc $AB = C$ avec $c_{i,j} := \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$, $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$.*

Remarque 13.3.9 (Attention)**.** *Le produit de la matrice A par la matrice B, AB, n'est défini qu'à la condition où le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Exemple 13.3.10. *On dispose du produit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 60 \\ 70 & 140 \\ 110 & 220 \end{pmatrix}.$$

Remarque 13.3.11. *La définition du produit de deux matrices peut sembler étrange. Pourquoi ne pas simplement prendre le produit coefficient à coefficient ? En fait, ce produit a un sens dès que l'on regarde les matrices comme étant des objets contenant des informations sur les applications linéaires, voir la Section 16.2 à la page 207.*

13.3.4 Structure d'algèbre

La structure d'algèbre (anneau et espace vectoriel) signifie *grosso modo* que tout se passe bien. Voici les propriétés des règles de calcul.

On se donne $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D, E \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $F \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ ainsi que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a alors :

- $A+(B+C) = (A+B)+C =: A+B+C$. C'est l'associativité de l'addition.
- $A(DF) = (AD)F =: ADF$. C'est l'associativité de la multiplication.
- $A + B = B + A$. C'est la commutativité de l'addition.
- $A + 0 = A$. C'est l'existence de l'élément neutre pour l'addition.
- $AI_p = I_nA = A$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ et $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) =: \alpha\beta A$.
- $\alpha(AD) = (\alpha A)D = A(\alpha D) =: \alpha AD$.
- $(A + B)D = AD + BD$ et $A(D + E) = AD + AE$. C'est la distributivité du produit par rapport à l'addition.

Exercice 13.3.12. *Démontrer les neuf propriétés ci-dessus.*

Remarque 13.3.13 (Non commutativité du produit)**.** *En général, si deux matrices A et B sont telles que les produits AB et BA sont bien définis, alors on n'a pas forcément $AB = BA$.*

Même dans le cas des matrices carrées, le produit n'est pas a priori *commutatif :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

13.4 Inverse d'une matrice

La notion d'inverse d'une matrice est particulièrement utile pour résoudre les systèmes linéaires. Mais également, cette notion joue un grand rôle dans la loi normale multi-dimensionnelle en probabilités et en statistiques.

Définition 13.4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.*

Remarque 13.4.2. *Il existe des matrices qui ne sont pas inversibles ; de la même manière que tous les systèmes linéaires n'ont pas de solution.*

Proposition 13.4.3. *Si une matrice est inversible, son inverse est unique.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible. Soient deux matrices B_1 et B_2 telles que $AB_1 = B_1A = AB_2 = B_2A = I_n$. Alors, on a $A(B_1 - B_2) = 0$ puis $B_1(A(B_1 - B_2)) = B_1 0 = 0$. Or, par associativité du produit : $(B_1A)(B_1 - B_2) = 0$ ce qui implique $I_n(B_1 - B_2) = 0$ donc $B_1 = B_2$. □

Conséquemment, l'inverse de A est unique.

Notation 13.4.4. *L'inverse d'une matrice inversible A est noté A^{-1}.*

Remarque 13.4.5. *La condition $AB = I_n$ est en fait suffisante pour s'assurer que la matrice A est inversible. Il en est de même avec la condition $BA = I_n$. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que si $AB = I_n$, alors le déterminant de A est non nul, voir la page 217.*

Exemple 13.4.6. *La matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Pour le vérifier, il suffit de faire le produit des deux matrices.*

Nous allons maintenant énoncer des propriétés essentielles concernant l'inverse.

Proposition 13.4.7. *Pour toute matrice inversible A, on a $(A^{-1})^{-1} = A$. Si A et B sont deux matrices inversibles et de même taille n, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Démonstration. D'abord, l'unicité de l'inverse de la matrice A^{-1} et le fait que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ suffit pour montrer que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Enfin, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$ par associativité du produit. Puis, comme $A^{-1}A = I_n$, on obtient $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Il s'ensuit que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Le calcul de l'inverse d'une matrice n'est pas aisé. C'est pourquoi les rares fois où le calcul est trivial n'en sont que plus précieuses.

Proposition 13.4.8. *Soit D une matrice diagonale de taille n. On suppose que chacun des coefficients diagonaux $d_{i,i}$ est non nul. Alors D est inversible et son inverse est D^{-1} la matrice diagonale dont le i-ième coefficient diagonal est $1/d_{i,i}$.*

Remarque 13.4.9. *Dans le chapitre sur les déterminants, on donnera une méthode simple - bien que calculatoire - pour parvenir à inverser les matrices quand elles sont inversibles.*

13.5 Transposée d'une matrice

La transposition est essentielle pour comprendre les formes quadratiques (voir le Chapitre 21 à la page 253), lesquelles reposent sur des matrices symétriques.

Définition 13.5.1. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, on appelle transposée de A et on note A^T la matrice définie comme suit*

$$A^T = (a_{j,i})_{\substack{1\leq j\leq p\\ 1\leq i\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})\,.$$

Donnons quelques exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ -i & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & 3 \\ i & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 49 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 49 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Remarque 13.5.2. *La transposée de la matrice A est parfois notée ${}^tA$. Néanmoins, nous n'utilisons pas cette notation.*

On donne maintenant quelques propriétés.

Proposition 13.5.3. *La transposition est involutive. En d'autres termes, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $(A^T)^T = A$.*

Démonstration. D'abord, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ puis $(A^T)^T \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ensuite, par définition, si $A^T = (b_{i,j})$ et si $(A^T)^T = (c_{k,l})$, alors $c_{k,l} = b_{l,k}$. Or, $b_{l,k} = a_{k,l}$. Il s'ensuit $(A^T)^T = A$. □

Proposition 13.5.4. *Soient deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $(A+B)^T = A^T + B^T$ et $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.*

Démonstration. Montrons d'abord $(A+B)^T = A^T + B^T$. On note $a_{i,j}$ (respectivement $b_{i,j}$) le coefficient général de la matrice A (respectivement B). Alors, $A+B$ a pour coefficient général $a_{i,j} + b_{i,j}$ d'où le coefficient général de $(A+B)^T$ est $a_{j,i} + b_{j,i}$ ce qui est bien la somme des coefficients de A^T et B^T.

On procède de même pour montrer $(\alpha A)^T = \alpha A^T$. □

Enfin, la transposition s'accomode bien avec le produit :

Proposition 13.5.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^T = B^T A^T$. Par conséquent, on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Démonstration. D'abord, $C := AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. On note $c_{i,j}$ le coefficient de la matrice C à la ligne $i \in [\![1;n]\!]$ et à la colonne $j \in [\![1;q]\!]$. Alors, $D := (AB)^T = C^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. On note $d_{k,l}$ le coefficient de la matrice D à la ligne $k \in [\![1;q]\!]$ et à la colonne $l \in [\![1;n]\!]$. On a par définition $d_{k,l} = c_{l,k} = \sum_{r=1}^{p} a_{l,r} b_{r,k}$. Puis, le produit $B^T A^T$ a pour coefficient général $\sum_{r=1}^{p} \widetilde{b_{k,r}} \widetilde{a_{r,l}}$ où $\widetilde{b_{k,r}} := b_{r,k}$ et $\widetilde{a_{r,l}} := a_{l,r}$, ce qui achève la preuve après que l'on a remarqué $(A^T)^{-1} A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$. □

13.6 Exercices

Exercice 1

On donne les quatre matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits deux à deux de ces matrices qui ont un sens ? Effectuer ces produits.

Exercice 2

On donne les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que l'on a $A^2 = B^2 = C^2 = -I_4$, $AB = C$, $BC = A$, $CA = B$, $BA = -C$, $CB = -A$ et $AC = -B$.

Exercice 3

Trouver, pour tout entier positif n la matrice A^n lorsque

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 5

Soit A une matrice carrée de taille $n \geq 2$ telle que $A^2 = A$ et $A \neq I_n$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 6

Soit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Trouver à quelle condition la matrice A est inversible. Déterminer son inverse quand elle l'est.

Exercice 7

Soit $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

Chapitre 14

Étude de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

14.1 Introduction

Plutôt que d'étudier directement la notion d'espace vectoriel, on introduit les notions de base de l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cette approche permet d'illustrer naturellement les concepts.

Définition 14.1.1. *Nous appellerons vecteur de $\mathbb{R}^n$ tout n-uplet de nombres réels.*

Notation 14.1.2. *Ce vecteur sera considéré comme une matrice colonne.*

Exemple 14.1.3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ *est un vecteur de $\mathbb{R}^4$ tandis que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$ *en est un de $\mathbb{R}^5$.*

Nous allons nous servir de propriétés et de règles de calcul déjà définies dans le chapitre précédent.

Ainsi, la somme de deux vecteurs $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est par définition $v + w := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. De même, on peut multiplier v par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ comme suit : $\alpha v := \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

On dira plus tard que muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^n$ a une structure d'espace vectoriel.

14.2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Lorsque l'on munit un ensemble de structures, on aime regarder les sous-ensembles qui ont des structures similaires. En effet, il est plus simple de prouver qu'un ensemble satisfait des propriétés de stabilité au sein d'un ensemble plus grand dont on sait qu'il est un groupe, un anneau, un corps, une algèbre ou autre...

C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 14.2.1. *Un sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que*

- *Pour tout $u, v \in \mathbb{E}$, on a $u + v \in \mathbb{E}$.*
- *Pour tout $u \in \mathbb{E}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha u \in \mathbb{E}$.*
- *Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{E}$.*

En d'autres termes, l'ensemble $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ s'il est stable par l'addition, par la multiplication par un réel et s'il contient le vecteur nul.

Remarque 14.2.2. *La troisième propriété est une conséquence de la deuxième. En effet, il suffit de prendre $\alpha := 0$. On pourrait donc omettre cette troisième propriété. Néanmoins, on la conserve car elle a le bon goût de nous rappeler qu'un sous-espace vectoriel n'est pas vide puisqu'il contient toujours l'élément nul.*

Exemple 14.2.3. *L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Il en est de même pour le singleton $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.*

Définition 14.2.4. *Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$, alors on dit aussi que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.*

14.3 Combinaison linéaire

14.3.1 Définitions

Définition 14.3.1. *Soient $v_1, \cdots, v_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire des v_i, $i \in [\![1; k]\!]$ tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ s'écrivant comme suit*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k ,$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1; k]\!]$.

Définition 14.3.2. *L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $\{v_1, \cdots, v_k\}$ est noté* $\mathrm{Vect}\,(v_1, \cdots, v_k)$.

Remarque 14.3.3. *On a :* $\mathrm{Vect}\,(v_1, \cdots, v_k) := \left\{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \,, (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k\right\}$.

Remarque 14.3.4. *On peut remarquer que* $\mathrm{Vect}\,(v_1, \cdots, v_k)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$*.*

Démonstration. D'abord, le vecteur nul lui appartient en prenant $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1; k]\!]$. Ensuite, si $u, w \in \mathrm{Vect}\,(v_1, \cdots, v_k)$, alors il existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$ et $w = \sum_{i=1}^k \beta_i v_i$. Alors : $u + w = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) v_i$. Ainsi, $u + w$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire des v_i pour i allant de 1 à k. De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u = \sum_{i=1}^k \lambda \alpha_i v_i$ où $\lambda \alpha_i \in \mathbb{R}$. Conséquemment, αu est bien une combinaison linéaire des v_i pour i allant de 1 à k. □

À la notion de combinaison linéaire, on associe la notion de dépendance linéaire.

Définition 14.3.5. *La famille de vecteurs* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est dite liée (ou linéairement dépendante) s'il existe des réels* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ *non tous nuls tels que* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$*.*

Exemple 14.3.6. *La famille de vecteurs* $\{x, y, x + y\}$ *est liée.*

Remarque 14.3.7. *Il est important de préciser que les coefficients* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ *sont non tous nuls. En effet, s'ils sont tous nuls, la somme est forcément l'élément nul.*

Il convient aussi de garder à l'esprit que les coefficients réels ne sont pas tous forcément non nuls.

Définition 14.3.8. *Une famille qui n'est pas liée est dite libre.*

Remarque 14.3.9. *Une famille* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est libre si l'égalité* $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ *implique* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$*.*

Proposition 14.3.10. *Une famille de vecteurs* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est liée si et seulement si l'un des vecteurs (au moins) est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. Supposons sans rien changer à la généralité (quitte à procéder à un changement d'indice) que c'est v_1 qui est combinaison linéaire de $v_2, \cdots, v_k$. Alors, on a $v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$ d'où $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ avec $\alpha_1 = 1 \neq 0$ et $\alpha_i = -\beta_i$ pour tout $i \in [\![2; k]\!]$. Comme les coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont non tous nuls, on en déduit que la famille est liée.

Réciproquement, supposons que les vecteurs sont linéairement dépendants. Alors il existe $\beta_1, \cdots, \beta_k$ k réels non tous nuls tels que $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. Supposons sans rien changer à la généralité que $\beta_1 \neq 0$ (quitte à procéder à un changement d'indice). Alors, on peut écrire

$$v_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1} v_2 + \cdots - -\frac{\beta_k}{\beta_1} v_k \,,$$

et donc v_1 s'exprime bien comme combinaison linéaire de $v_2, \cdots, v_k$. □

14.4 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

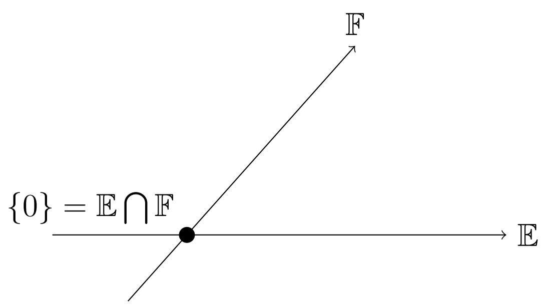
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ peuvent fournir d'autres sous-espaces vectoriels. L'intérêt principal de ces sous-espaces vectoriels est que les bonnes propriétés sur $\mathbb{R}^n$ sont aussi valables sur ces sous-espaces. Par la suite, on considèrera des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels plus généraux. Ainsi, nous n'aurons pas besoin de montrer qu'un ensemble muni de certaines lois est un espace vectoriel. Il nous suffira de prouver que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Proposition 14.4.1. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. D'abord, l'élément nul appartient bien à $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$. Ensuite, la somme de deux vecteurs de $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ est bien dans $\mathbb{E}$ vu que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel. Il en est de même pour $\mathbb{F}$. On prouve la même chose avec αu où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$. □

On illustre les espaces vectoriels comme suit :

Figure 14.1 – Intersection d'espaces vectoriels



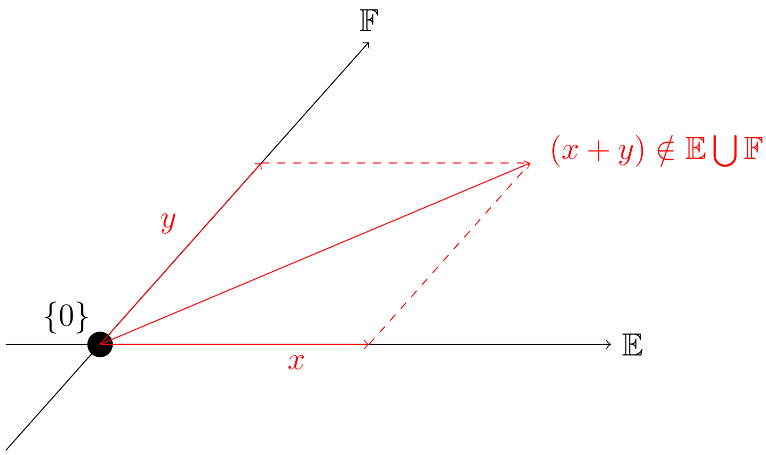
Remarque 14.4.2 (Attention)**.** *On ne représente pas les espaces vectoriels avec des patates (diagrammes de Venn).*

Il est **essentiel** de bien comprendre que ce qui est vrai pour l'intersection ne l'est pas pour la réunion.

Contre-exemple 14.4.3. *On se place dans $\mathbb{R}^4$ et l'on considère $\mathbb{E} := \operatorname{Vect}(v_1)$ ainsi que $\mathbb{F} := \operatorname{Vect}(v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Alors $v_1 \in \mathbb{E} \subset \mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ et de même $v_2 \in \mathbb{F} \subset \mathbb{E} \cup \mathbb{F}$. Néanmoins, $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ n'est ni une combinaison linaire de v_1 ni une combinaison linéaire de v_2. Donc $(v_1 + v_2) \notin \mathbb{E}$ et $(v_1 + v_2) \notin \mathbb{F}$ d'où $(v_1 + v_2) \notin \mathbb{E} \cup \mathbb{F}$.*

On peut illustrer le fait que la réunion d'espaces vectoriels n'est pas forcément un espace vectoriel comme suit :

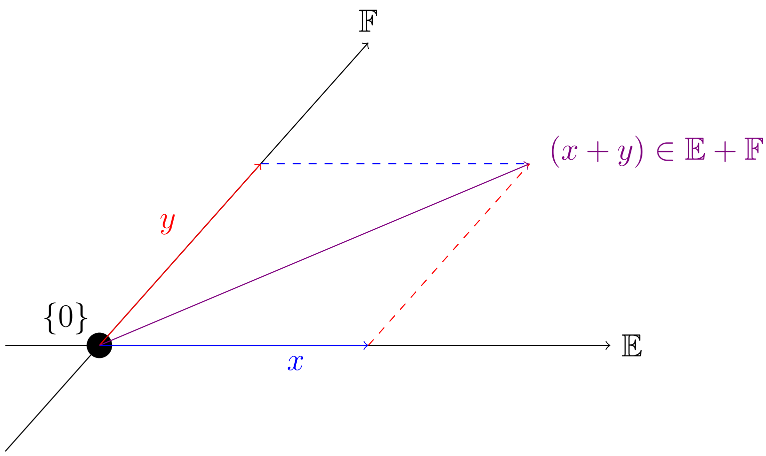
FIGURE 14.2 – Réunion d'espaces vectoriels



En revanche, on peut faire ce que l'on appelle la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition 14.4.4. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On définit la somme de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$ comme étant $\mathbb{E}+\mathbb{F} := \{e+f \ : \ e \in \mathbb{E}, f \in \mathbb{F}\}$.*

FIGURE 14.3 – Somme d'espaces vectoriels



Remarque 14.4.5. *On pourrait noter cette somme comme étant* $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{E},\mathbb{F})$ *mais l'usage est de la noter $\mathbb{E}+\mathbb{F}$.*

Proposition 14.4.6. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\mathbb{E}+\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. D'abord, $0 \in \mathbb{E}$ et $0 \in \mathbb{F}$ donc $0 = 0 + 0 \in \mathbb{E} + \mathbb{F}$. Ensuite, soit $w_1 = u_1 + v_1$ où $u_1 \in \mathbb{E}$ et $v_1 \in \mathbb{F}$ et soit $w_2 = u_2 + v_2$ où $u_2 \in \mathbb{E}$ et $v_2 \in \mathbb{F}$. Alors $w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$. Comme $u_1 + u_2 \in \mathbb{E}$ et comme $v_1 + v_2 \in \mathbb{F}$, il vient $w_1 + w_2 \in \mathbb{E} + \mathbb{F}$. On procède de même avec αw pour $\alpha \in \mathbb{R}$. □

On peut également définir le produit cartésien de deux sous-espaces vectoriels.

Définition 14.4.7. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On définit le produit de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$ comme étant $\mathbb{E} \times \mathbb{F} := \{(e, f) \ : \ e \in \mathbb{E}, f \in \mathbb{F}\}$.*

Remarque 14.4.8. *Cette notation est cohérente car alors $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ et de manière général $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.*

Proposition 14.4.9. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$.*

La preuve est admise.

14.5 Supplémentaire

Définition 14.5.1. *Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On dit que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$ si tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'écrit de manière unique comme étant la somme d'un vecteur de $\mathbb{F}$ et d'un vecteur de $\mathbb{G}$.*

Notation 14.5.2. *Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$, on écrit $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.*

Remarque 14.5.3. *Rien n'interdit d'avoir $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ dans la Définition 14.5.1.*

Proposition 14.5.4. *Soit $\mathbb{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors, $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ si et seulement si*

- $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$.
- $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Démonstration. Supposons que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$. Par définition, la première condition est satisfaite vu que tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'écrira comme une somme d'un vecteur de $\mathbb{F}$ et d'un vecteur de $\mathbb{G}$ donc $\mathbb{E} \subset \mathbb{F} + \mathbb{G}$. Or, $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ et $\mathbb{G} \subset \mathbb{E}$ d'où $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$. Soit maintenant $x \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$. On a alors $x \in \mathbb{F}$ et $x \in \mathbb{G}$ (d'où $-x \in \mathbb{G}$). Il s'ensuit $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + 0_{\mathbb{R}^n}$ où $0_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{F}$ et $0_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{G}$. Comme $0_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{E}$, il s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de $\mathbb{F}$ et d'un vecteur de $\mathbb{G}$. On en déduit $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par conséquent, l'intersection de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{G}$ est bien réduite au singleton $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

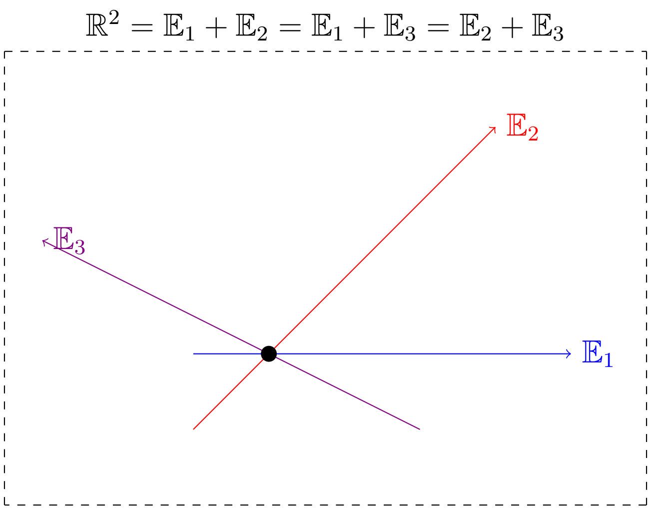
Réciproquement, on suppose les deux conditions satisfaites. Montrons que l'on a bien $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Soit $x \in \mathbb{E}$. Comme $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$, x s'écrit comme une somme d'un vecteur de $\mathbb{F}$ et d'un vecteur de $\mathbb{G}$. Supposons que l'on ait $(v_1, w_1) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}$ et $(v_2, w_2) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}$ tels que $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$. Alors $x - (v_2 + w_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$

d'où $(v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$. On en déduit $v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in \mathbb{G}$. Pourtant, $v_1 - v_2 \in \mathbb{F}$. Donc $v_1 - v_2 \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ si bien que l'on a $v_1 = v_2$ et $w_1 = w_2$ d'où la décomposition est bien unique.

□

Remarque 14.5.5. *Il n'y a pas d'unicité du supplémentaire comme l'illustre le dessin ci-dessous :*

FIGURE 14.4 – Plusieurs supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$



Exemple 14.5.6. *On se place dans $\mathbb{R}^4$ et l'on considère $\mathbb{E} := \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. On pose $\mathbb{F} := \mathrm{Vect}(v_1)$. Alors $\mathbb{G} := \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ et $\mathbb{G}' := \mathrm{Vect}(v_1 + v_2, v_3)$ sont deux supplémentaires de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$.*

14.6 Bases, dimension

14.6.1 Famille génératrice

Définition 14.6.1. *Soit $\{v_1, \cdots, v_k\}$ une famille de k vecteurs de $\mathbb{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\{v_1, \cdots, v_k\}$ est génératrice de $\mathbb{E}$ si l'on a $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\,(v_1, \cdots, v_k)$.*

En d'autres termes, tout vecteur du sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$.

Il convient de noter que cette combinaison linéaire n'a *a priori* aucune raison d'être unique.

14.6.2 Base

Définition 14.6.2. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$*. Alors, on dit que la famille* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est une base de* $\mathbb{E}$ *si elle est libre* **et** *si elle est génératrice de* $\mathbb{E}$*.*

On admet dorénavant que tout sous-espace vectoriel admet une base.

Exemple 14.6.3. *On se donne* $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$*. Pour tout* $i \in [\![1; n]\!]$*, on note* e_i *le vecteur dont la i-ième ligne vaut* 1 *et dont les autres lignes sont égales à* 0*. Alors* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$*. Cette base s'appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

Proposition 14.6.4. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *une base de* $\mathbb{E}$*. Tout vecteur* $v \in \mathbb{E}$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base* $\{v_1, \cdots, v_k\}$*.*

Démonstration. La famille est génératrice donc tout vecteur v s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$. Supposons maintenant que l'on ait

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i \,.$$

Montrons que les coefficients α_i et β_i sont égaux pour tout $i \in [\![1; k]\!]$. On a en effet

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0_{\mathbb{R}^n} \,.$$

Néanmoins, la famille est libre donc chacun des coefficients $\alpha_i - \beta_i$ est égal à 0 ce qui achève la preuve.

□

Théorème 14.6.5. *Toutes les bases d'un même sous-espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *ont le même nombre de vecteurs.*

Ce théorème est admis. Il est d'une importance cruciale puisqu'il nous fournit un invariant : la dimension.

14.6.3 Dimension

Définition 14.6.6. *Le nombre de vecteurs d'une base d'un sous-espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est appelé la dimension de* $\mathbb{E}$*.*

Notation 14.6.7. *La dimension de* $\mathbb{E}$ *est notée* $\dim \mathbb{E}$*.*

Par convention, on pose $\dim \{0_{\mathbb{R}^n}\} = 0$.

Proposition 14.6.8. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* k*. on dispose des deux propriétés admises suivantes :*

- *Si les vecteurs* $e_1, \cdots, e_l$ *forment une famille libre, alors* $l \leq k$. *Si de plus* $l = k$, *ils forment une base.*
- *Si les vecteurs* $f_1, \cdots, f_p$ *forment une famille génératrice de* $\mathbb{E}$, *alors* $p \geq k$. *Si de plus* $p = k$, *ils forment une base.*

Corollaire 14.6.9. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$. *Si* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$, *alors* $\mathbb{E} = \mathbb{F}$.

Proposition 14.6.10. *Soient* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* k *et* $\mathbb{F}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^m$ *de dimension* l. *Alors* $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *de dimension* $k + l$.

On termine ce chapitre avec le calcul simple de la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 14.6.11. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$. *Alors :*

$$\dim \mathbb{E} + \mathbb{F} = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F} - \dim \mathbb{E} \cap \mathbb{F} .$$

Corollaire 14.6.12. *Si* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont supplémentaires,* $\dim \mathbb{E} \oplus \mathbb{F} = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F}$.

La proposition est admise.

14.7 Exercices

Exercice 1

Soient $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $b = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T$ et $c = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $2a - b + 3c$, $-a - 4b + c$ et $4a + 2b + 5c$.

Exercice 2

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $\mathcal{S}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{Z}, \, y \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $\mathcal{S}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| = |y| \right\}$.
- $\mathcal{S}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + 2y = 0 \right\}$.

Exercice 3

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que

$$\mathbb{E} := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{et} \quad \mathbb{F} := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Déterminer les dimensions de $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{E} + \mathbb{F}$ et $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$.

Chapitre 15

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, nous généralisons ce qui a été fait dans le précédent. Nous nous étions restreints au cas de $\mathbb{R}^n$ pour que le corps de base soit $\mathbb{R}$, pour que les espaces vectoriels considérés soient simples et pour qu'ils soient de dimension finie.

Il s'agissait donc d'un choix purement pédagogique.

Il convient d'abord de signaler que tout ce que nous avons vu (définitions et propriétés) s'étend à $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$. À vrai dire, on pourrait même se placer avec $\mathbb{Q}$ comme ensemble de scalaires.

Ensuite, nous avons dit que $\mathbb{R}^n$ était un espace vectoriel et nous avons alors considéré des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. De manière générale, nous allons définir la notion d'espace vectoriel.

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

15.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 15.1.1. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble $\mathbb{E}$ muni de deux opérations :*

$$\begin{array}{ccc} + & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \\ . & : & \mathbb{K} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$: $x + y = y + x$ et $x + (y + z) = (x + y) + z$.*
- *Il existe $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}} + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe $y \in \mathbb{E}$ tel que $x + y = y + x = 0_{\mathbb{E}}$.*
- *Pour tous les éléments x et y de $\mathbb{E}$ et pour tous les scalaires α et β de $\mathbb{K}$, on dispose de $1.x = x$, $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$, $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ et $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.*

Définition 15.1.2. *Les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés des vecteurs.*

Notation 15.1.3. *On écrira* $\alpha.x =: \alpha x$ *pour simplifier.*

Notation 15.1.4. *S'il n'y a pas d'ambiguïté, on posera* $0 := 0_{\mathbb{E}}$.

Notation 15.1.5. *Si* x *et* y *sont deux vecteurs tels que* $x + y = 0$*, on notera* $-x := y$*. Cette notation est une simplification de* $(-1)x$*, elle-même étant une simplification de* $(-1).x$*.*

15.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Tout ce qui a été vu dans le chapitre précédent s'étend aux espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire aux espaces vectoriels admettant une base de cardinal fini. En particulier :

Proposition 15.2.1. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Ainsi, bien que les vecteurs d'un espace vectoriel abstrait de dimension finie ne sont pas des éléments dans lesquels les calculs sont *a priori* simples, dès que l'on connaît une base, tout se passe comme si l'on était dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

On fait les calculs avec les coordonnées des vecteurs en les mettant dans des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 15.2.2. *L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à* 4 *est un espace vectoriel de dimension* 5*. Une base est donnée par* 1, X, X^2, X^3 *et* X^4.

En particulier, les coordonnées du polynôme $P(X) = 2X^4 - 3X^3 + X - 2$ *dans cette base sont* $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$.

Exemple 15.2.3. *L'ensemble* $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ *des matrices à deux lignes et à trois colonnes et à coefficients complexes est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* 6 *(*$= 2 \times 3$*). Une base est donnée par* $e_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $e_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En particulier, les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *dans cette base sont* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T$.

15.3 Espaces vectoriels de dimension infinie

Remarque 15.3.1. *On peut étendre à peu près toutes les notions vues dans le chapitre précédent mais il convient de noter qu'une combinaison linéaire d'une famille* $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *est un vecteur de la forme* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ *où seuls un* **nombre fini** *de coefficients* α_i *sont non nuls. En d'autres termes,* **on ne considère pas de somme infinie***. En effet, la notion d'infini ne relève pas de l'algèbre mais de l'analyse.*

Définition 15.3.2. *On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$. Si tel n'est pas le cas, on dit que $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.*

Exemple 15.3.3. *Soit $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On peut prouver facilement que la famille de fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n(x) := e^{nx}$ est une famille libre et infinie dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Démonstration. Supposons que la famille est liée. Soit alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de coefficients réels dont un nombre fini seulement sont non nuls et telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n = 0\,.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_{n_0} \neq 0$ et $\alpha_k = 0$ pour tout $k \geq n_0 + 1$. On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n_0} \alpha_k e_k(x) = 0\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On divise par $\exp(n_0 x)$ et l'on fait tendre x vers $+\infty$. Il vient :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n_0-1} \alpha_k \exp(-(n_0-k)x) + \alpha_{n_0}\,.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \exp(-(n_0-k)x) = 0$ pour tout $k \in [\![0; n_0-1]\!]$, on obtient $\alpha_{n_0} = 0$. Or, on avait supposé $\alpha_{n_0} \neq 0$. C'est absurde. La famille n'est donc pas liée.

□

Théorème 15.3.4. *Tout espace vectoriel admet une base.*

La preuve est admise.

Remarque 15.3.5. *On utilise l'axiome du choix (sous la forme du lemme de Zorn) pour démontrer ce théorème.*

Exemple 15.3.6. *Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque 15.3.7. *La Proposition 15.2.1 reste vraie en dimension infinie.*

Remarque 15.3.8. *On prouve rarement qu'un ensemble admet une structure d'espace vectoriel. Plus généralement, on démontre qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.*

Exemple 15.3.9. *L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

15.4 Exercices

Exercice 1

Soient les polynômes $P_1(X) = X(X^2 - 1)$, $P_2(X) = X(X-1)(X-2)$, $P_3(X) = X^2(X-1)$ et $P_4(X) = X^2 + 1$. Soit $\mathbb{F} := \operatorname{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$. On souhaite déterminer ce sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ sans avoir à développer les polynômes.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est un système libre.

2. Montrer que P_4 est une combinaison linéaire de (P_1, P_2, P_3). En déduire la dimension de $\mathbb{F}$.

3. Montrer que $Q(X) := a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{F}$ si et seulement si $a = b + c + d$.

Exercice 2

Soient $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$ et $\mathbb{F}$ le sous-ensemble des fonctions f qui en plus sont Lipschitziennes c'est-à-dire telles qu'il existe $k_f \geq 0$ satisfaisant $|f(x) - f(x')| \leq k_f|x - x'|$ pour tout $x, x' \in [0;1]$. L'ensemble $\mathbb{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$?

Exercice 3

Soient $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $[0;1]$ et $\mathbb{F}$ le sous-ensemble des fonctions f qui en plus sont telles que $f'' \geq 0$. L'ensemble $\mathbb{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$?

Exercice 4

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des suites de réels telles que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Cet ensemble forme-t-il un espace vectoriel ?

Exercice 5

Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes sur le corps des réels. Montrer que $\mathbb{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ lorsque : $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices ayant un déterminant nul puis lorsque $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices M telles que $M^2 = M$.

Exercice 6

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes sur le corps des réels. Soit $\mathbb{E}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques ($M^T = M$) et $\mathbb{F}$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques ($M^T = -M$). Montrer que l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} + \mathbb{F}$ et $\mathbb{E} \bigcap \mathbb{F} = \{0\}$.

Chapitre 16

Applications linéaires

Dans ce chapitre, nous allons étudier les applications entre deux espaces vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. On suppose que le corps de base est $\mathbb{K}$, que ce soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous avons vu que les éléments des espaces vectoriels pouvaient être additionnés entre eux ainsi que multipliés par des éléments de $\mathbb{K}$. Il est ainsi logique de s'intéresser à des applications qui sont compatibles avec ces opérations.

Définition 16.0.1. *Soient deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$: $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. Soit une application f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. On dit que f est linéaire si pour tous les éléments x et y de $\mathbb{E}$ et si pour tous les éléments α et β de $\mathbb{K}$, on a $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.*

Remarque 16.0.2. *Si f est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{F}$, alors $f(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{F}}$.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a

$$\begin{aligned} f(0_{\mathbb{E}}) &= f(0.x) \\ &= 0.f(x) \\ &= 0_{\mathbb{F}}\,. \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée.

□

16.1 Application linéaire définie par une matrice

Les produits de matrice donnent un premier exemple d'application d'un espace vectoriel dans un autre.

Exemple 16.1.1. *Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En multipliant $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ par un vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$, nous obtenons un nouveau vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$. Plus précisément, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.*

Remarque 16.1.2. *On a ainsi défini une application linéaire, ce que l'on peut vérifier aisément. De plus, cette application linéaire est ce qu'on appelle une symétrie.*

On peut généraliser avec des matrices de tailles quelconques.

Proposition 16.1.3. *Soit A une matrice $m \times n$ à coefficients réels. Alors, l'application T_A définie par*

$$
\begin{aligned}
T_A \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\
& x \mapsto T_A(x) := Ax \, ,
\end{aligned}
$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. Soient $x := (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $y := (y_1, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$. On a

$$T_A(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j \right)^T$$

et

$$T_A(y) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} y_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} y_j \right)^T \, .$$

Or, $x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)^T$ d'où

$$
\begin{aligned}
T_A(x+y) =& A(x+y) \\
=& \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}(x_j + y_j), \cdots, \sum_{j=1}^n a_{m,j}(x_j + y_j) \right)^T \\
=& \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j + \sum_{j=1}^n a_{1,j} y_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j + \sum_{j=1}^n a_{m,j} y_j \right)^T \\
=& \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j \right)^T + \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j} y_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} y_j \right)^T \\
=& T_A(x) + T_A(y) \, .
\end{aligned}
$$

On peut montrer de même que l'on a $T_A(\lambda x) = \lambda T_A(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

16.2 Caractérisation des applications linéaires

Il s'avère en fait que les seules applications linéaires possibles de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont les applications T_A, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Définition 16.2.1 (Symbole de Kronecker). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, on introduit $\delta_i(j) := 1$ si $j = i$ et $\delta_i(j) = 0$ si $j \neq i$.*

Remarque 16.2.2. *Il est essentiel de ne pas confondre le symbole de Kronecker avec la distribution de Dirac, elle aussi notée avec un δ.*

Théorème 16.2.3. *Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Alors, il existe $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $f = T_A$.*

Démonstration. On note $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, le j-ième coefficient de e_i est $\delta_i(j)$. De la même manière, on note $\{f_1, \cdots, f_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. En d'autres termes, le l-ième coefficient de f_k est $\delta_k(l)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On peut écrire $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. De plus, les coefficients x_i sont uniques. On a alors

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) .$$

Puis, on remarque que pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $f(e_j)$ peut s'écrire de manière unique comme étant égal à $a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$.

En posant $A := (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a donc bien $f(x) = Ax$. Il est essentiel de remarquer que A ne dépend pas de x. On a donc bien :

$$\exists A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}^n \, , \ f(x) = Ax \, .$$

Ceci prouve donc l'existence d'une matrice A telle que $f = T_A$.

□

Remarque 16.2.4. *Comme il y a une correspondance bijective entre tout espace vectoriel de dimension n et $\mathbb{R}^n$, et de même entre tout espace vectoriel de dimension m et $\mathbb{R}^m$, le théorème précédent s'étend aux applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie quelconque dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque. Il suffit de reprendre la démonstration précédente avec des bases quelconques (on sait que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base).*

16.3 Quelques exemples d'applications linéaires

Comme les applications linéaires en dimension finie sont entièrement déterminées par l'expression dans la base de l'espace d'arrivée des vecteurs de base de l'espace de départ, on peut considérer sans rien changer à la généralité que l'on a $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$. Et, l'application linéaire f va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

16.3.1 L'identité

On se donne la matrice I_n. Alors l'application T_{I_n} de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application linéaire. D'ailleurs, on a même $T_{I_n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x) := x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

16.3.2 Les homothéties

On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, l'application $T_{\lambda I_n}$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application linéaire. Il s'agit de $\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

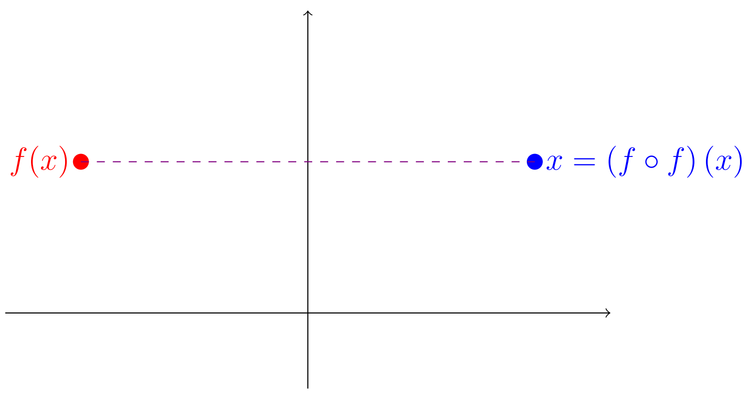
En particulier, l'application associée à la matrice nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bien une application linéaire (en prenant $\lambda := 0$).

16.3.3 Une symétrie

On se donne l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Alors, l'application f est linéaire et elle est associée à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que cette application est une symétrie. En effet, on remarque qu'elle est involutive c'est-à-dire que l'on a $f(f(x)) = x$ ou $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

On peut illustrer cette symétrie comme suit :

FIGURE 16.1 – Symétrie dans $\mathbb{R}^2$



16.3.4 Les projections

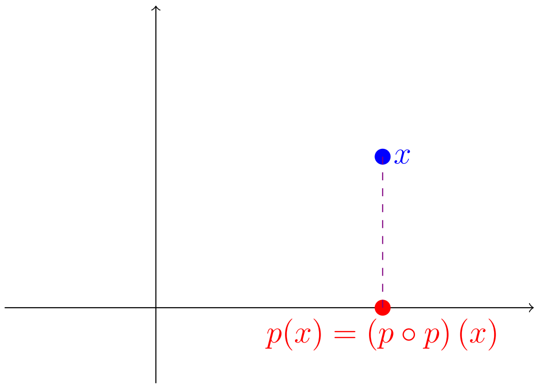
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

On introduit la projection ρ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$ comme étant l'application qui à $x = f + g$ (où $f \in \mathbb{F}$ et $g \in \mathbb{G}$ sont uniques) associe f.

Alors, la projection est une application linéaire. On remarque par ailleurs $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$ ou $\rho^2 = \rho$.

On peut illustrer la notion de projection sur $\mathbb{R}^2$ comme suit :

FIGURE 16.2 – Projection dans $\mathbb{R}^2$



Remarque 16.3.1. *La notion de projection intervient naturellement dans les probabilités. Ainsi, l'application qui à une variable aléatoire réelle X associe son espérance est une application linéaire de type projection. En effet, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$. Il est évident que l'espérance n'est définie que sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles admettant une espérance...*

16.3.5 Les symétries

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

On introduit la symétrie σ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$ comme étant l'application qui à $x = f + g$ (où $f \in \mathbb{F}$ et $g \in \mathbb{G}$ sont uniques) associe $f - g$.

Alors, la symétrie est une application linéaire. On remarque par ailleurs

$$\sigma(\sigma(x)) = x\,.$$

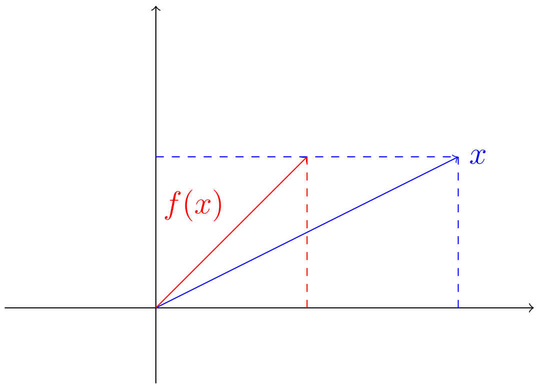
Exemple 16.3.2. *L'application qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa transposée est une symétrie.*

16.3.6 Les affinités orthogonales

Mentionnons également les affinités orthogonales. Elles correspondent *grosso modo* à des matrices diagonales dans une base orthonormée. La notion de base orthonormée présuppose celle de produit scalaire (voir la page 255). C'est pourquoi nous ne faisons que mentionner ces objets.

L'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)\right) := \left(\begin{array}{c} \frac{x}{2} \\ y \end{array}\right)$ est un exemple d'affinité orthogonale.

FIGURE 16.3 – Affinité orthogonale dans $\mathbb{R}^2$



16.4 Vocabulaire

Définition 16.4.1. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

Remarque 16.4.2. *Dans la définition précédente, on ne suppose pas la finitude des dimensions des espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.*

Exemple 16.4.3. *L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ est appelé le dual de $\mathbb{E}$, si $\dim \mathbb{E} < \infty$. Dans le cas où $\mathbb{E}$ est de dimension infinie, le dual est l'ensemble des applications linéaires* **continues** *de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$, voir le Chapitre 39. Cet ensemble sera noté $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{R})$.*

Définition 16.4.4. *Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ est un endomorphisme.*

Notation 16.4.5. *L'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{E}$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.*

Définition 16.4.6. *Une application linéaire bijective de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est appelée un isomorphisme.*

Exemple 16.4.7. *On considère l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à $P(X) := a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ associe le vecteur $(a_0, a_1, a_2, a_3)^T$. Cette application est un isomorphisme.*

Définition 16.4.8. *Une application linéaire bijective de $\mathbb{E}$ dans lui-même est appelée un automorphisme.*

On introduit maintenant deux espaces vectoriels particuliers liés à une application linéaire.

Définition 16.4.9. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$*. Alors on définit le noyau de* f *comme étant l'ensemble des éléments de* $x \in \mathbb{E}$ *tels que* $f(x) = 0_{\mathbb{F}}$*. Le noyau est noté* $\mathrm{Ker}(f)$*. On a donc* $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in \mathbb{E} \ : \ f(x) = 0_{\mathbb{F}}\} \subset \mathbb{E}$.

Remarque 16.4.10. *On peut prouver facilement que* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}$.

Démonstration. D'abord, on a vu que $f(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{F}}$ donc $0_{\mathbb{E}} \in \mathrm{Ker}(f)$. Ensuite, si x et y sont deux éléments de $\mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$ d'où $x + y \in \mathrm{Ker}(f)$. De même, si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha.x) = \alpha.f(x) = \alpha.0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$ d'où $\alpha.x \in \mathrm{Ker}(f)$. La preuve est ainsi achevée. □

Définition 16.4.11. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$*. Alors on définit l'image de* f *comme étant l'ensemble des éléments* $f(x) \in \mathbb{F}$ *où* $x \in \mathbb{E}$*. L'image est notés* $\mathrm{Im}(f)$*. On a donc* $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \ : \ x \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{F}$.

Remarque 16.4.12. *On peut prouver facilement que* $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{E})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{F}$.

Démonstration. D'abord, on a vu que $f(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{F}}$ donc $0_{\mathbb{F}} \in \mathrm{Im}(f)$. Ensuite, si x et y sont deux éléments de $\mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x', y' \in \mathbb{E}$ tels que $f(x') = x$ et $f(y') = y$. Donc $x + y = f(x') + f(y') = f(x' + y')$ si bien que $x + y \in \mathrm{Im}(f)$. De même, si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha.x') = \alpha.f(x') = \alpha.x$ d'où $\alpha.x \in \mathrm{Im}(f)$. La preuve est ainsi achevée. □

Il est essentiel de bien comprendre que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{E}$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{F}$ vivent dans deux espaces vectoriels différents, *a priori*.

Définition 16.4.13. *On définit le rang d'une application linéaire comme étant la dimension de son image :* $\mathrm{rg}(f) := \dim \mathrm{Im}(f)$*. Et, on définit le rang d'une matrice* A *comme étant le rang de l'endomorphisme associé* T_A.

Ces notions d'image et de noyau peuvent sembler surprenantes en premier lieu. Néanmoins, elles sont d'un intérêt capital dans tout phénomène où intervient de la linéarité. Un exemple est le théorème de Cochran en probabilités.

16.5 Propriétés des applications linéaires

La première propriété que nous verrons lie le produit des matrices avec la composition des applications linéaires. Elle justifie à elle seule le produit (peu naturel au premier abord) entre les matrices.

Théorème 16.5.1. *Soient* $\mathbb{E}$*,* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *trois sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$*. On suppose qu'ils sont de dimensions respectives* p*,* q *et* r*. Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *et* $g \in$

$\mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$. *Alors l'application composée* $g \circ f$ *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{G}$ *définie par* $g \circ f(x) := g(f(x))$ *est linéaire.*

De plus, si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ *est associée à* f *et si* $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ *est associée à* g, *alors* $BA \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ *est la matrice associée à* $g \circ f$.

Démonstration. La démonstration est immédiate une fois que l'on remarque

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = Bf(x) = B(Ax) = (BA)x\,.$$

□

Remarque 16.5.2. *Il convient de noter que ceci est vrai, même avec d'autres espaces vectoriels que* $\mathbb{R}^n$.

Proposition 16.5.3. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Alors* f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

Démonstration. Si f est injective, f n'a qu'un seul antécédent pour $0_{\mathbb{F}}$. Or, on sait déjà $f(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{F}}$. Il vient $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$. Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$. Alors $f(x) = f(y)$ implique $f(x - y) = 0_{\mathbb{F}}$ d'où $x - y = 0_{\mathbb{E}}$ si bien que l'on a $x = y$. L'application f est alors injective. □

Proposition 16.5.4. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Si* $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_p\}$ *est une base de* $\mathbb{E}$, *alors* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \cdots, f(e_p))$.

Démonstration. Soit v un élément quelconque de $\mathrm{Im}(f)$. Alors, $v = f(x)$ où $x \in \mathbb{E}$. Or, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$. Par conséquent, on peut écrire x comme combinaison linéaire des e_i, $i \in [\![1; p]\!]$. Il s'ensuit : $f(v) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i)$ d'où $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \cdots, f(e_p))$. Réciproquement, tout élément de $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est de la forme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right) \in \mathrm{Im}(f)$. Conséquemment, $\mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \cdots, f(e_p))$. On en déduit le résultat annoncé.

□

Corollaire 16.5.5. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Si* $\dim \mathbb{E} < \infty$, *alors* $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathbb{E} < \infty$.

Démonstration. Comme $\dim \mathbb{E} < \infty$, $\mathbb{E}$ admet une base de cardinal fini. Soit p ce cardinal et soit $(e_1, \cdots, e_p)$ la base en question. Alors, d'après la Proposition 16.5.4, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ c'est-à-dire que $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme il existe une famille génératrice finie de $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. La Proposition 14.6.8 implique directement que cette dimension est inférieure ou égale à $p = \dim \mathbb{E}$.

□

Remarque 16.5.6. *Il convient de noter que la Proposition 14.6.8 ne s'applique normalement qu'aux espaces vectoriels de la forme* $\mathbb{R}^n$ *mais comme il y a un isomorphisme entre espaces vectoriels de même dimension finie, on peut se ramener aux espaces de la forme* $\mathbb{R}^n$.

On peut aller plus loin avec le théorème du rang.

Théorème 16.5.7. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Alors, si* $\dim \mathbb{E} < \infty$, *nous avons l'égalité*

$$\dim \mathbb{E} = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)\,.$$

La preuve est omise.

Corollaire 16.5.8. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Alors, si* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F} < \infty$, *l'application* f *est bijective si et seulement si elle est surjective. De même, elle est bijective si et seulement si elle est injective.*

Proposition 16.5.9. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *On suppose* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F} = n < \infty$. *On suppose également que* f *est un isomorphisme. Alors l'image de toute base* $(e_1, \cdots, e_n)$ *de* $\mathbb{E}$ *par* f *est une base de* $\mathbb{F}$.

Démonstration. D'abord, tout élément y de $\mathbb{F}$ est de la forme $y = f(x)$ vu que f est bijective. Or, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ d'où $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$ si bien que $\mathbb{F} \subset \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$. La famille $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est donc génératrice. Comme elle a même cardinal que toute base de $\mathbb{F}$, il s'agit donc une base. $\square$

Définition 16.5.10. *On dit que deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont isomorphes s'il existe un ismorphisme* φ *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$.

Corollaire 16.5.11. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors, ils sont isomorphes si et seulement si* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$.

Proposition 16.5.12. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *On suppose* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F} < \infty$. *Alors* f *est un isomorphisme si et seulement si la matrice* A *qui lui est associée relativement à une base* $\mathcal{B}_{\mathbb{E}}$ *de* $\mathbb{E}$ *et à une base* $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ *de* $\mathbb{F}$ *est inversible. De plus, l'application réciproque* f^{-1} *est linéaire de matrice associée* A^{-1}, *pour les mêmes bases.*

On admet la proposition.

16.6 Formes linéaires

On étudie dans cette section un cas particulier d'application linéaire : les formes linéaires.

Définition 16.6.1. *Soit* $\mathbb{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Si* f *est une application linéaire de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{K}$, *on dit que* f *est une forme linéaire sur* $\mathbb{E}$.

Cette notion est cruciale en théorie des distributions, une distribution n'étant rien d'autre qu'une forme linéaire continue sur un espace vectoriel particulier.

Exemple 16.6.2. *On considère* $\mathbb{E} := \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R})$ *et on se donne une fonction* $f \in \mathbb{E}$. *Alors, l'application* T_f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie comme étant* $T_f(\varphi) := \int_0^1 \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$ *est une forme linéaire.*

Exemple 16.6.3. *On se donne* $\mathbb{E} := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et pour tout* $A := (a_{i,j})_{i,j}$, *on pose* $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{i_i}$. *Cette application ainsi définie, que l'on appelle la trace, est une forme linéaire.*

Proposition 16.6.4. *L'espace des formes linéaires sur* $\mathbb{E}$ *est isomorphe à* $\mathbb{E}$ *lorsque* $\mathbb{E}$ *est de dimension finie.*

Ceci est immédiat après que l'on a remarqué que $\mathbb{E}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ où $n := \dim \mathbb{E}$. En effet, à chaque application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{K}$ correspond une unique matrice $M \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Or, ce dernier espace est de dimension $n \times 1 = n$.

Dans les cours de traitement du signal en école d'ingénieurs, vous étudierez le dual de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Vous aurez également l'occasion de travailler sur le dual des fonctions à décroissance rapide.

16.7 Espaces affines

Dans cette dernière section, on parle très brièvement des espaces affines. L'intérêt de ces espaces est qu'ils correspondent aux structures intervenant dans la résolution des équations différentielles linéaires avec second membre.

Un espace affine est un ensemble $\mathcal{S}$ tel qu'il existe un espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ qui vérifie $x - y \in \mathcal{S}_0$ pour tout $x, y \in \mathcal{S}$. On le notera par exemple $x_0 + \mathcal{S}_0$ où x_0 est n'importe quel élément de $\mathcal{S}$.

On a ici utilisé les notations qui nous serviront dans le chapitre sur les équations différentielles.

16.8 Exercices

Exercice 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) := (x+y-z, 2x-y+3z)$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{F} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x+3y=0\} \subset \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $f^{-1}(\mathbb{F})$.

Exercice 2

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) := (x+y, 2x-y, x-2y)$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{E} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x+3y=0\}$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $f(\mathbb{E})$.

Exercice 3

On considère les applications f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par $f(x, y, z) := (x + y, x - z)$ et $g(x, y) := (x + 2y, 3x - y, x + y)$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Pouvez-vous déterminer (sans calcul) $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne les sous-espaces vectoriels

$$\mathbb{E} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2z = 0\right\}$$

et

$$\mathbb{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x = 2y = z\right\} .$$

Montrer que $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F} = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) := (3x - 4y + 2z, 2x - 3y + 2z, x - 2y + 2z)$.

1. Déterminer f^2 et reconnaître la nature de f.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6

Soit $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application de $\mathbb{E}$ dans lui-même définie par $f(P) = Q$ avec $Q(X) := P(X) - P(X - 1)$. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Déterminer l'image et le noyau de f.

Chapitre 17

Déterminant

Par définition, le déterminant détermine. Par la suite, nous verrons que la nullité du déterminant d'une matrice (ou d'un endomorphisme en dimension finie) est équivalente à la non-inversibilité de la matrice.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

17.1 Formes multilinéaires

Avant de définir le déterminant, il convient d'introduire la notion de forme multilinéaire.

Définition 17.1.1. *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application f de $\mathbb{E}^p$ dans $\mathbb{K}$ est une forme p-linéaire si pour tout $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{E}$, pour tout $i_0 \in [\![1; p]\!]$, pour tout $y_{i_0} \in \mathbb{E}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a*

$$\begin{aligned}
&f\left(x_1, \cdots, x_{i_0-1}, \alpha x_{i_0} + \beta y_{i_0}, x_{i_0+1}, \cdots, x_p\right) \\
&= \alpha f\left(x_1, \cdots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{i_0+1}, \cdots, x_p\right) \\
&+ \beta f\left(x_1, \cdots, x_{i_0-1}, y_{i_0}, x_{i_0+1}, \cdots, x_p\right) .
\end{aligned}$$

En d'autres termes, l'application f est p-linéaire si et seulement si elle est linéaire en chacune de ses composantes.

Remarque 17.1.2. *L'ensemble des p-formes linéaires est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}_p(\mathbb{E}, \mathbb{K})$.*

Exemple 17.1.3. *Une forme linéaire est une forme 1-linéaire.*

Exemple 17.1.4. *Soient p formes linéaires $T_1, \cdots, T_p$ sur $\mathbb{E}$. Alors, l'application T de $\mathbb{E}^p$ dans $\mathbb{K}$ et définie par $T(x_1, \cdots, x_p) := \prod_{i=1}^p T_i(x_i)$ est une p-forme linéaire sur $\mathbb{E}$.*

On introduit maintenant une notion essentielle en vue de la caractérisation de l'inversibilité ou non des matrices carrées.

Définition 17.1.5. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{E}, \mathbb{K})$. On dit que la p-forme est alternée si $f(x_1, \cdots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.*

Remarque 17.1.6. *En fait, on peut montrer facilement, en utilisant la linéarité en chaque composante que f est alternée dès que la famille $\{x_1, \cdots, x_p\}$ est liée.*

Définition 17.1.7. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{E}, \mathbb{K})$. On dit que la p-forme est antisymétrique si l'échange entre deux vecteurs dans la famille $\{x_1, \cdots, x_p\}$ donne à f des valeurs opposées. En d'autres termes,*

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
&= -f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_p)
\end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i < j \leq p$.

Remarque 17.1.8 (Pour aller plus loin)**.** *On peut montrer facilement que f est antisymétrique si et seulement si pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on a*

$$f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \cdots, x_p)\,,$$

où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ c'est-à-dire

$$\epsilon(\sigma) := (-1)^{\#\{(i,j)\,:\,1 \leq i < j \leq p, \sigma(i) > \sigma(j)\}}\,.$$

On va maintenant voir qu'une p-forme alternée est antisymétrique et réciproquement. Il convient de noter que ce résultat ne fonctionne que sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2. C'est le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous ne verrons pas dans ce livre la notion de caractéristique et nous n'étudierons pas les corps non commutatifs.

Théorème 17.1.9. *Soit $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{E}, \mathbb{K})$ avec $p \geq 2$. Alors, f est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.*

Démonstration. Supposons que f est alternée. Soit une famille liée $\{x_1, \cdots, x_p\}$ quelconque. On a $f(x_1, \cdots, x_p) = 0$. En particulier, pour tout $1 \leq i < j \leq p$, on a

$$\begin{aligned}
0 =& f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
=& f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
&+ f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_j}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
=& \underbrace{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i}, x_{j+1}, \cdots, x_p)}_{=0} \\
&+ f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
&+ f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_j}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i}, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
&+ \underbrace{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_j}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p)}_{=0} \\
=& f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p) \\
&+ f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_j}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i}, x_{j+1}, \cdots, x_p)\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_j}, x_{j+1}, \cdots, x_p)\\&= -f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \mathbf{x_j}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, \mathbf{x_i}, x_{j+1}, \cdots, x_p)\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve que f est bien antisymétrique.

Réciproquement, supposons maintenant que f est antisymétrique. Montrons qu'elle est alternée. Sans rien changer à la généralité, et pour simplifier l'écriture, on suppose que $x_1 = x_2$. Alors :

$$\begin{aligned}f(x_1, x_1, x_3, \cdots, x_p) &= f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p)\\&= -f(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_p)\\&= -f(x_1, x_1, x_3, \cdots, x_p)\,.\end{aligned}$$

On a donc $2f(x_1, x_1, x_3, \cdots, x_p) = 0$ d'où $f(x_1, x_1, x_3, \cdots, x_p) = 0$.

□

17.2 Définition du déterminant

Dorénavant, $\mathbb{E}$ est de dimension finie n.

Théorème 17.2.1. *L'ensemble des n-formes linéaires alternées sur $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension* 1.

La preuve étant délicate, elle est omise.

On peut ainsi définir le déterminant sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 17.2.2. *L'unique n-forme linéaire alternée de $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$f(e_1, \cdots, e_n) = 1\,,$$

(où $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$) est appelée le déterminant sur $\mathbb{R}^n$.

Notation 17.2.3. *Le déterminant est noté* Dét.

17.3 Déterminant d'une matrice carrée

On peut alors définir le déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 17.3.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \cdots, C_n$ ses colonnes. On pose* $\text{Dét}(A) := \text{Dét}(C_1, \cdots, C_n)$.

On peut noter $\text{Dét}(A) = \text{Dét}(A^T)$ donc on peut définir le déterminant d'une matrice à partir de ses lignes.

On dispoe d'une propriété essentielle sur le déterminant :

Théorème 17.3.2. *Soient deux matrices A et B de taille $n \times n$. Alors :*

$$\text{Dét}(AB) = \text{Dét}(BA) = \text{Dét}(A)\text{Dét}(B)\,.$$

On admet le théorème. Il convient de noter que le module du déterminant correspond aussi au volume de la transformation linéaire (associée à la matrice) du cube élémentaire. C'est pourquoi l'on retrouve le Jacobien dans le changement de variable en dimension générale. Nous n'en dirons pas plus sur le sujet car nous ne trouvons pas cela pertinent eu égard aux objectifs de ce livre.

Théorème 17.3.3. *La matrice A est inversible si et seulement si* $\text{Dét}(A) \neq 0$.

Démonstration. En effet, Si A est inversible, alors il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ d'où $\text{Dét}(A)\text{Dét}(B) = \text{Dét}(I_n) = 1$. Il s'ensuit que l'on a $\text{Dét}(A) \neq 0$.

La réciproque fait appel à une formule calculatoire que nous ne souhaitons pas donner. La réciproque est donc admise. □

17.4 Déterminant d'un endomorphisme

On peut donc définir le déterminant d'un endomorphisme. Mais, l'on a besoin de quelques notions d'abord.

Définition 17.4.1. *Deux matrices A et A' de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $A' = PAP^{-1}$.*

Remarque 17.4.2. *Deux matrices semblables ont même déterminant.*

Démonstration. Soit P une matrice inversible. Alors $1 = \text{Dét}(I_n) = \text{Dét}(PP^{-1}) = \text{Dét}(P)\text{Dét}(P^{-1})$ d'où $\text{Dét}(P^{-1}) = \frac{1}{\text{Dét}(P)}$.

Ensuite, on a donc $\text{Dét}(A') = \text{Dét}(P)\text{Dét}(A)\text{Dét}(P^{-1}) = \text{Dét}(A)$. □

Proposition 17.4.3. *Soit un endomorphisme f de $\mathbb{E}$ avec $\dim \mathbb{E} = n$. Alors, si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et si A' est celle de f dans une autre base $\mathcal{B}'$, on en déduit que A et A' sont semblables.*

On admet la proposition.

Corollaire 17.4.4. *Soit un endomorphisme f de $\mathbb{E}$ avec $\dim \mathbb{E} = n$. Alors le déterminant de la matrice associée ne dépend pas de la base choisie.*

Définition 17.4.5. *Soit un endomorphisme f de $\mathbb{E}$ avec $\dim \mathbb{E} = n$. On pose* $\text{Dét}(f) := \text{Dét}(A)$ *où A est* **une** *matrice associée à f dans une base.*

Remarque 17.4.6. *La notion de déterminant pour un endomorphisme est d'un intérêt réduit dans ce livre. Toutefois, il est essentiel que le lecteur soit au courant de l'existence de cette notion.*

17.5 Formule du déterminant

On pourrait montrer, en utilisant les propriétés des formes n-linéaires alternées, que l'on a pour toute matrice $A := (a_{i,j})_{i,j}$:

$$\text{Dét}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} . \tag{17.1}$$

Cette formule a un intérêt particulier : elle montre qu'il y a une somme de $n!$ termes pour obtenir le déterminant. En effet, le cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments, $\mathcal{S}_n$, est $n!$.

17.6 Calcul pratique des déterminants

La formule calculatoire (17.1) n'est pas pratique à mettre en œuvre. On procède donc autrement dans les cas réels.

17.6.1 Pour une matrice de taille 1

Soit $a \in \mathbb{K}$. On pose $A := (a)$ la matrice de taille 1×1. Alors, il vient Dét $A = a$.

17.6.2 Pour une matrice de taille 2

Notation 17.6.1. *En dimension supérieure ou égale à 2, on écrit*

$$\text{Dét} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{vmatrix} .$$

Soient a, b, c, d quatre éléments de $\mathbb{K}$. On a alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

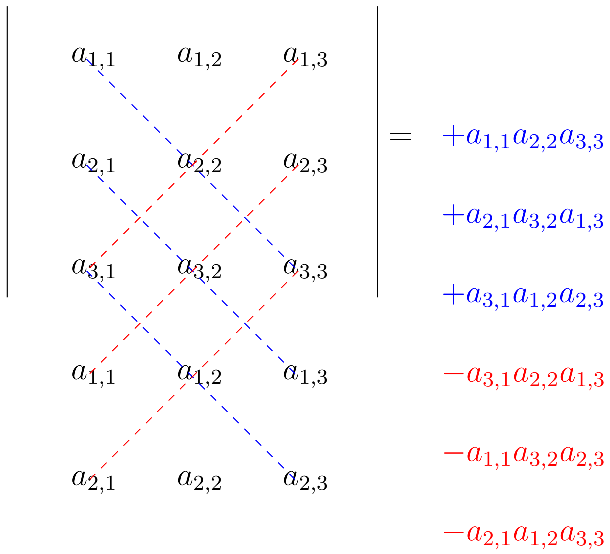
17.6.3 Pour une matrice de taille 3

La méthode de Sarrus permet de calculer simplement et à coup sûr le déterminant d'une matrice de taille 3×3. La méthode ressemble d'ailleurs à la méthode de calcul en dimension 2.

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$.

On réécrit les lignes L_1 et L_2 en dessous de la ligne L_3. Puis on somme les trois diagonales qui ont la forme $\backslash$ avant de retrancher les trois diagonales qui ont la forme $/$. Ainsi,

FIGURE 17.1 – Méthode de Sarrus



Remarque 17.6.2. *Il est important de préciser que la méthode de Sarrus ne fonctionne qu'en dimension trois. En effet, en dimension trois, utiliser* 2×3 *permutations permet de toutes les décrire (puisqu'elles sont au nombre de* $3! = 6$*) mais en dimension supérieure, on n'a jamais* $2 \times n = n!$.

17.6.4 Pour une matrice de taille quelconque

17.6.4.1 Si la matrice est diagonale

Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses éléments diagonaux.

En effet, en reprenant la formule (17.1), on voit que si σ est une permutation différente de l'identité, alors le coefficient $a_{i,\sigma(i)}$ est nul pour au moins un $i \in [\![1;n]\!]$ d'où le terme $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ vaut 0. Comme la signature de l'identité est 1, on aboutit au résultat annoncé.

17.6.4.2 Si la matrice est triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit de ses éléments diagonaux.

Dans le cas des matrices triangulaires supérieures, on remarque que s'il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) < i_0$, alors, $a_{i_0,\sigma(i_0)} = 0$ et donc seule une permutation satisfaisant $\sigma(i) \geq i$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ sera telle que $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ puisse être non nul. Il n'existe qu'une seule telle permutation : l'identité. On est ainsi ramené au cas précédent.

On peut faire de même avec les matrices triangulaires inférieures.

17.6.4.3 Opérations élémentaires sur les lignes

On se sert ici du caractère alterné du déterminant. En effet, si on prend i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$ ainsi que n vecteurs $V_1 \cdots V_n$ de $\mathbb{K}^n$, alors :

$$\text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_j}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_i}, V_{j+1}, V_n) = -\text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_n)\ .$$

Et, si jamais $V_i = V_j$, on a alors

$$\text{Dét}\ \left(V_1, \cdots, V_{i-1}, \underbrace{\mathbf{V_i}}_{=\mathbf{V_j}}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \underbrace{\mathbf{V_j}}_{=\mathbf{V_i}}, V_{j+1}, V_n \right) = -\text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_n)\ ,$$

ce qui se traduit par

$$\text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_n) = 0\,.$$

Conséquemment, en utilisant la linéarité du déterminant pour chaque ligne, quels que soient les indices $1 \leq i < j \leq n$, quels que soient les vecteurs $V_1, \cdots, V_n$ et quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
&\text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_i} + \lambda\mathbf{V_j}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_j}, V_{j+1}, \cdots, V_n) \\
&= \text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_i}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_j}, V_{j+1}, \cdots, V_n) \\
&+ \lambda\text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_j}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_j}, V_{j+1}, \cdots, V_n) \\
&= \text{Dét}\ (V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_i}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_j}, V_{j+1}, \cdots, V_n)\ .
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on cherche à calculer le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} L_1 & \cdots & L_n \end{pmatrix}^T\ ,$$

on peut tout aussi bien regarder celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} L_1 & \cdots & L_{i-1} & \mathbf{1} \times \mathbf{L_i} + \lambda \times \mathbf{L_j} & L_{i+1} & \cdots & L_{j-1} & \mathbf{L_j} & L_{j+1} & \cdots & L_n \end{pmatrix}^T\ .$$

Les recommandations faites pour les opérations sur les lignes et les colonnes sont les mêmes que celles faites pour le pivot de Gauss, voir la page 233. On peut également permuter les lignes et les colonnes mais en n'oubliant pas de multiplier par -1 à chaque fois qu'on échange deux lignes (ou deux colonnes), ce -1 étant le fruit du caractère alterné du déterminant. Grâce à la linéarité du déterminant sur chacun des n vecteurs, on peut aussi factoriser. En effet, si une des lignes, disons L_1 sans rien changer à la généralité (car on peut permuter) est telle que $L_1 = \lambda \times \tilde{L}_1$ alors, on a :

$$\begin{vmatrix} L_1 = \lambda \times \tilde{L}_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \tilde{L}_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$$

Cela fonctionne aussi avec les colonnes.

Remarque 17.6.3. *Toutefois, il est important de ne pas oublier qu'on ne peut pas dire* $\text{Dét}(\lambda \times A) = \lambda \text{Dét}(A)$ *puisque c'est absolument faux. En fait, on a* $\text{Dét}(\lambda \times A) = \lambda^n \text{Dét}(A)$.

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice permettent avant tout de simplifier pour ensuite utiliser l'arme suprême du calcul à savoir le développement par rapport à une ligne ou à une colonne.

C'est pourquoi son utilisation se doit d'être judicieuse. De manière générale, le but est d'avoir le plus de 0 possible.

Une astuce qui peut s'avérer utile lorsque l'on a une grande matrice avec peu de paramètres est de regarder si la somme des éléments de chaque colonne (ou ligne) est identique. Si tel est le cas, on rajoute toutes les autres lignes à la première afin d'avoir une ligne constituée de n fois le même élément d'où on peut se ramener à simplifier via les techniques précédentes.

17.6.4.4 Développement par rapport à une ligne

Soit une matrice A de taille $n \geq 2$ dont les coefficients sont $a_{i,j}$ (ligne i et colonne j).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Définissons maintenant la matrice $\tilde{A}^{i,j}$ comme suit :

$$\tilde{A}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Cela consiste simplement à retirer la ligne i et la colonne j.

Il peut sembler facile voire triviale d'enlever une ligne et une colonne mais il est important d'apporter un soin particulier à l'écriture de cette matrice. Maintenant, regardons le calcul du déterminant de A en développant par rapport à la première colonne (on verra ensuite pour la colonne j) :

$$\text{Dét}\,(A) = \text{Dét}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}; \cdots ; \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}; \cdots ; \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{i,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}\right).$$

Notons $(e_1, \cdots, e_n)$ la base dans laquelle on travaille. On a donc par définition :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{i,1} & \cdots & a_{n,1} \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i \,.$$

Par la linéarité du déterminant sur chacun des vecteurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Dét}\,(A) &= \text{Dét}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}e_i, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}; \cdots ; \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}; \cdots ; \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{i,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,1} \text{Dét}\left(e_i, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}; \cdots ; \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}; \cdots ; \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{i,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les opérations élémentaires sur les colonnes, on peut remplacer chaque colonne C_j par

$$C_j - a_{i,j}C_1 = C_j - a_{i,j}e_i = \begin{pmatrix} a_{1,j} & \cdots & a_{i-1,j} & 0 & a_{i+1,j} & \cdots & a_{n,j} \end{pmatrix}^T .$$

D'où :

$$\text{Dét}\,(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,1} \text{Dét}\left(e_i, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{i-1,2} \\ 0 \\ a_{i+1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \cdots , \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i-1,j} \\ 0 \\ a_{i+1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, \cdots , \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{i-1,n} \\ 0 \\ a_{i+1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}\right)$$

ce qui se traduit par

$$\text{Dét}\,(A) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{i,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On va maintenant permuter les lignes. D'abord, on inverse la ligne i et la ligne $(i-1)$. Puis la ligne $(i-1)$ (la nouvelle, c'est-à-dire celle qui était en position i avant) avec la ligne $(i-2)$, et ainsi de suite jusqu'à la seconde et la première. Ainsi, on a ramené la ligne i en première position sans toucher à l'ordre des $(n-1)$ autres lignes.

On a été obligé de faire $i-1$ transpositions pour cela.

Par conséquent, on doit multiplier par $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$. D'où :

$$\text{Dét}\,(A) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{i,1}(-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Or, en reprenant la définition calculatoire du déterminant, on se sert du produit des $a_{i,\sigma(i)}$ où σ est une permutation. Comme $a_{2,1} = \cdots = a_{n,1} = 0$, on ne somme que sur les permutations qui fixent 1 ce qui revient à considérer les permutations de $[\![2;n]\!]$ et donc, on a clairement :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ce qui est égal à $\text{Dét}(\tilde{A}^{i,1})$.

Ainsi, le développement par rapport à la première colonne donne

$$\text{Dét}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}\text{Dét}\,(\tilde{A}^{i,1})$$

Maintenant, si on avait voulu faire le développement par rapport à la colonne j, on aurait d'abord permuter les colonnes pour se ramener à un développement par rapport à la première colonne.

Pour cela, on permute la colonne j avec la $(j-1)$, puis la $(j-1)$ avec la $(j-2)$ et ainsi de suite jusqu'à la seconde avec la première. Pour faire ceci, on utilise $j-1$ transpositions, donc on multiplie par $(-1)^{j-1}$ (qui donnera donc $(-1)^{i+j}$ une fois multiplié à $(-1)^{i+1}$) d'où la formule générale :

$$\text{Dét}\,(A) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\text{Dét}\,(\tilde{A}^{i,j})\,.$$

Cette méthode fonctionne en toute dimension et elle sera donc préférée à la méthode de Sarrus. De même, la définition barbare du déterminant ne sert que rarement dans le calcul.

17.6.5 Pour une matrice de taille n non définie

Ici, il faut composer avec les deux précédentes méthodes. La plupart du temps, il faut se ramener, par des opérations élémentaires, à un nombre suffisant de 0 dans la matrice pour calculer plus simplement.

Ensuite, avec un développement par rapport à une ligne ou à une colonne (un développement judicieux évidemment, typiquement la première ligne ou la dernière ou même la première colonne ou la dernière), on peut obtenir une relation de récurrence. À partir d'une telle relation, c'est de l'analyse.

Par ailleurs, dans le cadre d'une récurrence, on peut se servir du déterminant de taille 1 pour l'implémenter.

Exemple 17.6.4. *On considère la matrice contenant des a sur la diagonale et des b partout ailleurs ; avec $a \neq b$. On va effectuer ce déterminant pour $n = 5$ en commençant par remplacer la première ligne par la somme de toutes les lignes :*

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4b & a+4b & a+4b & a+4b & a+4b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

On factorise ensuite par $a+4b$ vu que le déterminant est linéaire en la première coordonnée puis l'on remplace chaque colonne C_j par $C_j - C_1$ pour tout $j \in [\![2;n]\!]$. Il vient :

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+4b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

On développe alors par rapport à la première ligne et on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+4b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+4b)(a-b)^4\,.$$

Notons que cette méthode donne pour n quelconque la valeur $(a+(n-1)b)(a-b)^n$.

17.7 Exercices

Exercice 1

Calculer le déterminant de la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les déterminants des matrices A^2, A^3, AB, AB^T, $3A$ et $A-B$.

Exercice 3

Les déterminants suivants sont-ils égaux ?

$$D_1 := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & e & f \\ 1 & g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+k & b+k & c+k \\ 1 & d+l & e+l & f+l \\ 1 & g+m & h+m & i+m \end{vmatrix}.$$

Exercice 4

Factoriser

$$D_1 := \begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ a+b & a+b & -c \end{vmatrix} \text{ et } D_2 := \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 5

Factoriser $D := \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$.

Chapitre 18

Systèmes linéaires

18.1 Résolution des systèmes d'équations linéaires

18.1.1 Définition

Le problème est le suivant. On se donne une matrice A à n lignes et à p colonnes ainsi qu'une matrice B à n lignes et à une colonne et l'on cherche à résoudre l'équation linéaire

$$AX = B\,,$$

où X est un vecteur colonne à p lignes de la forme $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix}^T$.

On cherche tous les vecteurs colonnes qui satisfont l'égalité $AX = B$. En d'autres termes, on considère un système de n équations à p inconnues et chaque équation est linéaire en chacune des p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Ce système est linéaire car chaque équation est de la forme $ax + by + cz + dt = e$ (si $p = 4$). En particulier, il ne figure ni produit, ni puissance des inconnues.

L'objet de ce chapitre est de décrire une méthode systématique et rapide de résolution de ce type de systèmes. Cette méthode est le pivot de Gauss.

18.1.2 Résolution par la méthode de la substitution

Avant de présenter la méthode du pivot, on résout un système de quatre équations à quatre inconnues par la méthode de la substitution, la méthode naturelle :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ x + 4y + 9z + 16t = 4 \\ x + 8y + 27z + 64t = 8 \end{cases}.$$

On dit souvent “paramétrer, c’est résoudre.” Résolvons donc en paramétrant t en fonction des variables x, y et z. On se sert pour cela de la dernière équation. Le système est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ x+4y+9z+16t=4 \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On remplace ensuite t par son expression dans les trois autres équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{63}{64}x+\frac{56}{64}y+\frac{37}{64}z=-\frac{1}{8} \\ \frac{15}{16}x+\frac{24}{16}y+\frac{21}{16}z=\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4}x+2y+\frac{9}{4}z=2 \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On simplifie l’écriture comme suit.

$$\left\{\begin{array}{l} 63x+56y+37z=-8 \\ 5x+8y+7z=8 \\ 3x+8y+9z=8 \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On paramètre maintenant z en fonction de x et y à partir de la troisième équation :

$$\left\{\begin{array}{l} 63x+56y+37z=-8 \\ 5x+8y+7z=8 \\ z=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}x-\frac{8}{9}y \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On remplace ensuite z par son expression dans les deux premières équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{152}{3}x+\frac{208}{9}y=-\frac{368}{9} \\ \frac{8}{3}x+\frac{16}{9}y=-\frac{128}{9} \\ z=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}x-\frac{8}{9}y \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On simplifie l’écriture comme suit.

$$\left\{\begin{array}{l} 57x+26y=-46 \\ 3x+2y=2 \\ z=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}x-\frac{8}{9}y \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On paramètre maintenant y en fonction de x à partir de la deuxième équation :

$$\left\{\begin{array}{l} 57x+26y=-46 \\ y=1-\frac{3}{2}x \\ z=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}x-\frac{8}{9}y \\ t=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}x-\frac{1}{8}y-\frac{27}{64}z \end{array}\right. .$$

On remplace ensuite y par son expression dans la première équation :

$$\begin{cases} 18x = -72 \\ y = 1 - \frac{3}{2}x \\ z = \frac{8}{9} - \frac{1}{3}x - \frac{8}{9}y \\ t = \frac{1}{8} - \frac{1}{64}x - \frac{1}{8}y - \frac{27}{64}z \end{cases}.$$

On trouve alors $x = -4$ puis

$$y = 1 + \frac{3}{2}4 = 7\,.$$

Ensuite, on calcule z :

$$z = \frac{8}{9} + \frac{1}{3}4 - \frac{8}{9}7 = -4$$

et enfin

$$t = \frac{1}{8} + \frac{1}{64}4 - \frac{1}{8}7 + \frac{27}{64}4 = 1\,.$$

On est parvenu à résoudre ce système d'équations mais l'on a fait un grand nombre de calculs. Cette méthode n'est donc absolument pas raisonnable et l'on ne s'en sert que si l'on a deux équations et deux inconnues. Subséquemment, on présentera la méthode la plus rapide qui soit pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

18.2 Approche de la méthode du pivot

Pour appréhender la méthode du pivot de Gauss, on va d'abord l'illustrer avec le même exemple que précédemment. On considère le système $(\mathcal{S}_0)$:

$$(\mathcal{S}_0)\ :\quad \begin{cases} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 4 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & 8 \end{cases}.$$

On commence par numéroter les équations de 1 à 4 comme suit.

$$(\mathcal{S}_0)\ :\quad \begin{cases} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 & \quad (E_1) \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 & \quad (E_2) \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 4 & \quad (E_3) \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & 8 & \quad (E_4) \end{cases}.$$

Intéressons-nous plus particulièrement à (E_1) et à (E_2). À partir de ces deux équations, il est facile de fabriquer de nouvelles relations qui doivent être satisfaites. Par exemple, retranchons (E_1) à (E_2). On obtient une nouvelle équation (E_2') :

$$y + 2z + 3t = 2\,.$$

Inversement, si (E_1) et (E_2') sont satisfaites, (E_2) l'est aussi (il suffit d'ajouter (E_1) à (E_2')). On peut donc remplacer les deux équations (E_1) et (E_2) par les deux équations (E_1) et (E_2'). Ainsi, à la résolution du système $(\mathcal{S}_0)$, on substitue la résolution du système équivalent $(\mathcal{S}_0')$:

$$(\mathcal{S}_0')\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \quad (E_1) \\ & & y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \quad (E_2') \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 4 \quad (E_3) \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & 8 \quad (E_4) \end{array}\right. .$$

Nous avons éliminé l'inconnue x de la deuxième équation. Notre stratégie est maintenant la suivante : on va effectuer une opération analogue à la précédente pour éliminer l'inconnue x des équations (E_3) et (E_4). On obtient le nouveau système

$$(\mathcal{S}_1)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \quad (E_1') \\ & & y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \quad (E_2') \\ & & 3y & + & 8z & + & 15t & = & 4 \quad (E_3') \\ & & 7y & + & 26z & + & 63t & = & 8 \quad (E_4') \end{array}\right. ,$$

en ayant posé $(E_1') := (E_1)$. La variable x ne figure plus que dans la première équation. Nous allons maintenant faire une démarche similaire pour que la variable y ne figure plus que dans une seule équation elle aussi. Pour cela, nous allons nous servir de la deuxième équation (comme pivot).

On remplace ici (E_1') par $(E_1'') := (E_1') - (E_2')$, (E_3') par $(E_3'') := (E_3') - 3 \times (E_2')$ et (E_4') par $(E_4'') := (E_4') - 7 \times (E_2')$. Et, on pose $(E_2'') := (E_2')$. Le nouveau système est alors

$$(\mathcal{S}_2)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccccl} x & & & - & z & - & 2t & = & -2 \quad (E_1'') \\ & & y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \quad (E_2'') \\ & & & & 2z & + & 6t & = & -2 \quad (E_3'') \\ & & & & 12z & + & 42t & = & -6 \quad (E_4'') \end{array}\right. .$$

On se sert maintenant de la troisième équation comme pivot pour éliminer la variable z des équations 1, 2 et 4. On pose ici :

$$\begin{aligned} & (E_1''') := (E_1'') + \frac{1}{2} \times (E_3''), \\ & (E_2''') := (E_2'') - (E_3''), \\ & (E_4''') := (E_4'') - 6 \times (E_3''), \\ \text{et} \quad & (E_3''') := (E_3'') \end{aligned}$$

On obtient le nouveau système :

$$(\mathcal{S}_3)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccl} x & & & + & t & = & -3 \quad (E_1''') \\ & y & & - & 3t & = & 4 \quad (E_2''') \\ & & 2z & + & 6t & = & -2 \quad (E_3''') \\ & & & & 6t & = & 6 \quad (E_4''') \end{array}\right. .$$

Enfin, faisons disparaître la variable t, sauf dans la dernière équation :

$$\begin{aligned}
&(E_1'''') := (E_1''') - \frac{1}{6} \times (E_4'''),\\
&(E_2'''') := (E_2''') + \frac{1}{2} \times (E_4'''),\\
&(E_3'''') := (E_3''') - (E_4'''),\\
\text{et}\quad &(E_4'''') := (E_4''')
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le nouveau système

$$(\mathcal{S}_4)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & = & -4 & (E_1'''') \\ & y & & & = & 7 & (E_2'''') \\ & & 2z & & = & -8 & (E_3'''') \\ & & & 6t & = & 6 & (E_4'''') \end{array}\right. .$$

On trouve donc une unique solution :

$$x = -4\,,\quad y = 7\,,\quad z = -4\quad \text{et}\quad t = 1\,.$$

On retrouve la solution obtenue avec la méthode de la substitution. Toutefois, on a effectué des calculs beaucoup moins compliqués et on en a effectué moins.

18.3 Notations

Pour améliorer le confort de la lecture, on présente la méthode du pivot comme suit. On forme le tableau des coefficients du système, en séparant les coefficients du second membre par une ligne verticale :

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (E_1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & (E_2) \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 4 & (E_3) \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 8 & (E_4) \end{array}$$

On choisit le premier élément de la première ligne (qu'on encadre), appelé *premier pivot*. On conserve la ligne correspondante (ici, la première) et on soustrait à chacune des autres le multiple adéquat de la première de manière à annuler le coefficient dans la première colonne. Ainsi, on obtient le tableau

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & (E_1') := (E_1) \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & (E_2') := (E_2) - (E_1) \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 4 & (E_3') := (E_3) - (E_1) \\ 0 & 7 & 26 & 63 & 8 & (E_4') := (E_4) - (E_1) \end{array}$$

On choisit alors un deuxième pivot, à savoir l'élément à la deuxième colonne et à la deuxième ligne, qu'on encadre. Puis, on élimine les coefficients de cette colonne dans les trois autres lignes, comme précédemment. Pour ne pas oublier qu'on a déjà utilisé un pivot dans la première ligne, on laisse l'encadrement autour du premier élément de la première ligne. On obtient alors

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -2 & (E_1'') := (E_1') - (E_2') \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 2 & (E_2'') := (E_2') \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 & (E_3'') := (E_3') - 3 \times (E_2') \\ 0 & 0 & 12 & 42 & -6 & (E_4'') := (E_4') - 7 \times (E_2') \end{array}$$

On choisit maintenant le troisième élément de la troisième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -3 & (E_1''') := (E_1'') + \frac{1}{2}(E_3'') \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 4 & (E_2''') := (E_2'') - (E_3'') \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 6 & -2 & (E_3''') := (E_3'') \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & (E_4''') := (E_4'') - 6 \times (E_3'') \end{array}$$

Enfin, on choisit le quatrième élément de la quatrième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -4 & (E_1'''') := (E_1''') - \frac{1}{6}(E_4''') \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 7 & (E_2'''') := (E_2''') + \frac{1}{2}(E_4''') \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -8 & (E_3'''') := (E_3''') - (E_4''') \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 6 & (E_4'''') := (E_4''') \end{array}$$

La réduction du tableau est achevée (on ne peut plus choisir de nouveau pivot). On peut alors réécrire le système transformé correspondant :

$$(\mathcal{S}_4) \ : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccl} x & & & & = & -4 & (E_1'''') \\ & y & & & = & 7 & (E_2'''') \\ & & 2z & & = & -8 & (E_3'''') \\ & & & 6t & = & 6 & (E_4'''') \end{array} \right. ,$$

et l'on termine facilement la résolution du système.

Remarque 18.3.1. *Dans cet exemple, on a pris tous les pivots sur la diagonale et dans l'ordre. Ce n'est pas toujours le cas. Ici, on a procédé de cette manière car cela facilitait les calculs.*

18.4 Règles de choix des pivots

Dans le choix successif des pivots, on doit respecter les règles suivantes :

Règle numéro un : Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical dans le tableau.
Règle numéro deux : On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.
Règle numéro trois : Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

Dans le respect de ces règles, tous les choix sont possibles, et il y a donc de multiples variantes suivant le choix des pivots. Si l'on cherche une résolution exacte (comme c'est le cas ici, on choisit généralement les pivots les plus simples possibles). Au contraire, en analyse numérique où les calculs sont approchés, on prend les pivots les plus grands possibles en valeur absolue.

La réduction du tableau des coefficients est terminée lorsqu'on ne peut plus choisir un nouveau pivot en respectant les règles ci-dessus.

18.5 Remarques finales

Les équations correspondant aux lignes où figure un pivot sont appelées “équations principales”. Les autres, celles correspondant aux lignes où ne figure pas de pivot sont appelées “équations auxiliaires”. Symétriquement, les inconnues correspondant aux colonnes où figure un pivot sont appelées “inconnues principales” et les autres sont appelées “inconnues auxiliaires”.

Ce sont les équations auxiliaires qui servent pour discuter de l'existence de solutions. Ces équations n'ont que des 0 dans la partie gauche du tableau. Si le terme de droite est nul dans une équation auxiliaire, l'équation peut être supprimée. Si le terme est non nul, le système n'admet tout simplement pas de solution.

18.6 Comment inverser une matrice ?

On peut aussi utiliser le pivot de Gauss pour inverser les matrices carrées (qui sont inversibles).

Pour ce faire, on utilise la même méthode mais, à droite du trait vertical, on met la matrice identité. Ensuite, on fait subir à la matrice à droite du trait vertical les mêmes transformations que celles que l'on applique à la matrice à gauche. Quand la matrice à gauche est devenue l'identité alors la matrice de droite est l'inverse de la matrice initiale.

On donne un exemple de telle inversion avec le pivot de Gauss pour la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \quad (E_1) \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \quad (E_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \quad (E_3) \end{array}$$

On choisit le deuxième élément de la deuxième ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|ccc l} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 & \quad (E_1') := (E_1) - 2 \times (E_2) \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & \quad (E_2') := (E_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \quad (E_3') := (E_3) \end{array}$$

On choisit ensuite le troisième élément de la troisième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1'') := (E_1') + 7 \times (E_3') \\ (E_2'') := (E_2') - 2(E_3') \\ (E_3'') := (E_3') \end{array}$$

Par conséquent : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18.7 Exercices

Exercice 1

Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -3 \end{cases}.$$

Exercice 3

Déterminer le nombre a pour que le système linéaire suivant ait une solution

$$\begin{cases} x - 3y - 4t = 1 \\ -x + 3y + z + 2t = 2 \\ -3x - y + 2z - 3t = a \\ 7x - y - z - 4t = -4 \end{cases}.$$

On suppose maintenant que a prend cette valeur. Y a-t-il une ou plusieurs solutions ? Y a-t-il une solution pour laquelle y vaut 3 ? Si oui, écrire cette solution.

Exercice 4

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 3 \\ 3x + 7y + 4z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 5

Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ 5x + 5y + 10z = 6 \end{array}\right. .$$

Chapitre 19

Diagonalisation et triangularisation des matrices

Dans tout le chapitre, le corps $\mathbb{K}$ est celui des réels ou celui des complexes. Il convient de préciser qu'ici, se placer dans $\mathbb{C}$ plutôt que dans $\mathbb{R}$ offre de bonnes propriétés.

19.1 Motivation

Il peut arriver en mathématiques (par exemple lorsque l'on veut résoudre un système d'équations différentielles linéaires) que l'on ait à prendre l'exponentielle d'une matrice. Ici, le mot "exponentielle" est à comprendre au sens des séries entières, ce qui est l'objet d'un chapitre subséquent, voir la page 375.

Définition 19.1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, l'exponentielle de la matrice A est définie comme étant égale à $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, en admettant que cette somme infinie ait un sens.*

Comme vous pouvez l'imaginer, le calcul n'est pas évident. Néanmoins, si la matrice A est diagonale, le calcul est facilité comme suit.

$$\begin{aligned}
\exp(A) = \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ qui est valable pour tout $x \in \mathbb{C}$, on obtient :

$$\exp(A) = \exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

De la même manière, l'inversion d'une matrice est simple quand la matrice est diagonale comme on l'a déjà vu. Pour rappel :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix},$$

à condition bien sûr que l'on ait $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

On se ramène donc autant que faire se peut aux matrices diagonales. Plus précisément, les mathématiciens apprécient quand les matrices sont semblables à des matrices diagonales c'est-à-dire quand $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et D est une matrice diagonale. Le but du jeu est alors de fournir des matrices D et P.

En effet, si $A = PDP^{-1}$ et si D est inversible alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ et il suffit ainsi d'inverser la matrice diagonale D.

De même, on peut montrer par récurrence que l'on a $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit alors :

$$\begin{aligned} \exp(A) = \exp\left(PDP^{-1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(PDP^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1} \\ &= P\exp(D)P^{-1}. \end{aligned}$$

Il suffit ainsi de prendre l'exponentielle de la matrice diagonale D.

19.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 19.2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vcteur* **non nul** *$x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = \lambda x$.*

Il convient de supposer que le vecteur x est non nul car sinon tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ serait une valeur propre vu que $A0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} = \lambda 0_{\mathbb{R}^n}$.

Définition 19.2.2. *Si λ est une valeur propre d'une matrice carrée A, alors tout vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda x$ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Remarque 19.2.3. *On parle de valeurs propres et de vecteurs propres d'un endomorphisme dès qu'ils sont associés à une matrice de l'endomorphisme.*

Exemple 19.2.4. *On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est tel que $Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3x$. Ainsi, 3 est une valeur propre de A et x est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.*

Remarque 19.2.5. *Si λ est une valeur propre de A et si v est un vecteur propre de A associé à λ, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $w := \alpha v$ est tel que $Aw = \lambda w$. En particulier, si $\alpha \neq 0$, alors w est un vecteur propre de A associé à λ.*

Définition 19.2.6. *L'ensemble des valeurs propres de A est noté $\mathrm{Sp}(A)$ et s'appelle le spectre de A.*

Définition 19.2.7. *L'ensemble des vecteurs x tels que $(A - \lambda I_n)x = 0_{\mathbb{R}^n}$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ est appelé le sous-espace propre de A pour la valeur propre λ. On le note $\mathbb{E}_\lambda$.*

Remarque 19.2.8. *Il convient de noter que $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}_\lambda$. Pourtant, par définition, $0_{\mathbb{E}}$ n'est pas un vecteur propre. Il faut donc bien faire attention au fait que l'espace propre $\mathbb{E}_\lambda$ n'est pas l'ensemble des vecteurs propres associés à λ.*

Remarque 19.2.9. *On peut prouver facilement que $\mathbb{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. De plus, comme il existe toujours un vecteur $x \in \mathbb{E}_\lambda$ tel que $x \neq 0$, on a $\dim \mathbb{E}_\lambda \geq 1$.*

Démonstration. D'abord, $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}_\lambda$ vu que $A0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}} = \lambda.0_{\mathbb{E}}$. Soient maintenant deux vecteurs x et y dans $\mathbb{E}_\lambda$. Soit aussi $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $A(x+y) = Ax + Ay = \lambda.x + \lambda.y = \lambda.(x+y)$ donc $x + y \in \mathbb{E}_\lambda$. De même, on a $A(\alpha.x) = \alpha.Ax = \alpha.(\lambda.x) = \lambda.(\alpha.x)$ donc $\alpha.x \in \mathbb{E}_\lambda$. Soit maintenant $x \in \mathbb{E}_\lambda$ avec $x \neq 0$. On est assuré de l'existence d'un tel vecteur vu que λ est une valeur propre de A. Comme $x \neq 0$, la famille $\{x\}$ est libre et donc la dimension de $\mathbb{E}_\lambda$ est au moins 1 d'après la Proposition 14.6.8. □

Remarque 19.2.10. *Si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\mathbb{E}_0 = \mathrm{Ker}(A)$.*

19.3 Caractérisation de Sp(A)

On se demande maintenant comment obtenir le spectre de la matrice A. Pour ce faire, on dispose d'une arme imparable : le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x) := \mathrm{Dét}(A - XI_n)\,.$$

Théorème 19.3.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors,* $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \ : \ \chi_A(\lambda) = 0\}$ *où* χ_A *est le polynôme caractéristique de* A*.*

Démonstration. Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation $(A - \lambda I_n)x = 0_{\mathbb{R}^n}$ admet des solutions non nulles. En d'autres termes, le noyau de la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Ceci signifie que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et en particulier, son déterminant est nul.

Réciproquement, si $\chi_A(\lambda) = 0$, on en déduit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est tel que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc le noyau de la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ d'où λ est bien une valeur propre de A. $\square$

Exemple 19.3.2. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$*. Alors, son polynôme caractéristique est :* $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2 - 1 = X^2 - 4X + 3$*. On résout l'équation* $x^2 - 4x + 3 = 0$ *et l'on trouve* $x = 3$ *ou* $x = 1$*. Donc* $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 3\}$*.*

Exemple 19.3.3. *Soit maintenant la matrice réelle* $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$*. Alors* $\chi_A(X) = (\cos(\theta) - X)^2 + \sin^2(\theta) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$*. Si on suppose* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$*, il vient immédiatement que le discriminant du trinôme est strictement négatif donc il n'y a aucune valeur propre réelle.*

C'est pourquoi on aime se placer dans $\mathbb{C}$*, qui a le bon goût d'être algébriquement clos. En des termes moins savants, cela signifie que chaque équation polynomiale complexe admet au moins une solution complexe, voir le Théorème 10.5.9.*

19.4 Lien entre les vecteurs propres

Proposition 19.4.1. *Soient deux valeurs propres* λ_1, λ_2 *telles que* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*. Soit* v_1 *(respectivement* v_2*) un vecteur propre de la matrice* A *associé à la valeur propre* λ_1 *(respectivement* λ_2*). Alors, la famille* $\{v_1, v_2\}$ *est libre.*

Démonstration. Soient α_1 et α_2 deux éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Alors, on en déduit $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$. Or, $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$. Mais de même, on a $\lambda_1.(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$ d'où $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2$. Il s'ensuit $\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2).v_2 = 0$ d'où $v_2 = 0$ ou $\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Comme v_2 est un vecteur propre, il est non nul. On trouve alors $\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Comme $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, il vient $\alpha_2 = 0$. On peut faire de même avec α_1. Par conséquent, les deux coefficients sont nuls et donc la famille $\{v_1, v_2\}$ est bien libre.

$\square$

Corollaire 19.4.2. *Si* λ_1 *et* λ_2 *sont deux valeurs propres différentes de* A *alors* $\mathbb{E}_{\lambda_1} \bigcap \mathbb{E}_{\lambda_2} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*.*

19.5 Diagonalisation

Théorème 19.5.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale) si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à A est égale à n.*

Le théorème est admis.

Corollaire 19.5.2. *Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, alors la matrice est diagonalisable.*

Démonstration. On a vu dans la Remarque 19.2.9 que chaque sous-espace propre a une dimension au moins égale à 1. Donc, si la matrice admet n valeurs propres distinctes, la somme des dimensions des sous-espaces propres est supérieure à $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$. □

Il convient de noter que certaines matrices sont diagonalisables bien que les valeurs propres ne soient pas forcément distinctes.

Également, certaines matrices ne sont pas diagonalisables, même dans $\mathbb{C}$.

Exemple 19.5.3. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice réelle. Le polynôme caractéristique de A est donc*

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = & \begin{vmatrix} 1-X & -3 & 3 \\ 3 & -5-X & 3 \\ 6 & -6 & 4-X \end{vmatrix} \\
= & + \left((1-X)(-5-X)(4-X) + 3(-6)3 + 6(-3)3\right) \\
& - \left(6(-5-X)3 + (1-X)(-6)3 + 3(-3)(4-X)\right) \\
= & (1-X)(-20+X+X^2) - 108 \\
& - (-90 - 18X - 18 + 18X - 36 + 9X) \\
= & -128 + 21X - X^3 + 144 - 9X \\
= & -X^3 + 12X + 16\,.
\end{aligned}$$

On résout l'équation $-x^3+12x+16 = 0$ dans $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on cherche des racines évidentes. -2 en est une. En effet, $-(-2)^3+12(-2)+16 = 8-24+16 = 0$. On factorise : $-x^3+12x+16 = -(x+2)(x^2-2x-8)$. On résout alors $x^2-2x-8 = 0$ et l'on trouve $x = -2$ ou $x = 4$. On trouve ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-2; 4\}$.

On cherche maintenant à déterminer l'espace propre associé à 4 et celui associé à -2.

Pour cela, on résout $(A - 4I_n)x = 0_{\mathbb{R}^n}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne automatiquement $x_1 = x_2$ *et* $x_3 = 2x_1$. *On a donc paramétré. Or, paramétrer, c'est résoudre. Ainsi,* $\mathbb{E}_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right)$.

On fait de même avec la valeur propre -2 *en résolvant* $(A + 2I_n)x = 0_{\mathbb{R}^n}$ *c'est-à-dire*

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. *On a une équation avec trois inconnues. On dispose alors de deux degrés de liberté :* $x_1 = x_2 - x_3$. *En d'autres termes, le vecteur* $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ *est égal à* $x_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$. *Les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ *ne sont pas liés d'où l'on trouve* $\mathbb{E}_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. *Ensuite, en posant* $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *on peut vérifier que l'on a bien* $A = PDP^{-1}$ *où* $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. *Pour calculer l'inverse de la matrice* P, *on pouvait utiliser le pivot de Gauss.*

Il faut noter que le passage des vecteurs propres à la matrice P a été purement et simplement évité. En effet, il faudrait développer la théorie de la diagonalisation et nous optons plutôt pour l'efficacité pratique dans cet ouvrage.

Toutefois, pour trouver P, il nous a suffit de mettre les vecteurs propres de 4 puis de -2 dans une même matrice. Le plus important est de respecter l'ordre : comme le 4 est avant le -2 dans la diagonale, il fallait d'abord mettre le vecteur propre de 4.

On pouvait bien sûr faire l'inverse : mettre -2 avant 4 dans la diagonale mais alors, on aurait mis les vecteurs propres associés à -2 avant celui associé à 4.

19.6 Triangularisation

Remarque 19.6.1. *La matrice* $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ *possède le même spectre que la matrice de l'exemple 19.5.3. Pourtant, la matrice* B *n'est pas diagonalisable. En effet, lorsque l'on résout le système* $(A + 2I_n)x = 0_{\mathbb{R}^n}$, *on trouve un espace vectoriel de dimension* 1. *Il en est de même pour l'espace propre* $\mathbb{E}_4$. *Par conséquent,* $\dim \mathbb{E}_{-2} + \dim \mathbb{E}_4 = 1 + 1 = 2 < 3$.

Néanmoins, sur l'espace des complexes, on peut montrer (on ne le fera pas) que toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Notons par ailleurs que la triangularisation ne sera que d'un intérêt modéré dans vos études d'ingénieurs. Il est surtout important d'être conscient de l'existence de cette possibilité.

19.7 Exercices

Exercice 1

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver toutes les valeurs propres de A et leurs vecteurs propres correspondants.
2. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables (en précisant si c'est dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) et donner une matrice de passage à une base de diagonalisation :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables (en précisant si c'est dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) et donner une matrice de passage à une base de diagonalisation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables (en précisant si c'est dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) et donner une matrice de passage à une base de diagonalisation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cinquième partie

Formes quadratiques et produits scalaires

Chapitre 20

Introduction

Pourquoi une partie sur les formes quadratiques ? Nous allons nous efforcer de répondre à cette question dans ce chapitre.

20.1 Intérêt

Contrairement à l'algèbre linéaire, il est tout à fait envisageable de suivre des études d'ingénieurs sans avoir aiguisé son instinct concernant les formes quadratiques, les espaces Euclidiens ou les espaces Hermitiens.

En fait, cette partie ne doit tout simplement pas être la priorité.

Depuis que je présente le cours de Probabilités et statistiques, je mentionne les expressions "formes quadratiques" et "formes bilinéaires symétriques" au moins trois ou quatre fois par an.

En effet, la variance est une forme quadratique tandis que la covariance est une forme bilinéaire symétrique.

Également, la notion de projection orthogonale jouera un grand rôle dans le chapitre sur les séries de Fourier.

À bien des égards, cette partie est à réserver aux étudiants qui ont déjà vu le reste du manuscrit.

20.2 Objectifs

L'objectif est de sensibiliser le lecteur à la notion de forme quadratique et aux notions qui en dérivent.

20.3 Prérequis

L'algèbre linéaire est un prérequis puisqu'une forme bilinéaire symétrique (dont découle la notion de forme quadratique) n'est rien d'autre qu'une forme linéaire en chacune de ses composantes (avec quelques propriétés supplémentaires). Les complexes doivent aussi être étudiés avant de regarder cette partie.

20.4 Organisation

Nous présentons brièvement les chapitres qui composent cette partie.

20.4.1 Formes quadratiques

Dans un premier chapitre, nous parlons des formes bilinéaires symétriques (sur $\mathbb{R}$) et nous établissons les propriétés classiques comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

20.4.2 Espaces Euclidiens

Dans le deuxième chapitre, nous parlons sans le dire de topologie associée à un produit scalaire. En d'autres termes, on s'intéresse à des espaces de Hilbert de dimension finie. Les espaces de Hilbert de dimension infinie sont brièvement mentionnés. La projection orthogonale est également abordée.

20.4.3 Espaces Hermitiens

Dans ce troisième chapitre, nous étudions le cas où le corps de base est celui des complexes.

Chapitre 21

Formes quadratiques

Contrairement à d'autres chapitres, ici, on se place uniquement avec $\mathbb{R}$ pour corps de base.

En effet, nous verrons plus tard le cas où l'on prend également $\mathbb{C}$.

21.1 Formes bilinéaires symétriques

21.1.1 Définitions

Définition 21.1.1 (Forme bilinéaire symétrique)**.** *Une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- *B est symétrique : $B(x, y) = B(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{E}$.*
- *B est linéaire à droite : $B(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda B(x, y_1) + B(x, y_2)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $y_1, y_2, x \in \mathbb{E}$.*
- *B est linéaire à gauche : $B(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + B(x_2, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $x_1, x_2, y \in \mathbb{E}$.*

Remarque 21.1.2. *Du fait de la symétrie, il suffit d'avoir la linéarité à gauche (ou la linéarité à droite).*

Exemple 21.1.3. *Soit* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *l'espace des variables aléatoires réelles de moment d'ordre deux fini. Alors, l'application B de* $\mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ *dans $\mathbb{R}$ définie par $B(X, Y) := \mathbb{E}(XY)$ est une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathrm{L}^2(\Omega)$*.*

Définition 21.1.4 (Formes quadratiques)**.** *À toute forme bilinéaire symétrique B, on peut associer une forme quadratique q de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q(x) := B(x, x)$.*

Lemme 21.1.5. *La forme bilinéaire symétrique B dont la forme quadratique q est issue est unique.*

Démonstration. On remarque en effet

$$\begin{aligned}
&q(x+y)-q(x)-q(y)\\
=&B(x+y,x+y)-B(x,x)-B(y,y)\\
=&B(x,x)+B(x,y)+B(y,x)+B(y,y)-B(x,x)-B(y,y)\\
=&B(x,y)+B(y,x)\\
=&2B(x,y)\,,
\end{aligned}$$

d'où l'on a $B(x,y)=\frac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right)$.

De même, on peut prouver $B(x,y)=\frac{1}{4}\left(q(x+y)-q(x-y)\right)$. □

Définition 21.1.6. *Si q est une forme quadratique issue de B, on dit que B est la forme polaire de q.*

Remarque 21.1.7. *On peut vérifier facilement que l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ forme un espace vectoriel. Il en est de même pour les formes quadratiques.*

21.1.2 Formes positives et définies positives

Définition 21.1.8. *Soit B une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$. On dit que B est positive si pour tout $x\in\mathbb{E}$, $q(x)=B(x,x)\geq 0$.*

Remarque 21.1.9. *La forme bilinéaire symétrique de l'Exemple 21.1.3 est positive.*

Proposition 21.1.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si B est une forme bilinéaire symétrique positive, alors pour tous $x,y\in\mathbb{E}$, on a*

$$B(x,y)^2\leq q(x)q(y)\,.$$

Démonstration. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{E}$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $q(\lambda x+y)\geq 0$. Ceci est équivalent à $\lambda^2B(x,x)+2\lambda B(x,y)+B(y,y)\geq 0$, ce que l'on peut réécrire comme suit $\lambda^2q(x)+2\lambda B(x,y)+q(y)\geq 0$. Si $q(x)=0$, alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $2\lambda B(x,y)+q(y)\geq 0$ ce qui n'est possible que si $B(x,y)=0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors vérifiée. Au contraire, si $q(x)\neq 0$, on en déduit que c'est un trinôme positif en λ et donc son discriminant est négatif. Le discriminant étant $4B(x,y)^2-4q(x)q(y)$, il vient l'inégalité annoncée. □

Définition 21.1.11. *On dit que la forme bilinéaire symétrique B sur $\mathbb{E}$ associée à la forme quadratique q est définie positive si $B(x,x)=q(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{E}$ avec $x\neq 0$.*

Remarque 21.1.12. *On a $q(0)=0$ et c'est pourquoi l'on doit supposer $x\neq 0$ dans la définition précédente.*

Remarque 21.1.13. *La covariance (sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$) n'est pas définie positive.*

Démonstration. Il suffit d'exhiber un contre-exemple. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. La variable aléatoire constante et égale à a n'est pas nulle. Pourtant, sa covariance est 0, comme on peut le démontrer facilement. □

Remarque 21.1.14. *Une forme bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire. Et, si la norme associée est $||.||$, on a $q(x) = ||x||^2$. De plus, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspond à la dépendance linéaire de (x, y).*

21.1.3 Exemples de formes bilinéaires symétriques

Exemple 21.1.15. *Soit $\mathbb{E} := \mathbb{R}^n$. On pose $B_1(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Il s'agit du produit scalaire canonique. La forme quadratique associée est $q_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ si $x \neq 0$. Ainsi, B_1 est bien définie positive.*

Exemple 21.1.16. *Soit $\mathbb{E} := \mathbb{R}^n$. On pose $B_2(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$.*

La forme quadratique associée est $q_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geq 0$. Néanmoins, on peut avoir $q_2(x) = 0$ sans pour autant que x soit nul. Ainsi, B_2 est positive mais n'est pas définie positive.

Exemple 21.1.17. *Soit $\mathbb{E} := \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. On pose $B_3(f, g) := \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.*

La forme quadratique associée est $q_3(f) = \int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t$. Ainsi, $q_3(f) \geq 0$. Et, si $q_3(f) = 0$, alors $f = 0$ vu que f^2 est continue et positive sur $[a; b]$.

Par conséquent, B_3 est définie positive. Il s'agit donc d'un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

21.2 Réduction d'une forme quadratique

Dans cette section, on suppose dorénavant que $\mathbb{E}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$: $\dim \mathbb{E} =: n$.

21.2.1 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

Définition 21.2.1. *Supposons que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbb{E}$. Soit B une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$, associée à la forme quadratique q. On associe à B (ou de même à q), sa matrice dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ définie par $M := (\alpha_{i,j})$ avec $\alpha_{i,j} := B(e_i, e_j)$.*

Remarque 21.2.2. *La matrice M est symétrique.*

Exemple 21.2.3. *Soit la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$:*

$$q(x, y, z) := x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - 5xz + 3yz\,.$$

La forme polaire de q est alors

$$\begin{aligned} B\left((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\right) =& x_1x_2 + 2y_1y_2 - z_1z_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \\ & - \frac{5}{2}x_1z_2 - \frac{5}{2}x_2z_1 + \frac{3}{2}y_1z_2 + \frac{3}{2}y_2z_1 \,. \end{aligned}$$

Et la matrice M associée est ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} .$$

Comme souvent, la matrice caractérise ce à quoi elle est associée.

Remarque 21.2.4. *Les termes non diagonaux de la matrice sont divisés par deux par rapport aux coefficients de la forme quadratique. Ils correspondent bien sûr exactement aux bons termes pour la forme bilinéaire symétrique associée.*

Lemme 21.2.5. *Soient deux vecteurs x et y de $\mathbb{E}$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbb{E}$.*

Alors : $B(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}x_iy_j = X^TMY$ où l'on a considéré les vecteurs $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ et $Y := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$.

Démonstration. Par définition, B est linéaire en la première coordonnée donc

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, y\right) = \sum_{i=1}^n x_iB(e_i,y)\,.$$

Puis, comme B est linéaire en la seconde coordonnée, on a

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^n x_iB(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jB(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}x_iy_j\,.$$

Enfin, le calcul matriciel nous donne immédiatement le résultat $X^TMY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}x_iy_j$.

□

21.2.2 Rang d'une forme bilinéaire symétrique

La matrice d'une forme bilinéaire symétrique dépend de la base choisie. Néanmoins, certains invariants permettent de s'affranchir de ce genre de considérations. Il en est ainsi pour le rang. On ne justifiera pas cette assertion.

Définition 21.2.6. *Soit B une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{E}$ associée à la forme quadratique q et à la matrice M. On appelle rang de B (ou rang de q) le rang de la matrice M, voir Définition 16.4.13.*

Remarque 21.2.7. *En particulier, on dit que q est non dégénérée si son rang est égal à n.*

Exemple 21.2.8. *On considère $q_1(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Il est immédiat que la matrice associée à q_1 est I_n, de rang n. Donc q_1 est non dégénérée.*

Exemple 21.2.9. *On considère $q_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$. La matrice associée à q_2 dans la base canonique est $M_2 = (m_{i,j})$ avec $m_{i,j} = 1$ pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$. Les n vecteurs colonnes sont identiques donc le rang est 1. En fait, en se plaçant dans la base $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ définie par $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$, $e'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$ et de manière générale $e'_i = e_i - e_1$ pour tout $i \in [\![2; n]\!]$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique, la matrice associée est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$*

21.2.3 Forme quadratique en somme de carrés

Théorème 21.2.10. *Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ avec $r = \mathrm{rg}(Q)$.*

Alors il existe r formes linéaires indépendantes (dont les noyaux respectifs sont en somme directe) $l_1, \cdots, l_r$ sur $\mathbb{E}$ et r réels non nuls $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ tels que

$$Q(x) = \alpha_1(l_1(x))^2 + \cdots + \alpha_r(l_r(x))^2 .$$

De plus, il existe une base de $\mathbb{E}$ pour laquelle la matrice associée à Q est diagonale et contient p fois le réel 1, q fois le réel -1 et $n - p - q$ fois le réel 0.

Ce théorème est admis.

Dans l'Exemple 21.2.9, on a un rang de 1 avec $\alpha_1 = 1$.

On peut aller un peu plus loin.

Théorème 21.2.11 (Théorème d'inertie de Sylvester)**.** *Le couple (p, q) ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle alors la signature de q. De plus,* $\mathrm{rg}(Q) = p + q$.

Ce théorème est admis.

21.3 Exercices

Exercice 1

On se donne la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire la forme quadratique associée à M sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit q l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q(A) := \mathrm{Tr}(A^2) + (\mathrm{Tr}(A))^2$. Montrer que q est une forme quadratique.

Chapitre 22

Espaces Euclidiens

Dans ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$. En effet, le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$ sera étudié dans le suivant sur les espaces hermitiens, à la page 263.

22.1 Espaces préhilbertiens réels

22.1.1 Produit scalaire

Définition 22.1.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur $\mathbb{E}$ toute application φ de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ avec $\varphi(x, y) = \langle x; y \rangle$ telle que*

- *φ est symétrique : $\langle x; y \rangle = \langle y; x \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{E}$.*
- *φ est bilinéaire : $\langle \lambda x_1 + x_2; y \rangle = \lambda \langle x_1; y \rangle + \langle x_2; y \rangle$ et $\langle x; \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x; y_1 \rangle + \langle x; y_2 \rangle$ pour tous $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *φ est définie positive : $\langle x; x \rangle \geq 0$. De plus, $\langle x; x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Remarque 22.1.2. *Ainsi, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.*

Définition 22.1.3. *On note $||x|| := \sqrt{\langle x; x \rangle}$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.*

Définition 22.1.4. *L'espace vectoriel $\mathbb{E}$ muni du produit scalaire φ est appelé un espace préhilbertien réel.*

Remarque 22.1.5. *Cela revient ici à associer une topologie particulière à l'espace vectoriel $\mathbb{E}$. Nous aborderons plus en détails la topologie dans la Partie VII.*

22.1.1.1 Exemples

Exemple 22.1.6. *On pose $\mathbb{E} := \mathbb{R}^n$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x; y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Alors $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.*

Exemple 22.1.7. *On pose $\mathbb{E} := \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et pour tous $f, g \in \mathbb{E}$, $\langle f; g \rangle := \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Alors $||f|| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t}$.*

Exemple 22.1.8. *On pose* $\mathbb{E} := \mathbb{R}[X]$. $P(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ *(avec seul un nombre fini de* a_i *non nuls). De même,* $Q(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i X^i$*. On considère alors le produit scalaire* $\langle P; Q\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i$*. La norme associée est* $||P|| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2}$.

22.1.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\mathbb{E}$ un espace préhilbertien réel avec le produit scalaire $\langle .; .\rangle$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{E}$: $\langle x; y\rangle^2 \leq ||x||^2||y||^2$. De plus, l'égalité n'est satisfaite que si la famille $\{x, y\}$ est liée.

22.1.1.3 Relation entre norme et produit scalaire

D'abord, on peut remarquer que l'application $x \mapsto ||x||$ est bien une norme sur $\mathbb{E}$, la notion de norme étant introduite dans la Définition 37.1.1.

Enfin, comme dans le cas des formes qudratiques, la norme se déduit du produit scalaire et réciproquement :

$$\langle x; y\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) .$$

22.1.2 Orthogonalité

Définition 22.1.9. *Un vecteur* x *de* $\mathbb{E}$ *est dit unitaire si* $||x|| = 1$.

Définition 22.1.10. *Deux vecteurs* x *et* y *de* $\mathbb{E}$ *sont orthogonaux si* $\langle x; y\rangle = 0$.

Définition 22.1.11. *Une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de* $\mathbb{E}$ *est dite orthogonale si pour tous* $i, j \in I$ *avec* $i \neq j$*, on a* $\langle x_i; x_j\rangle = 0$

Proposition 22.1.12. *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Démonstration. Soit en effet une famille orthogonale $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \neq 0$ pour tout $i \in I$. Supposons que l'on ait

$$\lambda_1 x_{i_1} + \cdots + \lambda_p x_{i_p} = 0 .$$

On prend le produit scalaire avec x_{i_k} où $k \in [\![1; p]\!]$ et l'on obtient

$$\lambda_1 \langle x_{i_1}; x_{i_k}\rangle + \cdots + \left\langle x_{i_p}; x_{i_k}\right\rangle = 0 .$$

Comme la famille est orthogonale, $\langle x_{i_l}; x_{i_k}\rangle = 0$ pour tout $l \in [\![1; p]\!]$ avec $l \neq k$. Il vient

$$\lambda_k \langle x_{i_k}; x_{i_k}\rangle = 0 .$$

Or, $x_{i_k} \neq 0$ donc $\langle x_{i_k}; x_{i_k}\rangle > 0$. On en déduit $\lambda_k = 0$.

Le raisonnement est valable pour tout $k \in [\![1; p]\!]$ donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ ce qui achève de prouver que la famille est libre.

□

Proposition 22.1.13. *Pour toute famille orthogonale $(x_i)_{i\in I}$, on a la relation de Pythagore :*

$$\left|\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_p}\right|\right|^2=||x_{i_1}||^2+\cdots+\left|\left|x_{i_p}\right|\right|^2 .$$

Démonstration. On peut écrire en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\left|\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_p}\right|\right|^2=\sum_{l=1}^{p}\sum_{r=1}^{p}\langle x_{i_l};x_{i_r}\rangle .$$

Or, si $l\neq r$, comme la famille est orthogonale, il vient $\langle x_{i_l};x_{i_r}\rangle=0$ d'où les seuls termes qui ne s'annulent pas sont les termes diagonaux. La preuve est ainsi achevée.

□

Définition 22.1.14. *La famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires.*

Remarque 22.1.15. *Toute famille orthonormale est libre. Mais, elle n'est pas forcément une base.*

22.1.3 Sous-espaces orthogonaux

Définition 22.1.16. *Deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ de l'espace préhilbertien réel $\mathbb{E}$ sont dits orthogonaux si pour tout $(x,y)\in\mathbb{F}\times\mathbb{G}$, $\langle x;y\rangle=0$.*

Remarque 22.1.17. *Si les espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont orthogonaux, alors immédiatement $\mathbb{F}\bigcap\mathbb{G}=\{0\}$.*

Démonstration. D'abord, $\mathbb{F}\bigcap\mathbb{G}$ est un espace vectoriel donc il contient 0. Ensuite, soit $x\in\mathbb{F}\bigcap\mathbb{G}$ quelconque. Comme $x\in\mathbb{F}$, x est orthogonal à tout élément de $\mathbb{G}$, en particulier à x qui appartient aussi à $\mathbb{G}$. Par conséquent : $\langle x;x\rangle=0$ d'où $x=0$ vu que le produit scalaire est défini positif. □

Définition 22.1.18. *Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. L'orthogonal de $\mathbb{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ défini par $\mathbb{F}^\perp:=\{y\in\mathbb{E}\ :\ \forall x\in\mathbb{F}\,,\langle x;y\rangle=0\}$.*

Remarque 22.1.19. *En dimension infinie, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\perp$ ne sont pas forcément supplémentaires.*

Contre-exemple 22.1.20. *On considère $\mathbb{E}:=\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ muni de $\langle f;g\rangle:=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.*

On se donne $\mathbb{F}:=\{f\in\mathbb{E}\ :\ f(0)=0\}$. $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Soit $f\in\mathbb{F}^\perp$. Alors, pour tout $g\in\mathbb{F}$, on a $\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t=0$. Posons $g(t):=tf(t)$. On a bien $g\in\mathbb{F}$ et l'on en déduit $\int_0^1 tf(t)^2\mathrm{d}t$. Or, la fonction $t\mapsto tf(t)^2$ est continue et positive sur $[0;1]$ donc comme son intégrale y est nulle, on en déduit $f(t)=0$ pour tout $t\neq 0$ puis par continuité $f(0)=0$. Ainsi, f est identiquement nulle. Il vient $\mathbb{F}^\perp=\{0\}$. Pourtant, $\mathbb{F}^\perp$ n'est pas le supplémentaire dans $\mathbb{E}$ de $\mathbb{F}$ vu que $\mathbb{F}\neq\mathbb{E}$.

Définition 22.1.21. *Deux sous-espaces vectoriel* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *sont dits supplémentaires orthogonaux si* $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ *et* $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\perp}$*.*

Remarque 22.1.22. *Si l'on dispose de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, alors on peut définir la projection orthogonale sur* $\mathbb{F}$ *parallèlement à* $\mathbb{F}^{\perp}$*.*

22.2 Espaces euclidiens

Définition 22.2.1. *Un espace euclidien est un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension finie.*

Théorème 22.2.2. *Soit un espace euclidien* $\mathbb{E}$*. Alors, toute forme linéaire* f *sur* $\mathbb{E}$ *peut être représentée de manière unique comme suit :*

$$f(x) = \langle x; a \rangle \ ,$$

où $a \in \mathbb{E}$*.*

Remarque 22.2.3. *On en déduit qu'il existe un isomorphisme canonique entre* $\mathbb{E}$ *et son dual (le dual de* $\mathbb{E}$ *étant l'ensemble des formes linéaires sur* $\mathbb{E}$*).*

Théorème 22.2.4. *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace préhilbertien réel de dimension finie ou infinie. Soit* $\mathbb{F}$ *un sous-espace vectoriel de dimension* finie*. Alors, l'orthogonale de* $\mathbb{F}$*, noté* $\mathbb{F}^{\perp}$ *est un supplémentaire de* $\mathbb{F}$ *dans* $\mathbb{E}$*.*

On en déduit que tout élement x *de* $\mathbb{E}$ *admet un projeté orthogonal* $p_{\mathbb{F}}(x)$ *sur* $\mathbb{F}$*. Et, si* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est une base orthonormale de* $\mathbb{F}$*, alors* $p_{\mathbb{F}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i \rangle \, e_i$*.*

Le théorème est admis. Il convient de comprendre que ceci est à la base des séries de Fourier (dans le cas d'une décomposition à l'aide de sinus et de cosinus).

22.3 Exercices

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{E} := \mathbb{R}_n[X]$ la forme bilinéaire symétrique $\langle P; Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\mathbb{E}$ est un espace euclidien.

2. Soit $\mathcal{K}$ l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et soit $P \in \mathcal{K}$ non nul. Quel est le degré de P ?

Exercice 2

Soit $\mathbb{E} := \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Pour tous $f, g \in \mathbb{E}$, on pose $(f \mid g) := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

2. Soit $\mathcal{F} := \{h \in \mathcal{C}^2([0;1], \mathbb{R}) \ : \ h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0\}$. Trouver

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0;1], \mathbb{R}) \ : \ (f \mid h) = 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{F} \right\} .$$

Chapitre 23

Espaces Hermitiens

Dans ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{C}$.

Remarque 23.0.1. *Si z est un complexe, z^2 n'est pas forcément un réel positif. Par exemple, $i^2 = -1 < 0$. Et, $(1+i)^2 = 2i$ n'est même pas un réel. Ainsi, pour obtenir un nombre réel positif, on prend plutôt le module au carré de z : $|z|^2$. On rappelle par ailleurs que $|z|^2 = zz^*$ où z^* est le conjugué de z.*

23.1 Espaces préhilbertiens complexes

23.1.1 Produit scalaire complexe

Définition 23.1.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire sur $\mathbb{E}$ toute application φ de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$ avec $\varphi(x,y) = \langle x;y \rangle$ vérifiant les propriétés :*

- *φ est hermitienne : $\langle y;x \rangle = \overline{\langle x;y \rangle}$ pour tous $x, y \in \mathbb{C}$.*
- *φ est linéaire à droite : $\langle x; \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x; y_1 \rangle + \langle x; y_2 \rangle$ pour tous $x, y_1, y_2 \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*
- *φ est semi-linéaire à gauche : $\langle \lambda x_1 + x_2; y \rangle = \overline{\lambda} \langle x_1; y \rangle + \langle x_2; y \rangle$ pour tous $x_1, x_2, y \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*
- *φ est définie positive : $\langle x;x \rangle \in \mathbb{R}_+$ et $\langle x;x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Remarque 23.1.2. *À proprement parler, φ n'est pas bilinéaire. On dira qu'elle est sesquilinéaire.*

Notation 23.1.3. *On pose $||x|| := \sqrt{\langle x;x \rangle}$.*

Définition 23.1.4. *L'espace vectoriel complexe $\mathbb{E}$ muni de ce produit scalaire est dit préhilbertien complexe.*

23.1.2 Exemples

Exemple 23.1.5. *$\mathbb{C}$ est un espace préhilbertien complexe quand on le munit du produit scalaire $\langle x;y \rangle := x^* y$. La norme associée est alors $||x|| = |x|$ où $|x|$ désigne le module de x.*

Exemple 23.1.6. *Sur $\mathbb{C}^n$, on utilise le produit scalaire $\langle x; y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$. La norme associée est alors $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.*

Exemple 23.1.7. *On considère ici l'espace l_2 des suites complexes de carré commable c'est-à-dire l'ensemble des suites u telles que $\sum_{n=0}^\infty |u_n|^2 < +\infty$. On pose alors $\langle u; v\rangle := \sum_{n=0}^\infty u_n^* v_n$. La norme associée est $||u|| := \sqrt{\sum_{n=0}^\infty |u_n|^2}$.*

Exemple 23.1.8. *Sur l'espace $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$ des fonctions continues de $[a;b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ dans $\mathbb{C}$, on se donne le produit scalaire $\langle f; g\rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\mathrm{d}t$.*

La norme associée est $||f|| := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$.

Exercice 23.1.9. *Vérifier que l'Exemple 23.1.8 correspond bien à un produit scalaire.*

Le prochain exemple a un intérêt crucial pour la décomposition en série de Fourier, voir le Chapitre 34.

Exemple 23.1.10. *On se donne $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodiques. On pose alors $\langle f; g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\mathrm{d}t$.*

Remarque 23.1.11. *La renormalisation dans l'Exemple 23.1.10 sert à simplifier les calculs par la suite.*

Exercice 23.1.12. *Vérifier que l'Exemple 23.1.10 correspond bien à un produit scalaire.*

23.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 23.1.13. *Pour tous éléments x et y d'un espace préhilbertien complexe $\mathbb{E}$, on a $|\langle x; y\rangle|^2 \leq ||x||^2||y||^2$, l'égalité n'étant réalisée que si les vecteurs x et y sont liés.*

Démonstration. Si $\langle x; y\rangle = 0$, c'est évident puisque l'inégalité est immédiate et que l'on a égalité si au moins un des deux vecteurs est nul (ce qui implique que x et y sont liés). Supposons dorénavant $\langle x; y\rangle \neq 0$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle x + \lambda y; x + \lambda y\rangle = ||x + \lambda y||^2 \geq 0\,.$$

En utilisant la sesquilinéarité, il vient

$$||x||^2 + \lambda\,\langle x; y\rangle + \overline{\lambda \langle x; y\rangle} + |\lambda|^2||y||^2 \geq 0\,.$$

En particulier, si $\lambda = \rho\frac{\overline{\langle x;y\rangle}}{|\langle x;y\rangle|}$ où ρ est un réel, on obtient pour tout ρ réel :

$$||x||^2 + 2\rho\,|\langle x; y\rangle| + \rho^2||y||^2 \geq 0\,.$$

Le discriminant est donc négatif c'est-à-dire que l'on a $4\,|\langle x; y\rangle|^2 \leq 4||x||^2||y||^2$ ce qui donne l'inégalité demandée.

Et, l'égalité n'est obtenue que s'il existe $\rho_0 \in \mathbb{R}$ tel que $||x||^2 + 2\rho_0 |\langle x; y\rangle| + \rho_0^2||y||^2 = 0$. Ceci implique que l'on a $||x + \lambda y||^2 = 0$ où $\lambda = \rho_0 \frac{\overline{\langle x;y\rangle}}{|\langle x;y\rangle|}$. Comme le produit scalaire est définie positif, on en déduit $x + \lambda y = 0$ c'est-à-dire que x et y sont liés.

□

Corollaire 23.1.14 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, on a $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.*

Démonstration. En développant :

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle x; y\rangle\right) \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2\left|\langle x; y\rangle\right| \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| \\ &= \left(||x|| + ||y||\right)^2 . \end{aligned}$$

□

On en déduit que l'application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto ||x||$ est une norme sur $\mathbb{E}$. Cette norme est associée au produit scalaire φ.

23.1.4 Relations entre produit scalaire et norme

On a

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle x; y\rangle\right) ,$$

ainsi que

$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\mathrm{Re}\left(\langle x; y\rangle\right) .$$

On en déduit par ailleurs l'identité du parallélogramme :

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right) .$$

23.1.5 Orthogonalité

Définition 23.1.15. *Soit $u \in \mathbb{E}$. On dit que u est unitaire si $||u|| = 1$.*

Proposition 23.1.16. *On dispose de la relation $||x|| = \sup_{||y||\leq 1} |\langle x; y\rangle|$.*

Démonstration. Si $x = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons dorénavant que x est non nul. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique immédiatement que pour tout y de norme inférieure ou égale à 1, on a $|\langle x; y\rangle| \leq ||x|| \times ||y|| \leq ||x||$. Ainsi, il vient $||x|| \geq \sup_{||y||\leq 1} |\langle x; y\rangle|$. Puis, en posant $y := \frac{x}{||x||}$, on a bien $||y|| = 1$ et $|\langle x; y\rangle| = \frac{||x||^2}{||x||} = ||x||$. Ainsi, $||x|| \leq \sup_{||y||\leq 1} |\langle x; y\rangle|$. La preuve est alors achevée.

□

Définition 23.1.17. *Les vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x; y\rangle = 0$.*

Définition 23.1.18. *La famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux.*

On dispose de propriétés similaires à celles sur les espaces préhilbertiens réels.

Proposition 23.1.19. *Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.*

Proposition 23.1.20. *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille orthogonale finie. Alors, elle vérifie la relation de Pythagore : $||\sum_{k=1}^n e_k||^2 = \sum_{k=1}^n ||e_k||^2$.*

Définition 23.1.21. *Une famille orthonormale est une famille orthogonale composée de vecteurs unitaires.*

Exemple 23.1.22. *On reprend l'Exemple 23.1.10. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n(t) := \exp(int)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.*

En effet : $||e_n||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} \times e^{int}\mathrm{d}t = 1$ et si $p \neq n$, on a

$$\begin{aligned}\langle e_n; e_p\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} \times e^{ipt}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(p-n)}[1-1]\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Il convient de noter que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une base orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Néanmoins, elle jouera un rôle primordial dans le chapitre sur les séries de Fourier à la page 385. En effet, elle en est une **base de Hilbert** *(une base de Hilbert n'est pas une base au sens des espaces vectoriels).*

On a des définitions similaires à celles que l'on avait dans le cas des espaces préhilbertiens réels.

Définition 23.1.23. *$\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ étant deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$, on dit que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont orthogonaux si $\langle x; y\rangle = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}$.*

Remarque 23.1.24. *Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont orthogonaux, alors $\mathbb{F} \bigcap \mathbb{G} = \{0\}$.*

Définition 23.1.25. *L'orthogonal de $\mathbb{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ défini par $\mathbb{F}^\perp := \{y \in \mathbb{E} \ : \ \forall x \in \mathbb{F}, \langle x; y\rangle = 0\}$.*

Remarque 23.1.26. *$\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\perp$ ne sont pas forcément supplémentaires si $\mathbb{F}$ est de dimension infinie.*

Définition 23.1.27. *$\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires orthogonaux si $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ et si $\mathbb{G} = \mathbb{F}^\perp$. Dans ce cas, on peut définir la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.*

Il convient de comprendre que toute la théorie sur les séries de Fourier (Chapitre 34) consiste en une projection orthogonale.

23.2 Espaces vectoriels hermitiens

23.2.1 Généralités

Définition 23.2.1. *Un espace hermitien est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.*

Théorème 23.2.2. *Soit un espace hermitien $\mathbb{E}$. Alors, toute forme linéaire f sur $\mathbb{E}$ (application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$) peut être représentée de manière unique comme suit :*

$$f(x) = \langle x; a \rangle \ ,$$

où $a \in \mathbb{E}$.

Remarque 23.2.3. *On en déduit qu'il existe un isomorphisme canonique entre $\mathbb{E}$ et son dual (le dual de $\mathbb{E}$ étant l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{E}$).*

Bien sûr, ceci n'est plus vrai en dimension infinie. On aimerait que cela soit vrai et ceci motive les espaces de Hilbert de dimension infinie.

23.2.2 Projection orthogonale

Théorème 23.2.4. *Dans un espace préhilbertien complexe (qu'il soit de dimension finie ou non), tout sous-espace vectoriel $\mathbb{F}$ de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal $\mathbb{F}^{\perp}$.*

On admet le théorème.

Corollaire 23.2.5. *Tout vecteur x de $\mathbb{E}$ admet une projection orthogonale sur $\mathbb{F}$ (de dimension finie) notée $p_{\mathbb{F}}(x)$. Si de plus $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{F}$, on a $p_{\mathbb{F}}(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j; x \rangle \, e_j$. On en déduit de plus la distance de $x \in \mathbb{E}$ à $\mathbb{F}$: $\mathrm{d}\,(x, \mathbb{F}) = ||x - p_{\mathbb{F}}(x)||$. Il en découle $||x||^2 = ||p_{\mathbb{F}}(x)||^2 + ||x - p_{\mathbb{F}}(x)||^2$ d'où l'inégalité de Bessel : $\sum_{j=1}^{n} |\langle e_j; x \rangle|^2 \leq ||x||^2$.*

23.3 Exercice

On définit l'application ψ de $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}$ comme suit :

$$\psi(P, Q) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) \overline{Q(e^{i\theta})} \mathrm{d}\theta \, .$$

1. Démontrer que ψ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Démontrer que $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire ψ.
3. Soit $Q(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Calculer $\psi(Q, Q)$.

Sixième partie

Analyse

Chapitre 24

Introduction

La nécessité de faire de l'analyse dans un cours de remise à niveau en début de cursus d'école d'ingénieurs ne saurait être remise en cause. Il va donc de soi que cette partie s'imposait d'elle-même.

24.1 Intérêt

Dès que l'on parle de mathématiques appliquées, on pense en fait à l'analyse, au sens le plus large possible. L'analyse est en quelque sorte l'art de tout faire tendre vers l'infini, ou vers zéro, ce qui paradoxalement, revient au même. Mais comment fait-on tendre vers l'infini (ou vers zéro) ? Ceci est l'objet de la partie sur la topologie que nous avons volontairement exfiltrée de cette partie réservée exclusivement aux notions les plus classiques d'analyse. Également, la partie est déjà assez énorme comme cela sans que l'on rajoute en plus la topologie.

Par ailleurs, nous avons voulu les séparer car l'intérêt de cette partie d'analyse est incomparable avec l'intérêt que présente la septième partie (topologie). On peut dire que dans ce cours, la topologie est un petit o de l'analyse ; ce qui ferait sans doute s'offusquer les experts en topologie s'ils nous lisaient.

Plutôt que de parler de l'intérêt général de l'analyse à travers ses très diverses ramifications en mathématiques et au-delà, nous allons nous contenter d'esquisser leur intérêt pratique dans le tronc commun à Télécom ; et nous ne doutons pas une seule seconde que cela s'applique aux autres écoles d'ingénieurs.

D'abord, en cours de traitement du signal, la transformée en Z joue un rôle particulier. Or, la transformée en Z consiste à associer une série de fonctions à une suite numérique. Déjà, il faut donc bien comprendre ce qu'est une suite numérique. Également, savoir ce qu'est une série de fonctions est essentiel. Soyons clairs : nous ne prétendons pas qu'une connaissance fine des théorèmes sur les séries de fonctions soit cruciale. Non. Nous prétendons plutôt que si l'on découvre le concept de séries de fonctions alors même qu'on démarre une nouvelle science (le traitement du signal), on part avec un grand désavantage par rapport à ceux qui sont familiers avec ce concept. De la même manière, les séries entières sont assez proches des séries obtenues par la transformée en Z. De fait, leur étude n'en est que plus pertinente.

Ensuite, la base de la théorie des distributions consiste en la convergence uniforme d'une suite de fonctions (et de ses dérivées). Donc, il est crucial de savoir ce qu'est la convergence uniforme de même qu'il est crucial d'avoir déjà touché même si ce n'est qu'un peu au concept de suites de fonctions.

On peut encore citer la convergence en loi, en probabilités comme domaine d'application de la convergence dite simple d'une suite de fonctions. On pense notamment au théorème de continuité de Lévy, à la convergence de la fonction de répartition, de la fonction de densité...

Ensuite, il est difficile d'intuiter le comportement des séries de fonctions si l'on n'a pas saisi au préalable celui des séries numériques, lesquelles recquièrent par ailleurs de bien comprendre ce qu'est une suite numérique.

Au-delà de cela, dans des matières moins connexes, la dérivation est centrale. S'il n'y a pas de dérivée, on ne peut pas optimiser ce qui réduit les champs des possibles en recherche opérationnelle. On pense aussi à la physique où l'on retrouve la notion de dérivée partielle, voir par exemple les équations de Maxwell dans le vide.

Bien entendu, l'intégration est l'un des personnages principaux en électromagnétisme comme en optique. En fait, ne pas comprendre le calcul intégral peut vous assurer de ne rien comprendre aux distributions. Vous n'avez donc pas le choix : le calcul des dérivées comme celui des intégrales n'est pas une option.

Autre exemple d'application : la transformée de Fourier (qui repose sur l'intégration soit dit en passant) a des idées similaires à celles de la série de Fourier puisqu'il s'agit de la décomposition orthogonale d'un signal.

Enfin, la notion d'équations différentielles est d'une grande utilité en physique comme en électronique ou en traitement du signal.

À bien des égards, cette partie est donc la plus importante de tout le cours.

24.2 Objectifs

Les objectifs sont multiples et dépendent du lecteur.

Pour le lecteur avisé, typiquement issu de classes préparatoires, cette partie constitue une sorte de bible sur laquelle s'adosser en cas d'oubli malencontreux. Par ailleurs, les séries de Fourier ne sont plus étudiées en CPGE donc le chapitre numéro trente-quatre relève du hors programme. Néanmoins, il n'en est pas moins primordial pour ce public.

Pour le lecteur moins aguerri, il convient de garder à l'esprit que deux années de prépa en analyse ne peuvent se rattraper simplement par la lecture d'un livre. Ainsi, l'objectif est avant tout de donner une intuition des concepts primordiaux. Également, l'un des objectifs est de faire sentir aux étudiants les éléments manquants dans leurs formations antérieures pour qu'ils puissent travailler d'eux-mêmes sur les points où ils ressentent des lacunes. Nous doutons que le fameux “pour tout epsilon, il existe” rencontre un grand succès. En effet, bien qu’il y ait de nombreuses démonstrations élémentaires, il faut vraiment en manger énormément pour en apprécier la saveur. Toutefois, nous souhaitons que l’étudiant puisse découvrir qu’il y a une raison à des théorèmes évidents (par exemple : la limite de la somme est la somme des limites).

Nous insistons bien sûr pour que l’étudiant qui vient de DUT se concentre sur les aspects les plus pratiques : la dérivation des fonctions, l’intégration des fonctions, les développements limités, la résolution des équations différentielles. Les concepts les plus surprenants comme les suites et séries de fonctions (auxquelles on rajoute les séries entières et les séries de Fourier) doivent être vus et étudiés sans pour autant qu’il n’y ait un acharnement pour en comprendre les idées les plus fines. Seules les grandes idées sous-jacentes seront importantes.

24.3 Prérequis

Il serait appréciable que la première partie sur les rappels et fondamentaux ait été lue avant que cette partie ne soit attaquée. Il en est de même avec la partie sur la trigonométrie et les nombres complexes. Il n’y a pas d’autres prérequis si ce n’est d’avoir des bases normalement acquises en Terminale.

24.4 Organisation

Dans ce paragraphe, nous présentons les divers chapitres qui composent cette partie conséquente sur l’analsye.

24.4.1 Suites numériques

On commence par donner la topologie que l’on considère à savoir par rappeler ce qu’est la valeur absolue d’un réel. La partie entière est également rappelée. On parle ensuite des bornes supérieure et inférieure d’un ensemble ; ce qui étend la notion de maximum et de minimum. Puis, l’on présente les propriétés élémentaires des suites (bornitude, monotonie...). Par la suite, nous introduisons la notion de limite avec la formulation “pour tout epsilon, il existe”. Les propriétés élémentaires qui en découlent sont données et démontrées. Enfin, nous donnons des exemples de suites particulières.

24.4.2 Fonctions de la variable réelle : limites et continuité

Dans le deuxième chapitre de cette partie, nous regardons maintenant des fonctions réelles de la variable réelle. Nous les regardons sous le prisme de la limite. Autant que possible, nous nous ramenons au chapitre précédent grâce à la caractérisation séquentielle de la limite. Nous établissons ensuite des limites plus délicates puisque nous regardons aussi le voisinage de l'infini (que ce soit en tant que limite infinie ou en tant que point où l'on y regarde la limite).

Dans une deuxième section, nous nous intéressons à la continuité et nous établissons les théorèmes cruciaux comme le théorème des valeurs intermédiaires. Pour finir, nous abordons la dimension supérieure, laquelle est plus délicate.

24.4.3 Fonctions de la variable réelle : dérivation

Nous allons encore plus loin cette fois avec la notion de dérivée en un point puis de fonction dérivée si celle-ci existe. À nouveau, nous démontrons tout ce que l'on avance autant que possible. Les dérivées usuelles sont aussi données.

Suite à cela, on regarde les dérivées d'ordre supérieur c'est-à-dire les dérivées des dérivées. Plus tard, la formule de Taylor-Lagrange est donnée. À nouveau, nous abordons la dimension supérieure et donc nous introduisons les dérivées partielles.

24.4.4 Développements limités

Les développements limités permettent de déterminer des limites qui ont *a priori* des formes indéterminées. C'est également l'occasion d'introduire la notation de Landau, le fameux petit o. Grâce à cela, on peut donner la formule de Taylor-Young et des propriétés élémentaires. Les développements limités usuels sont donnés puis démontrés.

24.4.5 Calcul intégral

Dans ce chapitre, nous adoptons une position qui va légèrement à l'encontre de la philosophie habituelle du document : nous prenons un angle d'attaque très théorique. Nous montrons comment est construite l'intégrale de Riemann. Ainsi, certaines sections peuvent ne pas être lues en première lecture. Néanmoins, nous insistons pour que tous finissent par les lire entièrement. En effet, la linéarité de l'intégrale étant capitale en théorie des distributions, il est appréciable de comprendre pourquoi. Le pourquoi est lié à la construction de l'intégrale.

Les propriétés élémentaires sont données et pour la plupart elles sont démontrées. Également, on aborde la méthode des rectangles avec la somme de Riemann. Notons que nous avons choisi de ne pas aborder la méthode des trapèzes.

Par la suite, les méthodes classiques pour calculer les intégrales sont données : l'intégration par parties et le changement de variable. Ces deux techniques ne sont pas optionnelles. Ne pas comprendre l'intégration par parties est le moyen le plus sûr de ne rien comprendre aux distributions. Les règles de Bioche sont également fournies.

Puis, nous parlons des intégrales généralisées (en l'infini ou en un point où la fonction n'est pas bornée) et pour préparer le terrain au cours sur les distributions, nous donnons la définition de la valeur principale de Cauchy.

Enfin, nous présentons très brièvement et sans rigueur l'intégrale au sens de Lebesgue et les espaces d'intérêt.

24.4.6 Séries numériques

Dans ce chapitre, nous présentons les séries de termes positifs puis nous généralisons à des séries de réels quelconques.

24.4.7 Familles sommables

Dans le chapitre précédent, on somme avec $\mathbb{N}$ pour ensemble de sommation. On généralise ici à une famille indexée par un ensemble dénombrable quelconque. Il convient de noter que ce chapitre présente un intérêt crucial dès que l'on regarde des variables aléatoires discrètes (et l'espérance de celles-ci).

24.4.8 Suites et séries de fonctions

Ce chapitre présente un saut conceptuel certain par rapport aux précédents. En effet, ce n'est plus une suite ou une série de nombres qui converge. C'est une suite ou une série de fonctions. Il est très important d'avoir été familiarisé avec cette idée. On présente notamment la convergence simple, la convergence uniforme et la convergence absolue (que les enseignants de CPGE appellent convergence normale).

24.4.9 Séries entières

Une série entière est une série de fonctions polynomiales. Ce type de série a des propriétés particulières et intéressantes.

24.4.10 Séries de Fourier

Dans ce chapitre, on donne un cas particulier de transformée de Fourier : on l'applique à un signal périodique. Ce chapitre est très clairement hors programme. Néanmoins, nous ne nous satisfaisons pas qu'il ne soit plus au programme. Par conséquent, ce chapitre a toute sa place dans cet ouvrage. Une série de Fourier est une série de fonctions faisant intervenir des sinus et des cosinus. On donne en particulier le point de vue de la projection orthogonale.

24.4.11 Équations différentielles

Nous terminons cette partie par un chapitre sur les équations différentielles : linéaires ou non, du premier ou du deuxième ordre, avec des coefficients constants ou non. Nous donnons aussi les méthodes de résolution, quand on peut résoudre. Également, nous brisons tout espoir à qui pense que tout peut se résoudre en mathématiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas ; comme on peut l'établir en utilisant la théorie de Galois différentielle.

Chapitre 25

Suites numériques

25.1 Rappels

Nous commençons ce chapitre par quelques rappels fondamentaux.

25.1.1 Ensembles

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, celui des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et celui des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Enfin, l'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque 25.1.1. *On a* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 25.1.2. *Le nombre* $\sqrt{2}$ *est réel mais n'est pas rationnel.*

Le nombre $\frac{2}{3}$ *est rationnel mais n'est pas relatif.*

Le nombre -3 *est relatif mais n'est pas naturel.*

On parlera aussi brièvement des suites de nombres complexes donc on rappelle que l'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$ et que $i \in \mathbb{C}$ mais $i \notin \mathbb{R}$, où $i^2 = -1$.

25.1.2 Valeur absolue

La notion de valeur absolue est cruciale car elle représente, dans le cadre de l'espace vectoriel réel de dimension un la norme la plus simple. En d'autres termes, c'est la valeur absolue qui quantifie à quel point un nombre est proche de zéro.

Définition 25.1.3. *Soit* x *un nombre réel. Alors, la valeur absolue de* x*, que l'on note* $|x|$ *est définie comme étant* x *si* $x \geq 0$ *et* $-x$ *si* $x \leq 0$.

Exemple 25.1.4. *La valeur absolue de* 2 *est* 2 *tandis que celle de* -3 *est* 3.

Donnons les propriétés de la valeur absolue.

Proposition 25.1.5. *D'abord,* $|x| \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Ensuite,* $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

Démonstration. En effet, si $x > 0$, alors $|x| = x > 0$. Et, si $x < 0$, $|x| = -x > 0$. Dans tous les cas, si $x \neq 0$, alors $|x| > 0$. Puis, 0 étant supérieur à 0, on a $|0| = 0$. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. Et, la valeur 0 n'est atteinte qu'en 0. $\square$

Remarque 25.1.6. *Cette propriété signifie, en des termes savants, que la topologie induite par la valeur absolue est séparée, voir la page 442.*

Proposition 25.1.7 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.*

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

- Si x et y sont tous deux positifs, on a $x + y \geq 0$ d'où $|x + y| = x + y = |x| + |y| \leq |x| + |y|$.
- Si x et y sont tous deux négatifs, on a $x + y \leq 0$ d'où $|x + y| = -x - y = |x| + |y| \leq |x| + |y|$.
- Supposons maintenant que l'un est positif tandis que l'autre est négatif. Sans rien changer à la généralité, on suppose que c'est x qui est positif tandis que y est négatif. De deux choses l'une :
  - Soit $|x| \leq |y|$ auquel cas : $x + y = |x| - |y| \leq 0$ d'où $|x + y| = -(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y| + |x| = |x| + |y|$.
  - Soit $|x| \geq |y|$ auquel cas : $x + y = |x| - |y| \geq 0$ d'où $|x + y| = |x| - |y| \leq |x| + |y|$.

$\square$

Proposition 25.1.8. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| = |x||y|$.*

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

Si x et y sont positifs, alors $xy \geq 0$ d'où $|xy| = xy = |x||y|$. Si x et y sont négatifs, alors $xy \geq 0$ d'où $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$. Si l'un est positif tandis que l'autre est négatif, et en supposant sans rien changer à la généralité que x est positif tandis que y est négatif, $xy \leq 0$ d'où $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. $\square$

La remarque suivante est particulièrement importante quand on étudie les fonctions de répartition en probabilités.

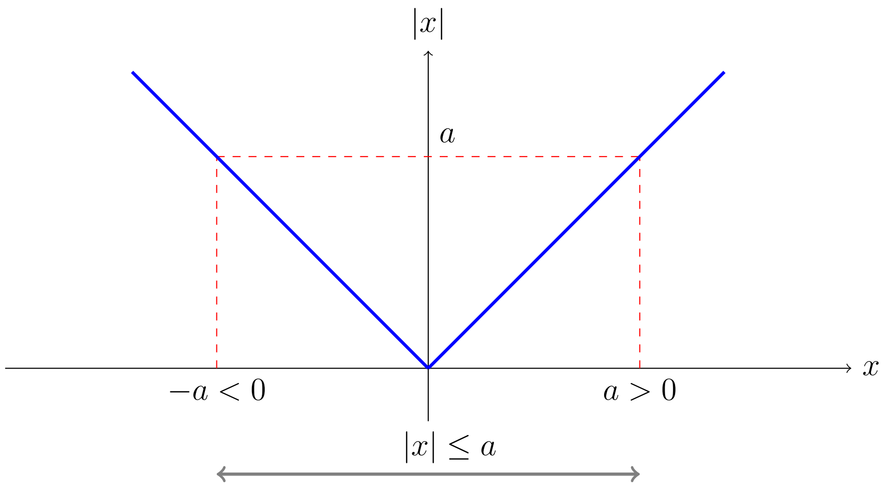
Remarque 25.1.9. *Soit $a > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a\,.$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que x est positif. Alors, $|x| = x$ d'où $x \leq a$ et comme x est positif, on a $-a \leq 0 \leq x \leq a$ d'où $-a \leq x \leq a$. Supposons maintenant que x est négatif. Alors $|x| = -x$ d'où $-x \leq a$ ce qui implique $x \geq -a$ et comme x est négatif, on a $x \leq 0 \leq a$ d'où $-a \leq x \leq a$. $\square$

Cette remarque s'illustre bien sur la représentation graphique suivante :

FIGURE 25.1 – Valeur absolue d'un réel



25.1.3 Partie entière

La notion de partie entière permet de discrétiser quand on se trouve face à des quantités continues par essence.

On la note généralement $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. Nous utiliserons la seconde notation, plus universelle.

Définition 25.1.10. *La partie entière de x est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

Exemple 25.1.11. *La partie entière de $\frac{1}{2}$ est 0. De même, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.*

Remarque 25.1.12 (Attention aux nombres négatifs)**.** *La partie entière de -2.5 n'est pas -2. On a en effet $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.*

25.2 Borne supérieure et borne inférieure

Introduisons quelques définitions.

Définition 25.2.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, on a $a \leq M$.*

Définition 25.2.2. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si elle admet un majorant.*

Exemple 25.2.3. *L'ensemble $A := \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ des entiers négatifs est majoré par 0 mais aussi par 12 ou $4\ 815\ 162\ 342$.*

De même :

Définition 25.2.4. *On dit que m est un minorant de $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$. On dit qu'une partie est minorée lorsqu'elle admet un minorant.*

Exemple 25.2.5. *L'ensemble des entiers positifs est minoré par $-\pi$ ou plus simplement par 0.*

Rien n'interdit à une partie A d'être à la fois majorée et minorée.

Définition 25.2.6. *Une partie à la fois majorée et minorée est dite bornée.*

Exemple 25.2.7. *L'ensemble $\{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ est majoré par 3 et il est minoré par -10 donc il est borné.*

Remarque 25.2.8. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a \in A$, on a $|a| \leq R$.*

Démonstration. Soit une partie A de $\mathbb{R}$ qui est bornée. Alors, il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in A$, on a $m \leq x \leq M$. En particulier, $M \leq |M|$ et $m \geq -|m|$ donc il vient $-|m| \leq x \leq |M|$. En posant $R := \max\{|m|; |M|\} \geq 0$, on en déduit $-R \leq -|m| \leq x \leq |M| \leq R$ d'où $|x| \leq R$. Réciproquement, s'il existe un tel R, alors A est minorée par $-R$ et majorée par R. $\square$

Définition 25.2.9. *On dit que M est le plus grand élément de A si $M \in A$ et si M est un majorant de A.*

Remarque 25.2.10. *Toute partie de A n'admet pas forcément de plus grand élément. Par exemple, $[0; 1[$ n'a pas de plus grand élément.*

Définition 25.2.11. *Le plus grand élément de $A \subset \mathbb{R}$, quand il existe, est noté* $\max A$.

Définition 25.2.12. *On dit que m est le plus petit élément de A si $m \in A$ et si m est un minorant de A.*

Remarque 25.2.13. *Toute partie de A n'admet pas forcément de plus petit élément. Par exemple, $]0; 1]$ n'a pas de plus petit élément.*

Définition 25.2.14. *Le plus petit élément de $A \subset \mathbb{R}$, quand il existe, est noté* $\min A$.

On voit ainsi que les notions de maximum et de mininimum ne s'appliquent pas à toute partie de $\mathbb{R}$. Il convient donc de palier à cette faiblesse et généralisant vers une notion plus riche (qui recouvre toutes les situations).

Définition 25.2.15 (Borne supérieure)**.** *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{M}_A$ l'ensemble de ses majorants. On appelle borne supérieure de A le plus petit élément de $\mathcal{M}_A$.*

Remarque 25.2.16. *On admet que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. En fait, c'est la caractérisation même de l'ensemble des réels. De plus, cette borne supérieure est unique.*

Notation 25.2.17. *La borne supérieure de A est notée* $\sup A$.

Définition 25.2.18 (Borne inférieure)**.** *Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$ et soit m_A l'ensemble de ses minorants. On appelle borne inférieure de A le plus grand élément de m_A.*

Remarque 25.2.19. *On admet que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. De plus, cette borne inférieure est unique.*

Notation 25.2.20. *La borne inférieure de A est notée* $\inf A$.

Remarque 25.2.21. *Si* $\sup A \in A$*, alors A admet un plus grand élément et il s'agit de* $\max A = \sup A$*. De même, si* $\inf A \in A$*, alors A admet un plus petit élément et il s'agit de* $\min A = \inf A$.

Donnons maintenant une caractérisation de la borne supérieure.

Proposition 25.2.22. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $M = \sup A$ si et seulement si*
- *M est un majorant de A : pour tout $a \in A$, $a \leq M$.*
- *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $M - \epsilon < a_\epsilon$.*

Le second point traduit le fait que M est le plus petit élément de $\mathcal{M}_A$.

Il convient de se familiariser dès que possible avec la tournure $\forall \epsilon > 0$, il existe. Elle revient sans cesse quand on fait de l'analyse.

Exemple 25.2.23. *Si l'on considère $A :=]0; 1]$ et $B := [0; 1[$, leur borne inférieure est 0 tandis que leur borne supérieure commune est 1.*

Donnons maintenant une caractérisation de la borne inférieure.

Proposition 25.2.24. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $m = \inf A$ si et seulement si*
- *M est un minorant de A : pour tout $a \in A$, $m \leq a$.*
- *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $a_\epsilon < m + \epsilon$.*

Le second point traduit le fait que m est le plus grand élément de m_A.

25.3 Suites de nombres réels

25.3.1 Définitions

Commençons par donner une définition rigoureuse d'une suite réelle.

Définition 25.3.1. *Une suite dans $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 25.3.2. *Une suite peut éventuellement ne pas commencer à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$ quelconque. On parlera quand même de suite.*

Exemple 25.3.3. *La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est appelée la suite harmonique.*

Définition 25.3.4. *Soit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$. Alors, u_{n_0} est le premier terme de la suite et on dira que u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.*

Remarque 25.3.5. *Il convient de bien savoir de quoi l'on parle. Ainsi, u_n est le terme général, pas la suite. C'est pourquoi parler de "la suite u_n" est totalement prohibé.*

Donnons quelques définitions concernant la majoration et la minoration.

Définition 25.3.6. *Une suite $(u_n)_n$ est dite majorée si l'ensemble*

$$A_u := \{u_n \ : \ n \geq n_0\}$$

est majoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 25.3.7. *La suite de terme général $-n^2 + 8n + 7$ est majorée.*

Définition 25.3.8. *Une suite $(u_n)_n$ est dite minorée si l'ensemble*

$$A_u := \{u_n \ : \ n \geq n_0\}$$

est minoré, c'est-à-dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 25.3.9. *La suite de terme général $n^3 - n^2 + 8n + 7$ est minorée.*

Définition 25.3.10. *Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée. Cela signifie qu'il existe $R \geq 0$ tel que $|u_n| \leq R$ pour tout $n \geq n_0$.*

Exemple 25.3.11. *La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est bornée.*

Parlons maintenant de monotonie.

Définition 25.3.12. *Une suite u est dite croissante si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.*

Exemple 25.3.13. *La suite de terme général $u_n := \exp\{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\}$ est croissante.*

Définition 25.3.14. *Une suite u est dite strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n < u_{n+1}$.*

Exemple 25.3.15. *La suite de terme général $u_n := \exp\{\frac{n}{3}\}$ est strictement croissante.*

Contre-exemple 25.3.16. *La suite définie dans l'Exemple 25.3.13 n'est pas strictement croissante car $u_3 = u_4 = u_5 = e$.*

Définition 25.3.17. *Une suite u est dite décroissante si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n+1}$.*

Exemple 25.3.18. *La suite de terme général $u_n := \exp\{-\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\}$ est décroissante.*

Définition 25.3.19. *Une suite u est dite strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n > u_{n+1}$.*

Exemple 25.3.20. *La suite de terme général $u_n := \exp\{-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$ est strictement décroissante.*

Contre-exemple 25.3.21. *La suite définie dans l'Exemple 25.3.18 n'est pas strictement décroissante car $u_3 = u_4 = u_5 = \frac{1}{e}$.*

Définition 25.3.22 (Monotonie)**.** *Une suite qui est croissante ou qui est décroissante est dite monotone.*

Remarque 25.3.23. *Une suite monotone n'est évidemment pas une suite tantôt croissante tantôt décroissante. Il ne faut pas intervertir les symboles $\forall$ et $\exists$.*

Contre-exemple 25.3.24. *La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ n'est ni croissante ni décroissante. De fait, elle n'est pas monotone.*

25.3.2 Convergence et divergence

La notion de convergence est centrale en analyse. Néanmoins, parler de “la notion de convergence” est un abus. Il n'y a en effet pas une seule convergence. C'est en fait la topologie qui définit la convergence. Cette topologie, approfondie dans le chapitre idoine à la page 441, peut dériver de normes différentes ou même carrément ne pas dériver d'une norme voire être totalement abstraite.

Dans le cas des réels, la topologie que l'on utilise est celle de la distance associée à la valeur absolue, qui est une norme.

Nous allons préciser ceci de manière totalement rigoureuse.

Définition 25.3.25. *On dit que la suite u est convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ qui satisfait*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N_\epsilon\,, \textit{on a } |u_n - l| < \epsilon\,. \tag{25.1}$$

Remarque 25.3.26. *La caractérisation* (25.1) *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N_\epsilon\,, \textit{on a } l - \epsilon < u_n < l + \epsilon\,. \tag{25.2}$$

Définition 25.3.27. *Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

On a l'habitude de parler de **la** limite. Toutefois, il faut d'abord prouver son unicité. Ceci est en effet lié au caractère séparé de la topologie, voir la page 442 pour une illustration.

Proposition 25.3.28. *Si la suite u est convergente vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et vers $l_2 \in \mathbb{R}$, alors $l_1 = l_2$.*

Démonstration. Supposons que l'on ait $l_1 \neq l_2$ alors $l_1 - l_2 \neq 0$ d'où $|l_1 - l_2| =: \rho > 0$. Prenons maintenant $\epsilon > 0$ tel que $2\epsilon < \rho$. Alors, on sait qu'il existe N_ϵ^1 (respectivement N_ϵ^2) tel que pour tout $n \geq N_\epsilon^1$ (respectivement $n \geq N_\epsilon^2$), on a $|u_n - l_1| < \epsilon$ (respectivement $|u_n - l_2| < \epsilon$). Or, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\begin{aligned} \rho = |l_1 - l_2| &= |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \\ &\leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \\ &< 2\epsilon < \rho\,, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Il s'ensuit que $l_1 = l_2$. □

On a donc bien l'unicité de la limite l si elle existe. Ainsi, on notera

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l\,.$$

Exemple 25.3.29. *La suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ *converge vers* 0.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Posons $N_\epsilon := \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$. Alors, $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon} > 0$. Puis, pour tout $n \geq N_\epsilon$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$. Par conséquent, on a bien $-\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon$ c'est-à-dire $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Il s'ensuit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

Montrons maintenant un petit résultat qui sert souvent pour montrer la robustesse du concept de limite.

Proposition 25.3.30. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit l la limite d'une suite u. Par définition, il existe $N_1 \geq 0$ tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - l| < 1$. L'inégalité triangulaire implique

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| < |l| + 1\,,$$

pour tout $n \geq N_1$. Puis, comme $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in [\![n_0; N_1]\!]$ et comme N_1 est fini, on en déduit l'existence de $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in [\![n_0; N_1]\!]$. Conséquemment, on a $|u_n| \leq M_0 := \max\{|l| + 1; M\}$ pour tout $n \geq n_0$ ce qui prouve que la suite est bien bornée. □

De nombreuses suites peuvent être obtenues en prenant des suites classiques que l'on additionne, multiplie entre elles ou par un scalaire, que l'on quotiente... Ainsi, pour que la notion de limite ait une quelconque valeur, il faut qu'elle soit robuste vis à vis de ces opérations.

C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 25.3.31. *Soient* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *deux suites réelles. On suppose que l'on a*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = l_2\,.$$

Alors, on dispose des convergences suivantes.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$.
- *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n = al_1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l_1 l_2$.
- *Si de plus* $v_n \neq 0$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et si* $l_2 \neq 0$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Démonstration. **1.** Soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe des entiers N_ϵ^1 et N_ϵ^2 plus grands que n_0 tels que pour tout $n \geq N_\epsilon^1$ (respectivement $n \geq N_\epsilon^2$), on a $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$ (respectivement $|v_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$). L'inégalité triangulaire implique

$$|(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| = |(u_n - l_1) + (v_n - l_2)| < |u_n - l_1| + |v_n - l_2| < \epsilon\,,$$

si $n \geq N_\epsilon := \max\{N_\epsilon^1; N_\epsilon^2\}$.

2. Si $a = 0$, alors $au_n = 0$ donc la suite de terme général au_n tend bien vers $0 \times l_1 = 0$. Supposons maintenant $a \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe $N_\epsilon \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{|a|}$. Il s'ensuit

$$|au_n - al_1| = |a||u_n - l_1| < |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon\,,$$

pour $n \geq N_\epsilon$. Ceci achève la preuve du second point.

3. La suite v est convergente donc elle est bornée par $M > 0$. Soit $\epsilon > 0$. Alors, il existe N_ϵ^1 (respectivement N_ϵ^2) tel que pour tout $n \geq N_\epsilon^1$ (respectivement $n \geq N_\epsilon^2$), on a $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2M}$ (respectivement $|v_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2(|l_1|+1)}$). Posons $N_\epsilon := \max\{N_\epsilon^1; N_\epsilon^2\}$. Alors pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - l_1 l_2| &= |(u_n v_n - l_1 v_n) + (l_1 v_n - l_1 l_2)| \\
&\leq |v_n|\,|u_n - l_1| + |l_1|\,|v_n - l_2| \\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} + |l_1|\frac{\epsilon}{2(|l_1|+1)} \\
&< \epsilon\,.
\end{aligned}$$

4. On remarque $\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| = \frac{|l_2 u_n - l_1 v_n|}{|v_n||l_2|} \leq \frac{|l_2||u_n - l_1| + |l_1||v_n - l_2|}{|v_n||l_2|}$. Comme $l_2 \neq 0$, on en déduit qu'il existe $N_1 \geq n_0$ tel que $|v_n - l_2| < \frac{|l_2|}{2}$ pour tout $n \geq N_1$. En particulier, si n est assez grand, on a $|v_n| \geq \frac{|l_2|}{2}$ d'où

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| \leq \frac{2}{|l_2|^2}\left(|l_2||u_n - l_1| + |l_1||v_n - l_2|\right)\,.$$

On prend maintenant $N_\epsilon^1 \geq n_0$ tel que si $n \geq N_\epsilon^1$, on a $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon|l_2|^2}{4(|l_2|+1)}$. On se donne également $N_\epsilon^2 \geq n_0$ tel que si $n \geq N_\epsilon^2$, on a $|v_n - l_2| < \frac{\epsilon|l_2|^2}{4(|l_1|+1)}$. En posant $N_\epsilon := \max\{N_1; N_\epsilon^1; N_\epsilon^2\}$, on obtient pour tout $n \geq N_\epsilon$:

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| \leq \frac{2}{|l_2|^2}\left(|l_2|\frac{\epsilon|l_2|^2}{4(|l_2|+1)} + |l_1|\frac{\epsilon|l_2|^2}{4(|l_1|+1)}\right) < \epsilon\,,$$

ce qui achève la preuve.

□

Exemple 25.3.32. *On considère la suite de terme général* $\frac{3n+1}{2n+7}$*. On a, pour* n *strictement positif :*

$$\frac{3n+1}{2n+7} = \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{7}{n}\right)} = \frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n}} \longrightarrow \frac{3}{2}\,,$$

vu que le numérateur converge vers 3 *et que le dénominateur (non nul) converge vers* $2 \neq 0$*.*

On parlera parfois de suites qui convergent vers l'infini. Définissons cette notion (qui en soi est un abus de langage) rigoureusement :

Définition 25.3.33. *On dit que la suite* u *diverge vers* $+\infty$ *si*

$$\forall H > 0 \quad \exists N_H \geq n_0 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N_H\,, \textit{on a } u_n > H\,. \tag{25.3}$$

Par abus de langage, on dira parfois que u converge vers $+\infty$.

Notation 25.3.34. *Si la suite* u *diverge vers* $+\infty$*, on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*.*

De même, on peut définir :

Définition 25.3.35. *On dit que la suite* u *diverge vers* $-\infty$ *si*

$$\forall H > 0 \quad \exists N_H \geq n_0 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N_H\,, \textit{on a } u_n < -H\,. \tag{25.4}$$

Par abus de langage, on dira parfois que u converge vers $-\infty$.

Notation 25.3.36. *Si la suite* u *diverge vers* $-\infty$*, on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*.*

Voyons maintenant le lien entre la monotonie et la convergence.

Théorème 25.3.37. *Soit* u *une suite réelle croissante et majorée. Alors,* u_n *converge vers* $\sup\limits_{n\geq n_0} u_n =: \sup\{u_n \;:\; n \geq n_0\}$*.*

Démonstration. Comme la suite u est majorée, l'ensemble $\{u_n \;:\; n \geq n_0\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Conséquemment, elle admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, que l'on note l. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \geq n_0$ tel que $l - \epsilon < u_{N_\epsilon} < l$. Puis, comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $l - \epsilon < u_n$. Ensuite, l étant un majorant de la suite u, on a $u_n \leq l < l + \epsilon$. Ceci achève la preuve. □

Remarque 25.3.38. *Soit u une suite réelle décroissante et minorée. Alors, u_n converge vers* $\inf_{n \geq n_0} u_n =: \inf\{u_n \ : \ n \geq n_0\}$.

Remarque 25.3.39. *Soit u une suite croissante non majorée. Alors elle diverge vers $+\infty$. De même, une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. Prouvons la première assertion. La seconde se démontre similairement. Soit u une suite croissante et non majorée. Alors, comme elle n'est pas majorée, pour tout $H > 0$, il existe $N_H \geq n_0$ telle que $u_{N_H} > H$. Puis, comme la suite est croissante : pour tout $n \geq N_H$, on a $u_n \geq u_{N_H} = H$. Ceci correspond à la définition même de la divergence vers $+\infty$. □

L'un des intérêts des suites est de pouvoir caractériser les bornes (supérieure et inférieure) d'une partie $A \subset \mathbb{R}$.

Proposition 25.3.40. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors, $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \in A$ et de plus $\lim_{n \to +\infty} a_n = M$. De même, $m = \inf A$ si et seulement si m est un minorant de A et s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \in A$ et de plus $\lim_{n \to +\infty} a_n = m$.*

On peut également montrer qu'une partie n'est pas bornée en utilisant les suites.

Proposition 25.3.41. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est non majorée si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \in A$ et de plus $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.*

De même, A est non minorée si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \in A$ et de plus $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$.

25.3.3 Limites et ordre

Le théorème suivant permet de déterminer la limite d'une suite si l'on a encadré ladite suite convenablement.

Théorème 25.3.42 (Principe des gendarmes)**.** *Soient trois suites réelles u, v et w définies à partir du rang n_0. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \,,$$

et de plus $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = l$. Alors, v converge vers l.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe N^1_ϵ (respectivement N^2_ϵ) tel que pour tout $n \geq N^1_\epsilon$ (respectivement $n \geq N^2_\epsilon$), on a $l - \epsilon < u_n$ (respectivement $w_n < l + \epsilon$). De fait, si $n \geq N_\epsilon := \max\{N^1_\epsilon ; N^2_\epsilon\}$, on a $l - \epsilon < v_n < l + \epsilon$. □

Exemple 25.3.43. *La suite u définie pour $n \geq 1$ par $u_n := \frac{\sin(n^7)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, $|\sin(n^7)| \leq 1$ ce qui implique $|u_n| \leq \frac{1}{n}$ d'où $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Or, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et il en est de même pour la suite de terme général $-\frac{1}{n}$. On peut donc appliquer le principe des gendarmes.*

On peut étendre ce théorème au cas où les suites ne sont pas bornées.

Proposition 25.3.44. *Soient trois suites réelles u, v et w définies à partir du rang n_0. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \,.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.
Si au contraire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. On se contentera de montrer la première assertion à savoir que si $u_n \leq v_n$ pour tout n et si u_n tend vers l'infini alors v_n tend également vers l'infini. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que pour tout $H > 0$, il existe $N_H \geq n_0$ tel que $u_n > H$ pour tout $n \geq N_H$. Or, $v_n \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$ donc en particulier, pour tout $n \geq N_H$, $v_n \geq u_n \geq H$, ce qui achève la preuve. □

On peut se demander ce qu'on peut dire si l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ ou bien si l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. C'est très simple : on ne peut rien en déduire.

Exemple 25.3.45. *Soit la suite u de terme général $u_n := \sin(n)$. Alors, $-n \leq u_n \leq n$. Or, la limite en l'infini de $-n$ est $-\infty$ tandis que celle de n est $+\infty$. Et, on en déduit rien sur la limite pour n tendant vers l'infini de $\sin(n)$; laquelle n'admet pas de limite. De la même manière, avec $v_n := -\sqrt{n}$, $w_n := \sqrt{n}$ et $t_n := \frac{1}{n+1}$, on a bien l'encadrement précédent pour tout $n \geq 1$. Or, $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$,$\lim_{n\to\infty} w_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.*

Remarquons que la relation d'ordre se prolonge à la limite (mais la relation d'ordre au sens large seulement).

Proposition 25.3.46. *Soient deux suites réelles u et v définies à partir du rang n_0. On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Également, on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$. Alors $l_1 \leq l_2$.*

Démonstration. Supposons que l'on ait $l_1 > l_2$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $l_1 - \epsilon > l_2 + \epsilon$. En exploitant la définition de la limite, on trouve deux entiers N_ϵ^1 et N_ϵ^2 tels que si $n \geq N_\epsilon^1$, on a $|u_n - l_1| < \epsilon$ et si $n \geq N_\epsilon^2$, on a $|v_n - l_2| < \epsilon$. En prenant $N_\epsilon := \max\{N_\epsilon^1; N_\epsilon^2\}$, on en déduit que pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $u_n > l_1 - \epsilon > l_2 + \epsilon > v_n$, ce qui est absurde. □

Remarque 25.3.47. *On peut très bien avoir $u_n < v_n$ pour tout $n \geq n_0$ et pourtant avoir $l_1 = l_2$. Il suffit par exemple de prendre $n_0 = 1$, $u_n := \frac{1}{n+2}$ et $v_n := \frac{1}{n}$.*

Définition 25.3.48. *On dit que les suites u et v sont adjacentes si*

- $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq n_0$.
- *La suite u est croissante.*
- *La suite v est décroissante.*
- *On dispose de la limite* $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème 25.3.49. *Deux suites adjacentes sont convergentes de même limite.*

Démonstration. La suite u est croissante et elle vérifie $u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$ vu que la suite v est décroissante. Ainsi, u est croissante et majorée donc elle converge vers une limite l_u. De même, v est décroissante et minorée donc elle converge vers l_v. Enfin, la limite de $v_n - u_n$ est $l_v - l_u$ et on a supposé que cette limite était nulle. Par conséquent, $l_u = l_v$ donc les deux suites convergent vers la même limite. □

25.4 Suites particulières

On présente ici quelques familles particulières de suites ; auxquelles on s'adosse autant que possible.

25.4.1 Suites arithmétiques

La suite u est arithmétique de raison $a \neq 0$ si l'on a $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout $n \geq 0$.

Alors, on a $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)\left(u_0 + a\frac{n}{2}\right)$.

Si $a > 0$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et si $a < 0$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

25.4.2 Suites géométriques

La suite u est géométrique de raison $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$.

Alors, on a $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, $u_0 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Si $|q| < 1$, $|u_n| \longrightarrow 0$. Si $|q| > 1$, $|u_n| \longrightarrow +\infty$.

25.4.3 Suites puissances

Une suite puissance a un terme général de la forme $u_n = n^\alpha$ pour $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

La suite converge vers 0 si $\alpha < 0$. Si $\alpha > 0$, elle tend vers $+\infty$.

25.4.4 Suites arithmético-géométrique

Définition 25.4.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$. La suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$ est dite arithmético-géométrique.*

Proposition 25.4.2. *Soit une suite u arithmético-géométrique de paramètres a et b. Alors : $u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. On pose $v_n := u_n - \frac{b}{1-a}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n - a\frac{b}{1-a} \\ &= av_n\,. \end{aligned}$$

La suite v est donc géométrique de raison a d'où $v_n = v_0 a^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$. Il vient immédiatement $u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$. $\square$

L'idée est de deviner la limite. En effet, si l est la limite alors $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = l = al + b = \lim_{n\to\infty} au_n + b$. On en déduit que $l = \frac{b}{1-a}$. Puis, l'on étudie la distance de u_n à la limite l, c'est-à-dire que l'on étudie $v_n := u_n - l$.

25.4.5 Suites récurrentes d'ordre deux

La suite u est récurrente d'ordre deux s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On suppose que $b \neq 0$ sans quoi on aurait simplement une suite géométrique.

Si $\Delta := a^2 + 4b > 0$, l'équation $X^2 - aX - b$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 puis il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Si $\Delta := a^2 + 4b = 0$, l'équation $X^2 - aX - b$ admet une unique solution réelle r_0 puis il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)\, r_0^n$.

Si $\Delta := a^2 + 4b < 0$, l'équation $X^2 - aX - b$ admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ puis il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))\, \rho^n$.

Démonstration. **1.** Supposons que l'on ait $\Delta \neq 0$. On note r_1 et r_2 les deux solutions complexes (réelles ou non) à l'équation $X^2 - aX - b = 0$. On a immédiatement $r_1 + r_2 = a$ et $r_1 r_2 = -b$. On pose $w_n := u_{n+1} - r_1 u_n$. On remarque

$$\begin{aligned} w_{n+1} - r_2 w_n &= (u_{n+2} - r_1 u_{n+1}) - r_2(u_{n+1} - r_1 u_n) \\ &= u_{n+2} - (r_1 + r_2)u_{n+1} + r_1 r_2 u_n \\ &= u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(w_n)_n$ est géométrique de raison r_2 d'où $w_n = w_0 r_2^n$ si bien que l'on en déduit

$$u_{n+1} - r_1 u_n = w_0 r_2^n \, .$$

D'abord, $r_1 \neq 0$ vu que $b = r_1 r_2 \neq 0$.

La méthode que l'on va utiliser ici est intimement liée à celle de la variation de la constante que l'on verra dans le chapitre sur les équations différentielles, voir page 395 pour le chapitre en question.

On pose en effet $u_n = \alpha_n r_1^n$ en supposant $r_1 \neq 0$. Alors :

$$\alpha_{n+1} r_1^{n+1} - r_1 \alpha_n r_1^n = w_0 r_2^n \, ,$$

d'où $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{w_0}{r_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$ vu que $r_1 \neq 0$. Conséquemment, par somme télescopique :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_0 + \gamma \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k \, ,$$

où $\gamma := \frac{w_0}{r_1}$.

On a ainsi la somme des termes d'une suite géométrique et l'on obtient :

$$\alpha_n = \alpha_0 + \gamma \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k = \alpha_0 + \frac{1}{1 - \frac{r_2}{r_1}} \left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right) \, .$$

On peut donc écrire $\alpha_n = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$ où λ_1 et λ_2 sont deux complexes. Il vient immédiatement $u_n = \alpha_n r_1^n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Si r_1 et r_2 sont réelles, le résultat est prouvé. Si r_1 et r_2 sont complexes, des calculs algébriques simples amènent au résultat. En effet, $r_1^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n \cos(n\theta) + i\rho^n \sin(n\theta)$ d'après la formule de Moivre, voir la page 123. De même, $r_2^n = \rho^n \cos(n\theta) - i\rho^n \sin(n\theta)$. On en déduit que le terme général s'écrit sous la forme $u_n = \alpha\rho^n \cos(n\theta) + \beta\rho^n \sin(n\theta)$ où les coefficients α et β sont complexes. Étant entendu que u_n est réel, il s'ensuit que les deux coefficients le sont aussi.

2. Supposons que l'on ait $\Delta = 0$. On appelle r_0 l'unique solution (réelle) à l'équation $X^2 - aX - b = 0$. Alors, en posant $w_n = u_{n+1} - r_0 u_n$, il vient $w_{n+1} - r_0 w_n = 0$ d'où $u_{n+1} - r_0 u_n = w_0 r_0^n$. On pose $u_n = \alpha_n r_0^n$. Il vient immédiatement $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{w_0}{r_0}$ d'où $(\alpha_n)_n$ est une suite arithmétique. Le résultat annoncé s'ensuit.

□

25.5 Pour aller plus loin

25.5.1 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Par exemple, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$; ce que l'on admet.

25.5.2 Suites extraites

Il arrive parfois que l'on ait besoin d'extraire une suite. Soit u une suite réelle définie à partir d'un rang $n_0 \geq 0$. Alors, si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la suite v définie par $v_n := u_{\varphi(n)}$ est une suite extraite (ou une sous-suite) de la suite u.

Par exemple, si u est une suite réelle, alors la suite v de terme général $v_n := u_{2n}$ en est une suite extraite. Il en est de même pour u_{2n+1}.

25.5.3 Suites complexes

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, on dit que u est convergente si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$.

25.6 Exercices

Exercice 1

Étudier la convergence des suites u dont le terme général est :

1. $u_n := \frac{2n-4}{3n+5}$.
2. $u_n := n^3 - 2n^2$.
3. $u_n := \frac{\log(n)}{n}$.
4. $u_n := n^2 - n\log(n)$.
5. $u_n := n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. $u_n := n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
7. $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
8. $u_n := \frac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geq 2$.
9. $u_n := (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 2

Étudier la convergence des suites u dont le terme général est :

1. $u_n := \sqrt[n]{n}$.
2. $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
3. $u_n := \frac{2^n}{n^2}$.
4. $u_n := \frac{n!}{2^n}$.
5. $u_n := \frac{n!}{n^n}$.
6. $u_n := \frac{n}{2^n}$.

Exercice 3

Étudier la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 3$ et $3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$.

Exercice 4

1. Vérifier que l'équation $x^2 = 2$ peut s'écrire $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
2. Étudier brièvement la fonction f définie sur l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
3. En déduire que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [1;2] \text{ quelconque} \\ u_{n+1} := f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

converge vers $\sqrt{2}$.
4. Calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près en utilisant cet algorithme.

Chapitre 26

Fonctions de la variable réelle : limites et continuité

Les fonctions que l'on considère dans ce chapitre sont définies sur une partie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. Cette partie, appelée le domaine de définition, est généralement un intervalle.

On suppose également que les fonctions sont à valeurs réelles.

L'extension au cas où les fonctions sont à valeurs complexes est immédiate en considérant partie réelle et partie imaginaire.

26.1 Limites d'une fonction

Sans limite, il n'y a pas de notion de continuité, pas de notion de dérivabilité et dès lors l'analyse serait bien terne. C'est pourquoi on commence par parler de limites.

26.1.1 Limite finie en un point

Définition 26.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a;b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On dit que f converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, on a :*

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0 + \delta(\epsilon)[\setminus \{x_0\} \ : \ |f(x) - l| < \epsilon \,.$$

En procédant comme dans le chapitre précédent, on peut montrer que si f converge vers l_1 en x_0 et vers l_2 en x_0, alors $l_1 = l_2$. En d'autres termes, on a unicité de la limite.

Exercice 26.1.2. *Démontrer l'unicité de la limite.*

Notation 26.1.3. *Cet unique réel l est appelé limite de f en x_0. On le note $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.*

Remarque 26.1.4. *Dans la définition de la limite, on retire x_0 car l'on veut éviter d'avoir directement la continuité. On parle de limite épointée.*

Exemple 26.1.5. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := x^2$. Alors f converge vers 1 quand x tend vers -1. On a en effet : $|f(x) - 1| = (x-1)(x+1)$. Ainsi, si $|x+1| = |x-(-1)| < \delta$ on a aussi $|x-1| \leq 2+|x+1| < 2+\delta$, d'où $|f(x)-1| < \delta(2+\delta)$. En choisissant $\delta < 1$, il vient $|f(x)-1| < 3\delta < \epsilon$ si l'on prend $\delta < \frac{\epsilon}{3}$. Il suffit alors de prendre $\delta(\epsilon) := \min\left\{1; \frac{\epsilon}{6}\right\}$ pour obtenir l'inégalité.*

Remarque 26.1.6. *Dans l'exemple précédent, on s'est servi de $\frac{\epsilon}{6}$. Ce n'était absolument pas optimal. Et à vrai dire, on ne cherche que rarement à optimiser. Comme on dit, qui peut le plus peut le moins.*

On peut également se servir de la caractérisation dite séquentielle de la limite.

Proposition 26.1.7. *La fonction f tend vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(y_n)_n$ de points de $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$ satisfaisant $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.*

Démonstration. Supposons que f tend vers l en x_0. Fixons $\epsilon > 0$. Il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$ avec $x \neq x_0$, on a $|f(x) - l| < \epsilon$. Mais, comme la suite de terme général y_n converge vers x_0 sans jamais prendre la valeur x_0, on en déduit que pour n assez grand, on a $|y_n - x_0| < \delta(\epsilon)$ avec $y_n \neq x_0$ d'où $|f(y_n) - l| < \epsilon$ pour tout n assez grand.

Réciproquement, supposons que f ne converge pas vers l quand x tend vers x_0. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que

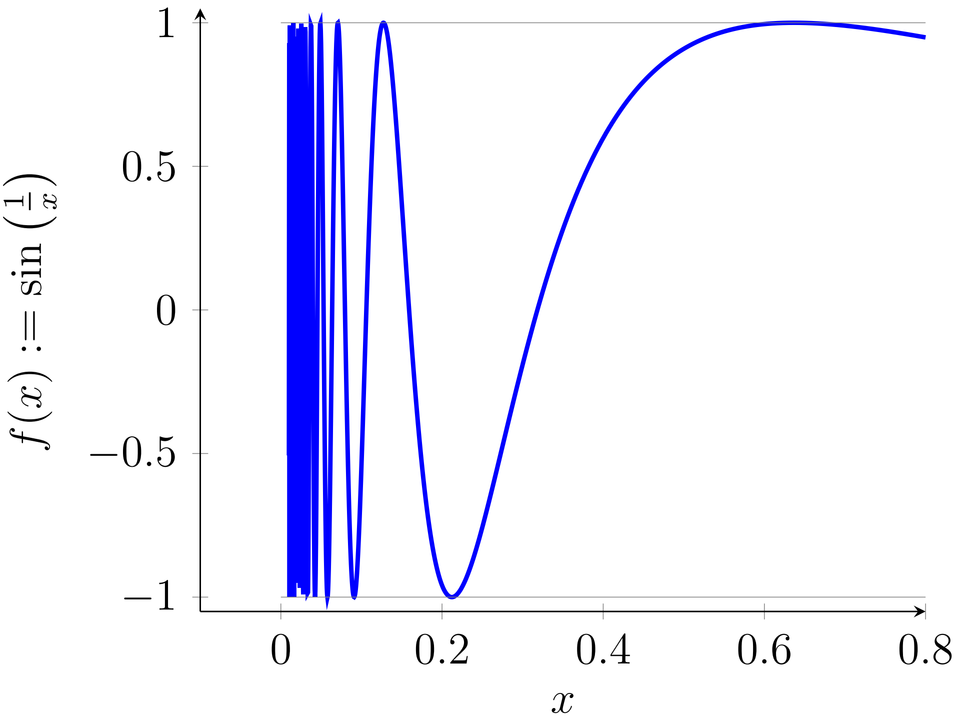
$$\forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in \left]x_0 - \delta; x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\}\ :\ |f(x_\delta) - l| > \epsilon_0\,.$$

Prenons en particulier $\delta := \frac{1}{n}$. On en déduit l'existence d'une suite $(y_n)_n$ (avec $y_n := x_{\frac{1}{n}}$) d'éléments de $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$ satisfaisant $|f(y_n) - l| > \epsilon_0$ et $|y_n - x_0| < \frac{1}{n}$. En d'autres termes, il existe alors une suite qui converge vers x_0 et telle que $f(y_n)$ ne tend pas vers l. Par contraposée, la preuve est ainsi achevée.

□

Exemple 26.1.8. *La fonction $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. En effet, si l'on prend $y_n := \frac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$, il vient $f(y_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Au contraire, si l'on prend $z_n := \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ pour $n \geq 0$, il vient $f(y_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pourtant, chacune des deux suites tend vers 0. L'unicité de la limite achève la preuve.*

FIGURE 26.1 – Fonction f



La caractérisation séquentielle de la limite nous amène immédiatement la stabilité suivante par rapport à la limite.

Proposition 26.1.9. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a; b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Alors :*

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = l_1 l_2$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha l_1$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- *Si de plus* $l_2 \neq 0$ *et* $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{I} \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$.

La preuve est laissée en exercice vu qu'elle consiste principalement à reprendre celle du Théorème 25.3.31 à la page 284.

On dispose à nouveau du théorème des gendarmes.

Proposition 26.1.10. *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a; b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$. On suppose également que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Alors :*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l\,.$$

Exercice 26.1.11. *Démontrer la Proposition 26.1.10.*

Également, on a la stabilité par la relation d'ordre au sens large.

Proposition 26.1.12. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a;b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On suppose $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$. On suppose également que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a $f(x) \leq g(x)$. On en déduit $l_1 \leq l_2$.*

Exercice 26.1.13. *Démontrer la Proposition 26.1.12.*

26.1.2 Limite à gauche et à droite

On voit maintenant la notion de limite à gauche ainsi que celle de limite à droite. Cette notion est d'un intérêt particulier en probabilités avec l'étude des fonctions de répartition.

Définition 26.1.14. *On dit que f converge à gauche vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ \textit{tel que} \ \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0[\ : \ |f(x) - l| < \epsilon \,.$$

À nouveau, cette limite est unique, si elle existe.

Notation 26.1.15. *Le réel l est appelé limite à gauche de f en x_0. On le note $l := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $f(x_0^-)$.*

Proposition 26.1.16. *La fonction f tend à gauche vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ et $x_n < x_0$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \,.$$

On a de même pour la limite à droite.

Définition 26.1.17. *On dit que f converge à droite vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ \textit{tel que} \ \forall x \in]x_0; x_0 + \delta(\epsilon)[\ : \ |f(x) - l| < \epsilon \,.$$

À nouveau, cette limite est unique, si elle existe.

Notation 26.1.18. *Le réel l est appelé limite à droite de f en x_0. On le note $l := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $f(x_0^+)$.*

Proposition 26.1.19. *La fonction f tend à droite vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ et $x_n > x_0$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \,.$$

Proposition 26.1.20. *Si la fonction f est monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) et bornée (c'est-à-dire majorée et minorée), elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de l'intervalle.*

Remarque 26.1.21. *Ces deux limites ne sont pas forcément égales.*

Définition 26.1.22. *Une fonction est dite càdlàg sur $\mathbb{R}$ si en tout point $x \in \mathbb{R}$, $f(x_0^-)$ existe et si $f(x_0^+) = f(x_0)$.*

La notion de fonction càdlàg est essentielle en probabilités en vue de l'étude des fonctions de répartition.

Proposition 26.1.23. *On a l'équivalence entre les deux propositions suivantes :*
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

Exercice 26.1.24. *Démontrer la Proposition précédente.*

26.1.3 Limites infinies

On peut parfois tendre vers $\pm\infty$. Ce n'est pas une *vraie* convergence mais on regarde cette notion qui mérite d'être relevée.

On commence par regarder ce qu'il se passe quand f tend vers $+\infty$.

Définition 26.1.25. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si pour tout $H > 0$,*

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus\{x_0\} \ : \ f(x) > H\,.$$

Exemple 26.1.26. *La fonction f définie par $f(x) := \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ en 0.*

On dispose à nouveau de la caractérisation séquentielle.

Proposition 26.1.27. *La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty\,.$$

On regarde maintenant ce qu'il se passe quand f tend vers $-\infty$.

Définition 26.1.28. *On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si pour tout $H > 0$,*

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus\{x_0\} \ : \ f(x) < -H\,.$$

Exemple 26.1.29. *La fonction f définie par $f(x) := \log|x|$ tend vers $-\infty$ en 0.*

On dispose à nouveau de la caractérisation séquentielle.

Proposition 26.1.30. *La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty\,.$$

26.1.4 Limites en $\pm\infty$

On suppose maintenant que l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ est de la forme $]a;+\infty[$.

Définition 26.1.31. *Soit f une fonction de $]a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists H(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x > H(\epsilon)\ :\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Exemple 26.1.32. *La fonction f définie par $f(x) := \frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.*

On dispose encore et toujours de la caractérisation séquentielle.

Proposition 26.1.33. *La fonction f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

On suppose maintenant que l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ est de la forme $]-\infty;a[$.

Définition 26.1.34. *Soit f une fonction de $]-\infty;a[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists H(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x < -H(\epsilon)\ :\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Exemple 26.1.35. *La fonction f définie par $f(x) := \frac{1}{\log|x|}$ tend vers 0 en $-\infty$.*

On dispose encore et toujours de la caractérisation séquentielle.

Proposition 26.1.36. *La fonction f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

Remarque 26.1.37. *Il va de soi que la limite en $+\infty$ peut être égale à $+\infty$ ou à $-\infty$. Il en est de même en $-\infty$.*

26.1.5 Quelques limites classiques

Les limites classiques suivantes sont *a priori* indéterminée mais en négociant bien les calculs, on peut les obtenir. Ces limites sont à connaître par cœur.

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1.$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- $\lim_{x \to 0} x \log(x) = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

26.2 Fonctions continues

Dans cette section, $\mathcal{I} =]a; b[$ où $a < b$ sont des réels ou sont infinis mais $a < +\infty$ et $b > -\infty$. En d'autres termes, $\mathcal{I} \neq \emptyset$.

Définition 26.2.1. *La fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Exemple 26.2.2. *La fonction f définie par $f(x) = x$ est continue en 0. Il en est de même de la fonction g définie par $g(x) = x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.*

Contre-exemple 26.2.3. *La fonction de Heaviside H définie par $H(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est discontinue en 0. De même la fonction g définie par $g(x) = x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est discontinue en 1.*

Remarque 26.2.4. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\,.$$

Proposition 26.2.5. *Si f et g sont continues en x_0, il en est de même pour $f + g$, fg et αf. Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 également.*

Exercice 26.2.6. *Prouver la proposition.*

Théorème 26.2.7. *Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ définie par $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ est continue en x_0.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Alors, par continuité de f en x_0, $f(x_n)$ tend vers $f(x_0)$. Puis, la suite $f(x_n)$ convergeant vers $f(x_0)$, et comme g est continue en $f(x_0)$, la suite de terme général $(g \circ f)(x_n)$ tend vers $(g \circ f)(x_0)$ ce qui prouve la continuité séquentielle de $g \circ f$ en x_0. Il s'ensuit que $g \circ f$ est continue en x_0. $\square$

Définition 26.2.8. *On dit qu'une fonction f est continue sur l'intervalle $\mathcal{I}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{I}$.*

Contre-exemple 26.2.9. *La fonction de Heaviside H définie par $H(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est discontinue en 0 donc elle est discontinue sur $\mathbb{R}$. néanmoins, elle est continue sur $[1; 2]$ ou même sur $\mathbb{R}_+^*$.*

26.3 Théorèmes cruciaux

Commençons par le théorème des valeurs intermédiaires. La philosophie sous-jacente est que pour aller de Paris à Londres, on passe forcément par la mer (ou l'océan) à un moment ou à un autre.

Théorème 26.3.1. *Soit f une fonction continue de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de l'intervalle tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Alors, pour tout $y \in]f(a); f(b)[$, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. Soit $y \in]f(a); f(b)[$. Posons $a_0 := a$ et $b_0 := b$. On pose également $m_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ le milieu du segment $[a_0; b_0]$. On va distinguer suivant deux cas :

- Si $f(m_0) \geq y$, on pose $a_1 := a_0$ et $b_1 := m_0$.
- Sinon, on pose $a_1 := m_0$ et $b_1 := b$.

On remarque ainsi : $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ dans tous les cas ainsi que

$$f(a_1) \leq y \leq f(b_1) \,.$$

De plus, $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$.
En réitérant ce procédé, on construit deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

- La suite $(a_n)_n$ est croissante.
- La suite $(b_n)_n$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[a_n; b_n] \subset [a; b]$.

Les quatre premiers points impliquent que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. D'après le Théorème 25.3.49 à la page 289, on en déduit qu'elles convergent vers une même limite que l'on appelle c.

Or, la continuité de f implique $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$. Le cinquième point implique $f(c) \leq y \leq f(c)$ d'où $f(c) = y$, ce qui achève la preuve vu que $c \in]a; b[$ d'après le sixième point.

□

Remarque 26.3.2. *Il contient de noter que l'on peut supposer $f(b) < f(a)$. Dans ce cas, pour tout $y \in]f(b); f(a)[$, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = y$. La seule véritable hypothèse sur $f(a)$ et $f(b)$ est donc $f(a) \neq f(b)$.*

Remarque 26.3.3. *On donne l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = y$ mais on n'a pas d'unicité,* a priori. *De plus, on n'a pas construit la solution d'un point de vue pratique.*

On peut modidier le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir un résultat sous une forme plus intuitive (et plus souvent utilisée).

Corollaire 26.3.4. *Soit f une fonction continue de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de l'intervalle tels que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Alors, il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Contre-exemple 26.3.5. *Soit la fonction f définie sur $]-2;0[\cup]0;3[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On a $f(-2) = -\frac{1}{2} < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. Mais, à aucun moment la fonction ne s'annule. Cela vient du fait que $]-2;0[\cup]0;3[$ n'est pas un intervalle.*

Corollaire 26.3.6. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

La preuve est immédiate une fois que l'on rappelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble $\mathcal{J}$ tel que pour tous $a, b \in \mathcal{J}$ avec $a < b$, $]a;b[\subset \mathcal{J}$.

Théorème 26.3.7. *Soient a et b deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors, il existe deux réels c et d tels que $f([a;b]) = [c;d]$. De plus, il existe $\alpha, \beta \in [a;b]$ tels que*

$$c = f(\alpha) = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a;b]\} \ ,$$

et

$$d = f(\beta) = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a;b]\} \ .$$

Cela signifie que les fonctions continues transforment les intervalles compacts de $\mathbb{R}$ en intervalles compacts de $\mathbb{R}$. Un compact est un ensemble fermé et borné, *en dimension finie.*

La preuve du théorème est omise.

Définition 26.3.8. *Une fonction monotone est une fonction qui est soit croissante soit décroissante.*

Contre-exemple 26.3.9. *Les fonctions sinus et cosinus ne sont pas monotones sur $\mathbb{R}$. En effet, parfois elles sont décroissantes et parfois elles sont croissantes.*

Définition 26.3.10. *Une fonction strictement monotone est une fonction qui est soit strictement croissante soit strictement décroissante.*

Théorème 26.3.11. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Alors, on a :*

- *f est bijective de $\mathcal{I}$ sur $f(\mathcal{I})$, qui est un intervalle. On notera f^{-1} la bijection réciproque.*
- *f^{-1} est continue sur $f(\mathcal{I})$.*
- *f^{-1} est strictement monotone. De plus, si f est strictement croissante (respectivement décroissante), il en est de même pour f^{-1}.*

Démonstration. Supposons sans rien changer à la généralité que f est strictement croissante. Le cas de la stricte décroissance est obtenue en prenant $g := -f$ où f est strictement croissante.

D'abord, f est surjective de $\mathcal{I}$ sur $f(\mathcal{I})$. Ensuite, le Théorème 26.3.1 et le Corollaire 26.3.6 impliquent immédiatement que $f(\mathcal{I})$ est un intervalle. Puis, comme f est strictement croissante sur $\mathcal{I}$, si $f(x) = f(y)$ avec $x, y \in \mathcal{I}$ et $x < y$, il s'ensuit $f(z) = f(x)$ pour tout $z \in]x; y[$. Ceci contredit la stricte croissance et donc la bijectivité est immédiate.

Ensuite, soit $y \in f(\mathcal{I})$ et soit $(z_n)_n$ une suite quelconque de $f(\mathcal{I})$ qui converge vers y. Nous allons montrer que $f^{-1}(z_n)$ converge vers $f^{-1}(y)$ quand n tend vers l'infini. Ceci étant la caractérisation séquentielle de la continuité, cela achèvera de montrer que f^{-1} est continue. D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathcal{I}$ tel que $z_n = f(x_n)$. On a ainsi $f^{-1}(z_n) = x_n$. Supposons par l'absurde que $(x_n)_n$ ne converge pas vers $x := f^{-1}(y)$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$, on puisse trouver $n \geq N_0$ satisfaisant $|x_n - x| \geq \epsilon_0$. On en déduit que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \; : \; |x_n - x| \geq \epsilon_0\}$ est infini. Donc l'un au moins des ensembles $\mathcal{A} := \{n \in \mathbb{N} \; : \; x_n \geq x + \epsilon_0\}$ ou $\mathcal{B} := \{n \in \mathbb{N} \; : \; x_n \leq x - \epsilon_0\}$ est infini. Supposons sans rien changer à la généralité que $\mathcal{A}$ est infini (le raisonnement est similaire si $\mathcal{B}$ est infini). Comme $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ est infini, on peut exhiber une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{A}$. Appelons cette bijection φ et posons $u_n := x_{\varphi(n)}$. Alors, $u_n \geq x + \epsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de plus $f(u_n) = f(x_{\varphi(n)}) = z_{\varphi(n)}$ converge vers y. Pourtant, $f(u_n) \geq f(x + \epsilon_0) > f(x) = y$. C'est absurde. Ainsi, f^{-1} est bien continue.

Soient $y, y' \in f(\mathcal{I})$ tels que $y < y'$. On suppose par l'absurde que l'on a $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$. Alors, en composant par f à gauche et à droite, il vient $(f \circ f^{-1})(y) \geq (f \circ f^{-1})(y')$ c'est-à-dire $y \geq y'$, ce qui est absurde.

□

Avec les hypothèses du Théorème 26.3.11, on obtient l'unicité dans les conclusions du Théorème 26.3.1.

26.4 Continuité en dimension deux

Regardons ici la continuité quand nous sommes en dimension strictement supérieure à 1.

Définition 26.4.1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en un point (x_0, y_0) si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \;\; \text{tel que si } |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \alpha^2 \text{, on a :}$$
$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \, .$$

Remarque 26.4.2. *Une fonction peut vérifier*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) \;\; \text{et} \;\; \lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) \, ,$$

sans être continue en (x_0, y_0).

Exemple 26.4.3. *La fonction définie par* $f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *(et* $f(0,0) = 0$*) n'est pas continue en* $(0,0)$. *En effet, si l'on passe en polaire, on a :* $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ *donc la caractérisation séquentielle donnera différentes limites suivant l'angle. Pourtant,* $f(x,0) = 0 \longrightarrow 0$ *quand* x *tend vers* 0 *et il en est de même pour la limite, quand* y *tend vers* 0 *de* $f(0,y)$.

Définition 26.4.4. *Soit* f *une fonction d'un domaine ouvert* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathbb{R}^2$. *On dit que* f *est continue sur* $\mathcal{D}$ *si* f *est continue en* (x_0, y_0) *pour tout* $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

Exemple 26.4.5. *La fonction définie par* $f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

26.5 Exercices

Exercice 1

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := e^{-\sqrt{x}}$.
2. $f_2(x) := \frac{x+7}{4x+3}$.
3. $f_3(x) := \frac{x^2+5}{x^3-1}$.
4. $f_4(x) := \cos(x^2)e^{-x}$.
5. $f_5(x) := \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$.
6. $f_6(x) := (2+\sin(x))e^x$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3}$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$.
5. $\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$.
6. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{4x+\pi}$.
7. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Chapitre 27

Fonctions de la variable réelle : dérivation

Dans ce chapitre, on considère des intervalles ouverts c'est-à-dire des intervalles de la forme $]a; b[$ avec $a < +\infty$ et $b > -\infty$.

La dérivabilité est capitale pour étudier les fonctions.

27.1 Définitions

Définition 27.1.1. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l\,.$$

Notation 27.1.2. *Cette limite l est appelée la dérivée de f en a. On la note $f'(a)$.*

Remarque 27.1.3. *Si f est dérivable en a, on a aussi*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,.$$

Exemple 27.1.4. *Une fonction constante est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Par définition, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\lambda-\lambda}{x-a} = 0$, ce qui tend vers 0. On en déduit d'ailleurs que la dérivée d'une constante est 0 en tout point de $\mathbb{R}$. □

Exemple 27.1.5. *La fonction $f(x) := x$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et de plus $f'(a) = 1$.*

Démonstration. Ici, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1$, ce qui tend bien vers 1. □

Exemple 27.1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Alors, la fonction $f(x) := x^n$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$. De plus : $f'(a) = na^{n-1}$. En effet, d'après l'Égalité* (3.2) *à la page 56, on a*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}\,,$$

ce qui converge vers $a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1}$ quand x tend vers a.

Exemple 27.1.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Alors, la fonction $f(x) := x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}_+$. De plus : $f'(a) = \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}$.*

Démonstration. On calcule comme suit pour $x \neq a$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x-a}\\ &= \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n}\\ &= \frac{1}{\frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n}{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}}\\ &= \frac{1}{\frac{y^n-\alpha^n}{y-\alpha}}\,,\end{aligned}$$

où $y := x^{\frac{1}{n}}$ et $\alpha := a^{\frac{1}{n}}$. On a donc :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{y^{n-1} + \alpha y^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}y + \alpha^{n-1}}\,,$$

ce qui converge vers $\frac{1}{\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha^{n-1}} = \frac{1}{n\alpha^{n-1}}$ quand x tend vers a. Or, $\frac{1}{n\alpha^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{a^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}$. □

27.2 Premières propriétés

La dérivabilité est plus forte que la continuité. En effet :

Proposition 27.2.1. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On suppose que f est dérivable en a. Alors f est continue en a.*

Démonstration. Par définition, $f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. La quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a. Or, $x-a$ tend vers 0 quand x s'approche de a. Ainsi, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = f(a) + 0\times f'(a) = f(a)$. □

Remarque 27.2.2. *Une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. En effet, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$*

Remarque 27.2.3. *C'est en fait bien pire que cela. Bien que cela soit contre-intuitif, il existe des fonctions qui sont continues en tout point de $\mathbb{R}$ mais qui ne sont dérivables nulle part. Exemple : les trajectoires du mouvement Brownien.*

On peut définir une notion de dérivée à gauche et à droite comme on a défini la notion de limite à gauche et celle de limite à droite.

Définition 27.2.4. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel, que l'on notera $f'(a^+)$, tel que*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^+)\,.$$

De même :

Définition 27.2.5. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel, que l'on notera $f'(a^-)$, tel que*

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-)\,.$$

Remarque 27.2.6. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche de a et à droite de a et si $f'(a^-) = f'(a^+)$.*

Exemple 27.2.7. *La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche en 0 et elle est dérivable à droite en 0. La dérivée à gauche en 0 vaut -1 et celle à droite vaut 1 d'où la fonction n'est pas dérivable en 0.*

27.3 Opérations sur les fonctions dérivables

La dérivation étant construite par une limite, on peut montrer facilement qu'elle est robuste vis à vis des opérations algébriques usuelles.

Théorème 27.3.1. *Soient deux fonctions f et g de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors :*

- *$f+g$ est dérivable en a et de plus $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
- *fg est dérivable en a et de plus $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction αf définie par $x \mapsto \alpha f(x)$ est dérivable en a et de plus $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.*

- *Si de plus* $g(a) \neq 0$, *alors la fonction* $\frac{1}{g}$ *définie par* $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ *est dérivable en* a *et on a* $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$.
- *Si de plus* $g(a) \neq 0$, *alors la fonction* $\frac{f}{g}$ *définie par* $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ *est dérivable en* a *et on a* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. **1.** On a

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a))}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $f'(a)$ et le second vers $g'(a)$. On en déduit que $f+g$ est dérivable en a de dérivée $f'(a)+g'(a)$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\longrightarrow f'(a)} g(x) + f(a)\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\longrightarrow g'(a)},\end{aligned}$$

ce qui converge donc vers $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$, vu que g est continue en a.

3. On a $\frac{(\alpha f)(x)-(\alpha f)(a))}{x-a} = \frac{\alpha f(x)-\alpha f(a)}{x-a} = \alpha\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ce qui tend vers $\alpha f'(a)$. On en déduit que αf est dérivable en a de dérivée $\alpha f'(a)$.

4. Ici, le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}\\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \times \frac{g(a)-g(x)}{x-a}\\ &= -\underbrace{\frac{1}{g(a)g(x)}}_{\longrightarrow \frac{1}{g(a)^2}}\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\longrightarrow g'(a)}\\ &\longrightarrow -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

5. On pose $h := \frac{1}{g}$. Alors, h est dérivable en a et de par le point deux, fh est aussi dérivable en a. De plus :

$$(fh)'(a) = f'(a)h(a) + f(a)h'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

□

Corollaire 27.3.2. *On en déduit en particulier que l'ensemble des fonctions dérivables en a forme un espace vectoriel.*

Le théorème suivant permet de dériver des fonctions beaucoup plus compliquées que les fonctions usuelles.

Théorème 27.3.3. *Soit f une fonction de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{R}$ où $\mathcal{J}$ (comme $\mathcal{I}$) est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{I}$ tel que $f(a) \in \mathcal{J}$. On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ définie par $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ est dérivable en a et de plus :*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))\,. \tag{27.1}$$

Démonstration. On calcule comme suit :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}}_{\longrightarrow g'(f(a))}\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\longrightarrow f'(a)},$$

ce qui achève la preuve.

□

Exemple 27.3.4. *On considère la fonction h définie par $h(x) := x^{2n}$. On sait que la dérive de h en a est $2na^{2n-1}$ en tout point a de $\mathbb{R}$. Mais posons $f(x) := x^2$ et $g(x) := x^n$. Alors, $h(x) = (g \circ f)(x)$. D'après le théorème précédent, $h'(a) = f'(a)g'(f(a))$. Or, $f'(a) = 2a$ et $g'(b) = nb^{n-1}$ donc $g'(f(a)) = nf(a)^{n-1} = n(a^2)^{n-1} = na^{2n-2}$ d'où $h'(a) = 2ana^{2n-2} = 2na^{2n-1}$.*

On donne maintenant un dernier théorème dont l'importance est cruciale.

Théorème 27.3.5. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. On pose $\mathcal{J} := f(\mathcal{I})$. On suppose que f est dérivable en $a \in \mathcal{I}$ et $f'(a) \neq 0$. Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable au point $f(a)$ et de plus*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}\,. \tag{27.2}$$

Démonstration. On calcule comme suit :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x-a}{x-a} \\ &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{x-a} \\ &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x)-f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} . \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)} .$$

Puis, comme x tend vers a, on a bien $f(x)$ qui tend vers $f(a)$. Ainsi :

$$\lim_{u \to f(a)} \frac{f^{-1}(u) - f^{-1}(f(a))}{u-a} = \frac{1}{f'(a)} .$$

□

On peut appliquer le Théorème 27.3.5 au contexte suivant :

Corollaire 27.3.6. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. On pose $\mathcal{J} := f(\mathcal{I})$. On suppose que f est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$ et de dérivée non nulle. Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en tout point u de $\mathcal{J}$ et de plus*

$$\left(f^{-1}\right)'(u) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(u)\right)} . \qquad (27.3)$$

27.4 Quelques dérivées usuelles

Voici quelques dérivées à connaître par cœur :

- Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
- Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
- Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
- Si $f(x) = \tan(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- Si $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
- Si $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
- Si $f(x) = \tanh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, alors $f'(x) = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$.

- Si $f(x) = \arcsin(x)$, pour $x \in]-1;1[$, alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Si $f(x) = \arccos(x)$, pour $x \in]-1;1[$, alors $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Si $f(x) = \arctan(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Si $f(x) = \operatorname{argsinh}(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- Si $f(x) = \operatorname{argcosh}(x)$, pour $x \in]1;+\infty[$, alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- Si $f(x) = \operatorname{argtanh}(x)$, pour $x \in]-1;1[$, alors $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Définition 27.4.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Si f est dérivable en tout point $a \in \mathcal{I}$, alors la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.*

Définition 27.4.2. *Si f est dérivable sur $\mathcal{I}$ et si f' est continue sur $\mathcal{I}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.*

27.5 Dérivées d'ordre supérieur

On peut dériver les fonctions dérivées, si elles sont dérivables.

Notation 27.5.1. *La dérivée de la fonction f' est notée f''.*

Remarque 27.5.2. *On dit que f'' est la dérivée d'ordre 2 de f.*

Notation 27.5.3. *La dérivée d'ordre 3 de f est la dérivée de f'' et on la note $f^{(3)}$. Pour tout $n \geq 4$, la dérivée d'ordre n de f est la dérivée de $f^{(n-1)}$ et on la note $f^{(n)}$.*

On peut calculer la dérivée d'ordre n d'une somme en faisant la somme des dérivées d'ordre n. Pour le cas du produit, c'est plus compliqué. On utilise alors la formule de Leibniz.

Proposition 27.5.4. *Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre n en un point x_0. Alors la fonction fg est dérivable à l'ordre n en x_0 et de plus*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)\,, \tag{27.4}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exercice 27.5.5. *Démontrer la formule (27.4). On pourra procéder à une récurrence.*

27.6 Théorème des accroissements finis

Définition 27.6.1. *Soit une fonction f sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et à valeurs réelles. On dit que f présente un maximum local en $a \in \mathcal{I}$ s'il existe un intervalle $]a-\epsilon; a+\epsilon[\subset \mathcal{I}$ avec $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$, $f(x) \leq f(a)$.*

Définition 27.6.2. *Soit une fonction f sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et à valeurs réelles. On dit que f présente un minimum local en $a \in \mathcal{I}$ s'il existe un intervalle $]a-\epsilon; a+\epsilon[\subset \mathcal{I}$ avec $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\epsilon; a+\epsilon[$, $f(x) \geq f(a)$.*

Définition 27.6.3. *Soit une fonction f sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et à valeurs réelles. On dit que f présente un extremum local en $a \in \mathcal{I}$ s'il admet un maximum local ou un minimum local en a.*

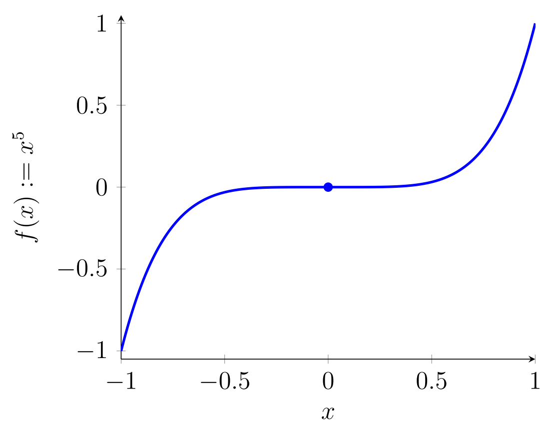
On peut relier le concept d'extremum local à celui de dérivée nulle comme suit.

Théorème 27.6.4. *Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et à valeurs réelles. On suppose que f présente un extremum local en a. Alors, on a $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Procédons par contraposée en supposant que $f'(a) \neq 0$. Sans rien changer à la généralité, on suppose que $f'(a) > 0$. Alors, la fonction ρ définie par $\rho(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge vers $f'(a) > 0$. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a; a+\alpha[\bigcap \mathcal{I}$, $\rho(x) \geq \frac{f'(a)}{2}$. En particulier, $f(x) \geq f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{2} > f(a)$. Pour tout $\epsilon \in]0; \alpha[$ aussi petit que l'on veut, en considérant $x := a + \frac{\epsilon}{2}$, il vient $f(x) > f(a)$. Et de même, si l'on prend $x := a - \frac{\epsilon}{2}$, il vient $f(x) < f(a)$. La fonction n'admet donc ni maximum local ni minimum local en a. On en déduit donc que f n'admet pas d'extremum local en a. $\square$

Remarque 27.6.5. *La réciproque du théorème est fausse. Ainsi, en prenant $f(x) := x^5$, on a bien $f'(0) = 0$ et pourtant, f n'admet pas d'extremum local en 0 :*

FIGURE 27.1 – Fonction $f(x) := x^5$



Définition 27.6.6. *Un point de $\mathcal{I}$ où f' s'annule est appelé un point critique de f.*

Théorème 27.6.7 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. D'abord, si la fonction est constante sur $[a;b]$, sa dérivée est nulle et donc la preuve est achevée. Sinon, d'après le Théorème 26.3.7, il existe deux points c et d dans $[a;b]$ tels que $f(c) = \sup_{x\in[a;b]} f(x) = \alpha$ et $f(d) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = \beta$. On a alors $\alpha > \beta$ donc $f(a) < \alpha$ ou $f(a) > \beta$. Supposons sans rien changer à la généralité que l'on a $\alpha > f(a) = f(b)$. Alors, f admet un maximum local en c et donc $f'(c) = 0$ d'après le Théorème 27.6.4.

□

Remarque 27.6.8. *À propos de la preuve, on peut très bien avoir $f(a) < \alpha$ et $f(a) > \beta$. Il s'agissait d'un "ou" inclusif.*

On peut généraliser le Théorème de Rolle comme suit.

Théorème 27.6.9 (Formule des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Démonstration. On applique le Théorème 27.6.7 à la fonction g définie par $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ et l'on trouve l'existence de c tel que $g'(c) = 0$. Or, $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. La preuve est ainsi achevée. □

Une application essentielle de ce théorème est l'inégalité des accroissements finis, laquelle nous assure que la fonction est Lipschitzienne sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Corollaire 27.6.10 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. On suppose que f' est bornée sur $]a;b[$ par une constante $M > 0$. Alors, pour tous $x, y \in [a;b]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.*

27.7 Applications à la monotonie

On peut appliquer la formule des accroissements finis pour obtenir de la monotonie.

Proposition 27.7.1. *Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Alors :*

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, f est strictement croissante sur $\mathcal{I}$.*

- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, f est strictement décroissante sur $\mathcal{I}$.*
- *La fonction f est constante sur $\mathcal{I}$ si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.*

Démonstration. **1.** Soient $a, b \in \mathcal{I}$ avec $a < b$ alors il existe $c \in \mathcal{I}$ tel que $f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{>0} > 0$ donc f est strictement croissante.

2. Soient $a, b \in \mathcal{I}$ avec $a < b$ alors il existe $c \in \mathcal{I}$ tel que $f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{<0} < 0$ donc f est strictement décroissante.

3. Soient $a, b \in \mathcal{I}$ avec $a < b$ alors il existe $c \in \mathcal{I}$ tel que $f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{=0} = 0$ donc f est constante. Réciproquement, si f est constante, sa dérivée est nulle.

□

Remarque 27.7.2. *On peut supposer que l'intervalle n'est pas ouvert et dans ce cas la dérivabilité en tout point intérieur de $\mathcal{I}$ et la continuité sur $\mathcal{I}$ sont suffisantes.*

27.8 Formule de Taylor-Lagrange

On peut généraliser la formule des accroissements finis à n'importe quel ordre.

Théorème 27.8.1 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I} \supset [a;b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $f^{(k)}$ est définie et continue sur $[a;b]$. On suppose également que $f^{(n+1)}$ est définie pour tout $x \in]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \sum_{k=2}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,. \qquad (27.5)$$

27.9 Fonctions convexes d'une variable réelle

On dit qu'une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^2$ (dont la dérivée seconde existe et est continue) est convexe si $\psi''(x) \geq 0$ pour tout x.

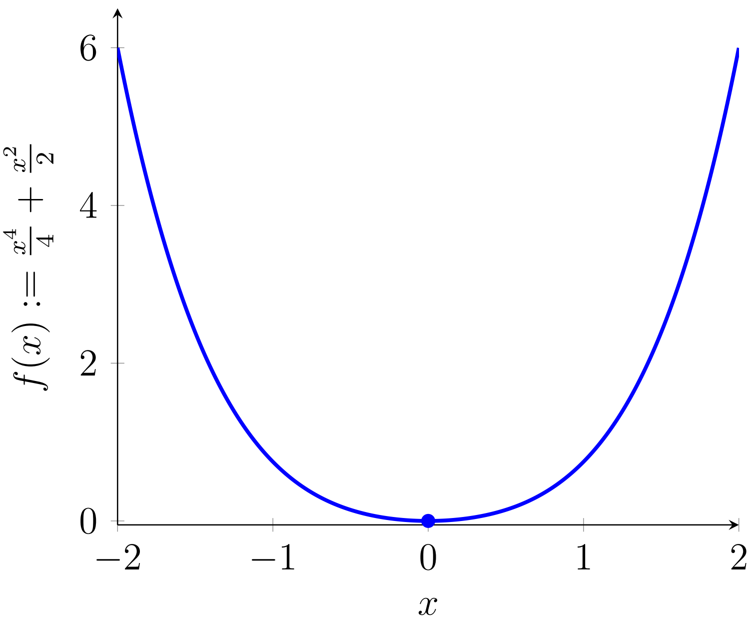
La convexité est une notion essentielle puisqu'elle permet l'utilisation de l'inégalité de Jensen. En d'autres termes,

$$\psi\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right) \leq \int_0^1 \psi(g(x))\mathrm{d}x\,,$$

pour toute fonction continue g de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

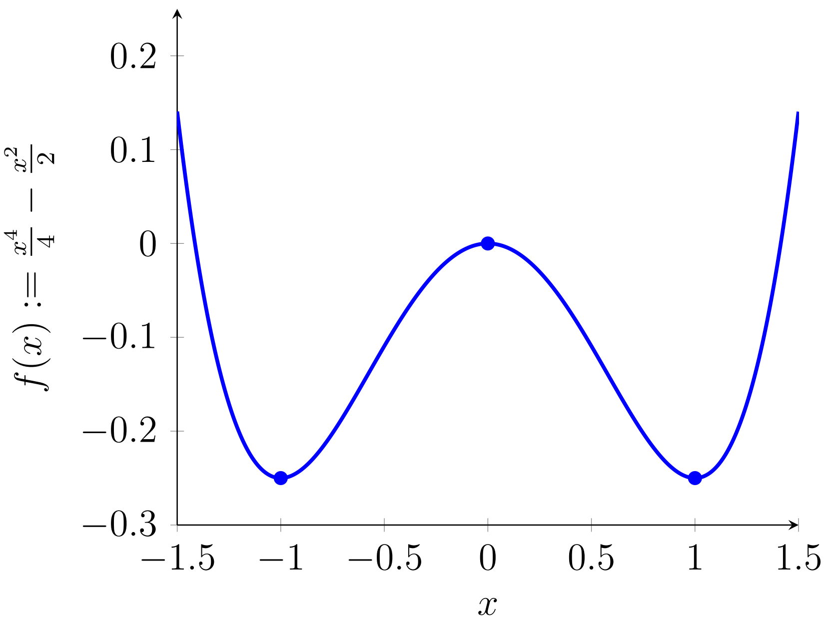
Un exemple de telle fonction est $x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$:

FIGURE 27.2 – Fonction $f(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$



Au contraire, la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ n'est pas convexe :

FIGURE 27.3 – Fonction $f(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$



27.10 Dérivabilité en dimension supérieure

On peut être amené à considérer des fonctions qui dépendent de plusieurs paramètres. Exemple : $f(x,u) = \frac{x}{1+u^2}$.

La dérivée partielle par rapport à x consiste à dériver la fonction en x en considérant que u est une constante.

Cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial}{\partial x} f(x,u)$. Dans le cas présent, $\frac{\partial}{\partial x} f(x,u) = \frac{1}{1+u^2}$. Et, de même : $\frac{\partial}{\partial u} f(x,u) = -2\frac{xu}{(1+u^2)^2}$.

Il convient de noter que l'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité de la fonction sur $\mathbb{R}^2$. En effet, cette notion que nous n'aborderons pas généralise en dimension supérieure la notion de dérivée.

Également, la dérivée dans $\mathbb{C}$ est très différente de la dérivée dans $\mathbb{R}$. Elle relève de l'analyse complexe et nous ne l'aborderons pas.

27.11 Exercices

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := 4x^3 - 5x^2 + x - 1$.
2. $f_2(x) := 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.
3. $f_3(x) := (x^2+1)(x^3-2x)$.
4. $f_4(x) := \frac{2x^2-3}{x^2+7}$.
5. $f_5(x) := \frac{2x-1}{x+1}$.
6. $f_6(x) := -x + 2 + \frac{2}{3x}$.
7. $f_7(x) := \frac{1}{x+x^2}$.
8. $f_8(x) := (2x+1)^2$.
9. $f_9(x) := \sqrt{x}(5x-3)$.
10. $f_{10}(x) := x^3\cos(5x+1)$.
11. $f_{11}(x) := e^{\cos(x)}$.
12. $f_{12}(x) := x\log(x)$.
13. $f_{13}(x) := \log(e^x+1)$.
14. $f_{14}(x) := e^{x^3+2x^2+3x+4}$.
15. $f_{15}(x) := e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.
16. $f_{16}(x) := \log(e^x+\sin(x))$.

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := \frac{x}{x^2+1}$.
2. $f_2(x) := \frac{\cos(2x)}{x^2-2}$.
3. $f_3(x) := \log(\cos(2x))$.
4. $f_4(x) := \frac{x}{\sin(x)}$.
5. $f_5(x) := \log(x - \sqrt{x^2-1})$.
6. $f_6(x) := \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$, $x > 1$.
7. $f_7(x) := \log(\log(x))$.
8. $f_8(x) := \log(\log(\log(x)))$.

Exercice 3

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) := (x-a)g(x)$. Montrer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Chapitre 28

Développements limités

Dans ce chapitre, nous allons voir un outil très utile en analyse asymptotique. Il s'agit ici plus de savoir-faire que de savoir. Il convient donc de beaucoup pratiquer pour maîtriser cet outil.

28.1 Comparaison locale des fonctions

D'abord, on va introduire la notion de "petit o", notation que l'on doit à Landau. On peut comparer les fonctions au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, auquel cas les deux fonctions f et g que l'on considère sont définies sur $\mathcal{J}_a :=]a-\epsilon; a[\cup]a; a+\epsilon[$ où $\epsilon > 0$ est assez petit. On peut également comparer f et g au voisinage de $+\infty$, auquel cas les fonctions sont définies sur $\mathcal{J}_{+\infty} := [R; +\infty[$ où R est un réel assez grand (non nécessairement positif). Enfin, on peut les comparer au voisinage de $-\infty$ et alors les fonctions sont définies sur $\mathcal{J}_{-\infty} :=]-\infty; R]$ où R est un réel assez petit (non nécessairement négatif).

Définition 28.1.1. *On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a s'il existe une fonction ρ de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \rho(x) = 0$ et $f(x) = \rho(x)g(x)$ pour $x \in \mathcal{J}_a$.*

Notation 28.1.2. *Si $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a, on écrit $f(x) = o_a(g(x))$ ou $f = o_a(g)$. On dit alors que "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$ au voisinage de a".*

Remarque 28.1.3. *Si la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $\mathcal{J}_a$, alors $f(x) = o_a(g(x))$ est équivalent à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Exemple 28.1.4. *Si $f(x)$ est un petit o de 1, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.*

Remarque 28.1.5. *Pour toute fonction f, on a $o_a(-f(x)) = o_a(f(x))$.*

La notation de négligeabilité permet d'appréhender celle d'équivalence.

Définition 28.1.6. *On dit que f est équivalente à g en a si $f(x) - g(x) = o_a\left(g(x)\right)$.*

Notation 28.1.7. *Si f est équivalente à g, alors on écrit $f \sim_a g$.*

Remarque 28.1.8. *Si la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur $\mathcal{J}_a$, alors $f \sim_a g$ est équivalent à $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Exemple 28.1.9. *On pose $f(x) := \log(1+x)$ et $g(x) = x$. Alors $f \sim_0 g$.*

Proposition 28.1.10. *On suppose $f \sim_a g$. Alors la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si la limite $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe. De plus, le cas échéant, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.*

Démonstration. Comme $f \sim_a g$, il existe une fonction ρ de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} \rho(x) = 0$ et $f(x) = g(x) + \rho(x)g(x)$. Si g admet une limite en a, alors $f = (1+\rho)g$ en admet une aussi et de plus

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (1 + \rho(x))g(x) = \lim_{x \to a} g(x)\,.$$

Réciproquement, on suppose que g n'admet pas de limite en a. Alors, on peut construire deux suites $(a_n)_n$ et $(a'_n)_n$ qui convergent vers a et telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(a_n) = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g(a'_n) = l' \neq l$. Il convient de noter que l comme l' peuvent être des réels ou être égaux à $+\infty$ ou même à $-\infty$. Il n'est pas difficile de montrer par la caractérisation séquentielle de la limite que l'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$ si $l \in \mathbb{R}$. De manière similaire, comme $\rho(a_n) \longrightarrow 0$, si $l = +\infty$, on a pour n assez grand $f(a_n) \geq \frac{1}{2} g(a_n) \longrightarrow +\infty$. Également, si $l = -\infty$, on a pour n assez grand $f(a_n) \leq \frac{1}{2} g(a_n) \longrightarrow -\infty$. Par conséquent, on a trouvé deux suites $(a_n)_n$ et $(a'_n)_n$ qui convergent vers a et telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a'_n) = l' \neq l$ ce qui prouve que la fonction f n'admet pas de limite en a.

□

On peut faire des opérations simples sur les équivalences.

Proposition 28.1.11. *Soient f, g, h et k quatre fonctions de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

- *L'équivalence est une relation d'équivalence :*
  - *L'équivalence est réflexive : $f \sim_a f$.*
  - *L'équivalence est symétrique : $f \sim_a g$ implique $g \sim_a f$.*
  - *L'équivalence est transitive : $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ implique $f \sim_a h$.*
- *Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$ alors $fh \sim_a gk$.*
- *Si $f \sim_a g$ alors $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$.*
- *Si $f = o_a(g)$ et $g \sim_a h$ alors $f = o_a(h)$.*

- *Si u est une fonction telle que $\lim_{x\to b} u(x) = a$, alors $f \sim_a g$ implique*
$$f \circ u \sim_b g \circ u\,.$$

Démonstration. **1.** D'abord, $f(x) = f(x)(1+\rho(x))$ où $\rho(x) := 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\lim_{x\to a} \rho(x) = 0$ ce qui montre $f \sim_a f$. Ensuite, si $f \sim_a g$, il existe une fonction ρ définie dans un voisinage de a et telle que $\lim_{x\to a} \rho(x) = 0$ et $f(x) = g(x)(1+\rho(x))$. Immédiatement, il vient $g(x) = f(x)\left(1 - \frac{\rho(x)}{1+\rho(x)}\right)$ pour x assez proche de a (et tel que $|1+\rho(x)| \geq \delta_0 > 0$. En posant $\widetilde{\rho}(x) := -\frac{\rho(x)}{1+\rho(x)}$, on a montré que l'on a $g(x) = f(x)(1+\widetilde{\rho}(x))$ avec $\lim_{x\to a} \widetilde{\rho}(x) = 0$ d'où $g \sim_a f$. On suppose maintenant que l'on a $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$. Alors, $f(x) = g(x)(1+o_a(1))$ et $g(x) = h(x)(1+o_a(1))$ d'où $f(x) = h(x)(1+2o_a(1)+o_a(1)^2) = h(x)(1+o_a(1))$ si bien que $f \sim_a h$.

2. On suppose ici $f(x) = g(x)(1+o_a(1))$ et $h(x) = k(x)(1+o_a(1))$ d'où $(fh)(x) = (gk)(x)(1+2o_a(1)+o_a(1)^2)) = (gk)(x)(1+o_a(1))$.

3. On a $f(x) = g(x)(1+o_a(1))$ d'où $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)}\frac{1}{1+o_a(1)} = \frac{1}{g(x)}\left(1 - \frac{o_a(1)}{1+o_a(1)}\right) = \frac{1}{g(x)}(1+o_a(1))$ d'où $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$.

4. Ici, $f(x) = g(x)o_a(1)$ et $g(x) = h(x)(1+o_a(1))$ d'où $f(x) = h(x)(o_a(1) + o_a(1)^2) = o_a(1)h(x) = o_a(h(x))$ d'où $f = o_a(h)$.

5. On a $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$. Donc, par composition des limites, on a
$$\lim_{x\to b} \frac{f(u(x)) - g(u(x))}{g(u(x))} = 0\,,$$
si bien que l'on a $f\circ u - g \circ u = o_b(g\circ u)$ d'où $f \circ u \sim_b g \circ u$.

□

28.2 DL d'une fonction en un point

Le développement limité consiste à aller encore plus loin dans l'approximation. Par ailleurs, on écrit généralement "DL" plutôt que "développement limité".

28.2.1 Définition

Dans ce paragraphe, $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{J}_a :=]a-\epsilon; a[\cup]a; a+\epsilon[$ pour $\epsilon > 0$ assez petit.

Notation 28.2.1. *Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathcal{J}_a$. On écrit $f(x) = g(x) + o_a(h(x))$ si $f(x) - g(x) = o_a(h(x))$.*

Définition 28.2.2. *Soit f de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n s'il existe des réels $a_0, \cdots, a_n$ tels que*
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right)\,.$$

Définition 28.2.3. *La fonction polynomiale* $x \mapsto P_n(x) := a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ *s'appelle la partie régulière du développement limité.*

Remarque 28.2.4. *On peut prouver facilement que cette partie régulière est unique.*

Proposition 28.2.5. *Si* f *admet un développement limité en* a *à l'ordre* n *alors pour tout* $k \in [\![0;n]\!]$, f *admet un développement limité en* a *à l'ordre* k *de partie régulière* $P_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j(x-a)^j$, *c'est-à-dire que l'on a tronqué les termes de puissance supérieure ou égale à* $k+1$.

Remarque 28.2.6. *La fonction* f *admet un développement limité en* a *à l'ordre* n *si et seulement si la fonction* g *définie par* $g(x) := f(x+a)$ *en admet un en* 0 *à l'ordre* n.

En particulier, on aime à se ramener au cas du DL en 0 pour simplifier.

28.2.2 Premières propriétés

On va ici mixer le DL et la parité de la fonction.

Proposition 28.2.7. *On suppose que la fonction* f *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)\,.$$

Alors, si f *est paire, on a* $a_{2k+1} = 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leq 2k+1 \leq n$.

Démonstration. Comme f est paire, en posant $g(x) := f(-x)$, il s'ensuit que g admet un DL à l'ordre n en 0 avec la même partie régulière que f :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)\,.$$

Mais, on a aussi

$$g(x) = f(-x) = P_n(-x) + o_0((-x)^n)\,.$$

Or, $o_0((-x)^n) = o_0(x^n)$. On a donc, par unicité de la partie régulière du développement limité à l'ordre n en 0 de g : $P_n(x) = P_n(-x)$ si bien que le polynôme P_n est pair et tous les termes associés à des puissances impaires sont nuls. □

On a de même :

Proposition 28.2.8. *On suppose que la fonction* f *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)\,.$$

Alors, si f *est impaire, on a* $a_{2k} = 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \leq 2k \leq n$.

Exercice 28.2.9. *Démontrer la proposition.*

Il convient maintenant de calculer les coefficients a_i pour que cela ait un réel intérêt.

Théorème 28.2.10 (Formule de Taylor-Young)**.** *On suppose que la fonction f de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathcal{J}_a$. Alors, f admet un développement limité en a d'ordre n et l'on a de plus :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right) . \qquad (28.1)$$

La preuve est immédiate : voir Théorème 27.8.1.

Remarque 28.2.11. *Une fonction f peut admettre un développement limité à l'ordre n en un point sans pour autant être $n+1$ fois dérivable, voire sans être dérivable du tout.*

28.2.3 Opérations sur les développements limités

28.2.3.1 Somme de deux DL

Commençons par la somme de deux développements limités.

Proposition 28.2.12. *On suppose que l'on a*

$$f(x) = P_n(x) + o_a((x-a)^n) \quad et \quad g(x) = Q_n(x) + o_a((x-a)^n)\,,$$

c'est-à-dire que f et g admettent un DL à l'ordre n en a. Alors, $f+g$ admet un DL à l'ordre n en a et de plus la partie régulière de $f+g$ est la somme des deux parties régulières :

$$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o_a((x-a)^n)\,,$$

On admet la Proposition.

28.2.3.2 Produit de deux DL

Le produit de deux développements limités est plus délicat. On serait tenté de dire que la partie régulière du produit est le produit des parties régulières mais alors on obtiendrait un polynôme de degré $2n > n$ dès que $n \geq 1$. Il convient donc de tronquer à l'ordre n le produit des deux parties régulières.

Plutôt que de donner le résultat théorique, procédons à un exemple pratique.

Exemple 28.2.13. *On cherche à trouver un développement limité à l'ordre cinq en 0 de la fonction $f(x) := \frac{\log(1+x)}{1-x}$. D'abord, on sait (voir Section 28.4 pour une preuve) :*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o_0(x^5)\,,$$

et

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)\,.$$

On procède au produit et **on ne garde que les puissances inférieures ou égales à** 5 *:*

$$\begin{aligned}
&f(x)\\
=&\big(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)\big) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o_0(x^5)\right)\\
=&x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o_0(x^5)\\
&\quad + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o_0(x^5)\\
&\qquad + x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + o_0(x^5)\\
&\qquad\quad + x^4 - \frac{x^5}{2} + o_0(x^5)\\
&\qquad\qquad + x^5 + o_0(x^5)\\
=&x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{47}{60}x^5 + o_0(x^5)\,.
\end{aligned}$$

28.2.3.3 Composition de deux DL

On suppose que f admet un DL à l'ordre n en a de partie régulière P_n avec $P_n(a) = f(a) = 0$.

On suppose que g admet un DL à l'ordre n en 0 de partie régulière Q_n. (Rappelons en effet que l'on se ramène souvent au DL en 0).

Alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n en a et sa partie régulière R_n s'obtient en tronquant à l'ordre n le polynôme $Q_n \circ P_n$.

Exemple 28.2.14. *Calculons le DL à l'ordre* 4 *en* 0 *de la fonction* $f(x) := e^{1-\cos(x)}$.

D'abord,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\,.$$

et

$$\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}
f(x) =& \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) \\
=& 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right)^2 \\
& + o_0(x^4) \\
=& 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o_0(x^4) \\
=& 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o_0(x^4)\,.
\end{aligned}$$

28.2.3.4 Dérivation d'un DL

Si f admet un DL d'ordre n en a de partie régulière P_n **et** si f' admet un DL d'ordre $n-1$ en a de partie régulière Q_{n-1}, alors $Q_{n-1}(x) = P_n'(x)$.

Il convient de vérifier que f' admet bien un DL d'ordre $n-1$. C'est notamment le cas si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En effet, f peut admettre un DL à l'ordre n sans que f' en admette un à l'ordre $n-1$.

28.2.3.5 Intégration d'un DL

Si f admet un DL d'ordre n en a de partie régulière P_n alors la primitive de f qui s'annule en a c'est-à-dire la fonction $F(t) := \int_a^t f(s)\mathrm{d}s$ admet un DL à l'ordre $n+1$ en a de partie régulière Q_{n+1} telle que $Q_{n+1}(x) = \int_a^x P_n(y)\mathrm{d}y$.

Exemple 28.2.15. *On sait que l'on a $f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n)$. Alors la primitive qui s'annule en 0 de f est $F(x) := -\log(1-x)$, pour x au voisinage de 0. De plus :*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o_0(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^{n+1})\,.$$

28.2.4 Développements limités au voisinage de l'infini

Définition 28.2.16. *Soit f une fonction définie sur $[R;+\infty[$ avec $R > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f admet un DL à l'ordre n en $+\infty$ si la fonction g définie par $g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL à l'ordre n en 0.*

Cela consiste ainsi à simplement faire le changement de variable $u := \frac{1}{x}$.

28.3 Applications

Il y a diverses applications aux développements limités. On peut penser à l'étude des extremums locaux d'une courbe, aux branches infinies des courbes...

On peut également calculer des limites qui sont problématiques à obtenir.

28.4 Développements limités usuels

On termine ce chapitre en donnant des développements limités usuels en 0 :

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.
2. $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.
3. $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
4. $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
5. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
6. $e^{-x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
7. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$. En utilisant la parité judicieusement, on a même mieux : $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
8. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$. En utilisant l'imparité judicieusement, on a même mieux : $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
9. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
10. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
11. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\prod_{p=0}^{n-1}(\alpha-p)}{n!}x^n$.
12. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + o(x^5)$.

Donnons les preuves de ces DL.

Démonstration. **1.** D'abord, si x est asssez petit (proche de 0), $x \neq 1$ d'où $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ d'où $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\frac{x}{1-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$ d'où le DL annoncé.

2. On pose $y := -x$ et alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{n} y^k + o(y^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.

3. Le troisième DL s'obtient en intégrant le premier.

4. Le quatrième DL s'obtient en intégrant le deuxième.

5. On remarque que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto e^x$ en 0 est toujours 1 d'où l'on conclut avec la formule (28.1) (Taylor-Young).

6. On pose $y := -x$ d'où $e^{-x} = e^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} + o(y^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o((-x)^n)$, ce qui achève la preuve.

7. On a par définition :

$$\begin{aligned}\cosh(x) =&\frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ =&\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\right)+o(x^{2n+1})\\ =&\sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2n+1})\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

8. On fait de même que précédemment avec le sinus hyperbolique.

9. On utilise la formule d'Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et l'on aboutit au résultat.

10. On utilise la formule d'Euler : $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et l'on aboutit au résultat.

11. On peut procéder par récurrence et utiliser la formule (28.1) (Taylor-Young).

12. On applique le onzième DL avec $\alpha := \frac{1}{2}$.

□

28.5 Exercices

Exercice 1

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \tan(x)$.
2. $DL_5\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \tan(x)$.
3. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \log(1+x)$.
4. $DL_4(3)$ de $x \mapsto \log(1+x)$.
5. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
6. $DL_3(3)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
7. $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^x$.
8. $DL_5(\pi)$ de $x \mapsto e^x$.
9. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \log(2+\sin(x))$.
10. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+x)^x$. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2}$.
11. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \log\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.
12. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.
13. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sqrt{3+\cos(x)}$.

Exercice 2

On pose $f(x) := \frac{x^2-1}{x} \exp\left\{\frac{1}{x}\right\}$. Écrire le $DL_3(+\infty)$ de f.

Chapitre 29

Calcul intégral

Dans ce chapitre, on construit l'intégrale de Riemann. L'intégrale de Lebesgue est seulement donnée.

29.1 Intégration sur un segment

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Dans cette section, on va s'intéresser à l'intégration sur le segment $[a;b]$.

29.1.1 Fonctions continues par morceaux

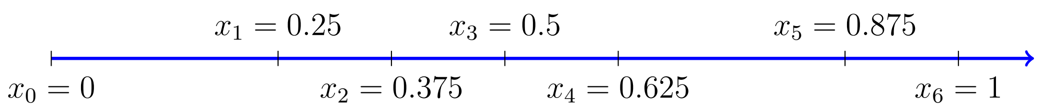
Définition 29.1.1. *On appelle subdivision du segment* $[a;b]$ *toute suite finie* $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *strictement croissante telle que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$.

Définition 29.1.2. *On appelle "pas de la subdivision"* σ*, le nombre*

$$\Pi(\sigma) := \sup_{i \in [\![0;n-1]\!]} (x_{i+1} - x_i) \ .$$

Exemple 29.1.3. *Prenons par exemple* $a = 0$ *et* $b = 1$*. Alors voici une subdivision :*

FIGURE 29.1 – Subdivision



On note que son pas est de $\frac{1}{4}$.

Exemple 29.1.4. *On donne une subdivision particulière. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $i \in [\![0;n-1]\!]$*, on a* $x_{i+1} - x_i = \Pi(\sigma) = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b-a}{n}$*. Ainsi, on obtient* $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.

Définition 29.1.5. *Une fonction φ définie sur $[a;b]$, à valeurs réelles, est dite en escalier sur $[a;b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, la restriction de la fonction φ à l'intervalle ouvert $]x_i;x_{i+1}[$ est constante.*

On a donc : pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, pour tout $x \in]x_i;x_{i+1}[$, $\varphi(x) = \lambda_i$ et pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $\varphi(x_i) = \mu_i$.

Définition 29.1.6. *On dit que la subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision subordonnée à φ ou attachée à φ.*

Théorème 29.1.7. *On note $\mathcal{E}([a;b];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$. Cet ensemble muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir page 201 pour la définition d'un espace vectoriel. Si on le munit de l'addition et du produit, c'est un anneau, voir page 154 pour la définition d'un anneau. Ainsi, $(\mathcal{E}([a;b];\mathbb{R}),+,\times,.)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, voir page 185 pour la définition d'une algèbre.*

On admet le théorème.

Définition 29.1.8. *On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est en escalier sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de ce segment.*

Notation 29.1.9. *On note $\mathcal{E}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 29.1.10. $(\mathcal{E}(\mathbb{R};\mathbb{R}),+,\times,.)$ *est une algèbre sur $\mathbb{R}$.*

On admet la proposition.

Proposition 29.1.11. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. Alors, cette fonction f est bornée sur $[a;b]$.*

Démonstration. Soit $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ la suite strictement croissante d'éléments de $[a;b]$ telle que $x_0 = a$, $x_n = b$ et contenant tous les points de discontinuité de f.
Alors σ est une subdivision de $[a;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i;x_{i+1}[$ est continue sur $]x_i;x_{i+1}[$.
Pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, on définit alors la fonction f_i par $f_i(x) := f(x)$ pour tout $x \in]x_i;x_{i+1}[$, $f_i(x_i) = \lim\limits_{x\to x_i^+} f(x)$ et $f_i(x_{i+1}) = \lim\limits_{x\to x_{i+1}^-} f(x)$. La fonction f_i est définie sur $[x_i;x_{i+1}]$ et continue sur $[x_i;x_{i+1}]$. La fonction f_i est donc bornée sur $[x_i;x_{i+1}]$ d'après le Théorème 26.3.7 à la page 303. On en déduit la bornitude de f. $\square$

Propriétés 29.1.12. 1. *Toute fonction en escalier sur $[a;b]$ est continue par morceaux sur $[a;b]$.*
2. *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et sur $[b;c]$ (avec $a < b < c$) alors f est continue par morceaux sur $[a;c]$.*
3. *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$, alors f^+, f^- et $|f|$ le sont également où l'on a $f^+ := \max(f;0)$ et $f^- = \max(-f;0)$.*

Théorème 29.1.13. *Étant donnée une fonction f définie, continue par morceaux sur le segment $[a;b]$, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier sur $[a;b]$, φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \epsilon$.*

On admet le théorème.

Ce dernier signifie que les fonctions en escalier sont les briques élémentaires pour la construction de l'intégrale de Riemann.

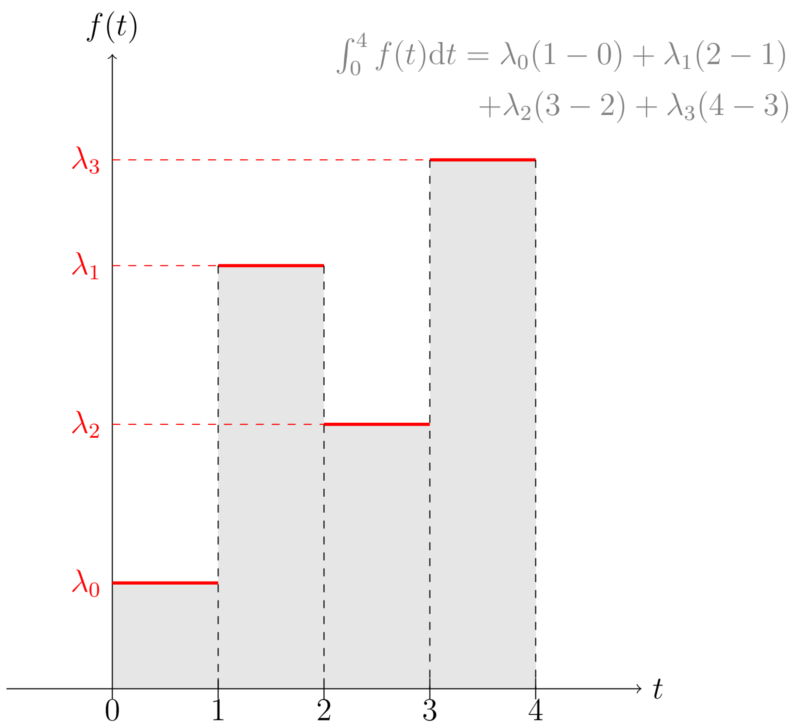
29.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 29.1.14. *Soit φ une fonction en escalier sur $[a;b]$. Soit $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a;b]$ subordonnée à φ. Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]x_i; x_{i+1}[$. Alors, on définit l'intégrale de φ sur $[a;b]$ par*

$$I_{[a;b]}(\varphi) := \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i).$$

On illustre graphiquement cette définition :

FIGURE 29.2 – Intégrale d'une fonction en escalier



Proposition 29.1.15. *$I_{[a;b]}(\varphi)$ est un réel, indépendant de la subdivision σ subordonnée à φ.*

Démonstration. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, pour tout $y \in]x_k; x_{k+1}[$, pour tout $x \in]x_k; y[$, $\varphi(x) = \lambda_k$ et pour tout $x \in [y; x_{k+1}]$, $\varphi(x) = \lambda_k$. Et :

$$\lambda_k(y - x_k) + \lambda_k(x_{k+1} - y) = \lambda_k(x_{k+1} - x_k).$$

Pour toute subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ de $[a; b]$ subordonnée à φ, les valeurs $\varphi(x_0), \cdots, \varphi(x_{n-1})$ n'interviennent pas dans le calcul de $I_{[a;b]}(\varphi)$.
Le nombre $I_{[a;b]}(\varphi)$ est indépendant des valeurs prises par φ en un nombre fini de points de $[a; b]$. Si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a; b]$ et si le cardinal de $\{x \in [a; b] \ : \ \varphi(x) \neq \psi(x)\}$ est fini, alors $I_{[a;b]}(\varphi) = I_{[a;b]}(\psi)$. □

Proposition 29.1.16. *L'application $\varphi \mapsto I_{[a;b]}(\varphi)$ est une application linéaire de l'espace des fonctions en escalier sur $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a; b]$ et soit α un réel. Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ une subdivision de $[a; b]$ subordonnée à φ et ψ. Alors, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, pour tout $x \in]x_k; x_{k+1}[$, $\varphi(x) = \lambda_k$ et $\psi(x) = \mu_k$.
On a :

$$(\alpha\varphi + \psi)(x) = \alpha\lambda_k + \mu_k\,.$$

Par définition, $I_{[a;b]}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x_{k+1} - x_k)$ et $I_{[a;b]}(\psi) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k(x_{k+1} - x_k)$. D'où

$$\begin{aligned} I_{[a;b]}(\alpha\varphi + \psi) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha\lambda_k + \mu_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha\lambda_k (x_{k+1} - x_k) + \mu_k (x_{k+1} - x_k)] \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k (x_{k+1} - x_k) \\ &= \alpha I_{[a;b]}(\varphi) + I_{[a;b]}(\psi)\,. \end{aligned}$$

□

Proposition 29.1.17. *Si φ est une fonction en escalier positive sur $[a; b]$, alors l'intégrale de φ sur $[a; b]$, $I_{[a;b]}(\varphi)$, est positive.*

Démonstration. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\lambda_k \geq 0$ d'où $\lambda_k(x_{k+1} - x_k) \geq 0$. On en déduit la positivité de $I_{[a;b]}(\varphi)$. □

On en déduit automatiquement que si deux fonctions en escalier sur $[a; b]$, φ et ψ sont telles que $\varphi \leq \psi$, alors $I_{[a;b]}(\varphi) \leq I_{[a;b]}(\psi)$. Pour ce faire, on remarque $\psi = (\psi - \varphi) + \varphi$, puis la positivité de l'intégrale de $\psi - \varphi$ et la linéarité de l'intégrale achèvent la preuve.

Proposition 29.1.18 (Relation de Chasles)**.** *Soient trois réels $a < b < c$. La fonction φ est en escalier sur $[a;c]$ si et seulement si elle est en escalier sur $[a;b]$ et sur $[b;c]$. De plus, il vient :*

$$I_{[a;c]}(\varphi) = I_{[a;b]}(\varphi) + I_{[b;c]}(\varphi)\,.$$

Il suffit de choisir une subdivision σ de $[a;c]$ comprenant b pour faire la preuve.

29.1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[a;b]$. On pose

$$\mathcal{I}^-(f) = \left\{I_{[a;b]}(\varphi)\ :\ \varphi \text{ en escalier sur } [a;b] \text{ telle que } \varphi \leq f\right\}$$

et

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{I_{[a;b]}(\psi)\ :\ \psi \text{ en escalier sur } [a;b] \text{ telle que } f \leq \psi\right\}\,.$$

La fonction f est bornée sur $[a;b]$. En notant $m := \inf_{[a;b]}(f)$ et $M := \sup_{[a;b]}(f)$, on a pour tout $x \in [a;b]$: $m \leq f(x) \leq M$. Soient φ_0 et ψ_0 les fonctions en escalier sur $[a;b]$ définies par $\varphi_0(x) := m$ et $\psi_0(x) := M$ pour tout $x \in [a;b]$. On a

$$\varphi_0 \leq f \leq \psi_0\,.$$

Conséquemment, $I_{[a;b]}(\varphi_0) \in \mathcal{I}^-$ et $I_{[a;b]}(\psi_0) \in \mathcal{I}^+$. Or, le calcul nous donne $I_{[a;b]}(\varphi_0) = m(b-a)$ et $I_{[a;b]}(\psi_0) = M(b-a)$.
On en déduit que $\mathcal{I}^-(f)$ et $\mathcal{I}^+(f)$ sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a;b]$ vérifiant $\varphi \leq f \leq \psi$. En particulier, $\varphi \leq \psi$ d'où $I_{[a;b]}(\varphi) \leq I_{[a;b]}(\psi)$.
Par conséquent, tout élément de $\mathcal{I}^-(f)$ est minorant de $\mathcal{I}^+(f)$ et tout élément de $\mathcal{I}^+(f)$ est majorant de $\mathcal{I}^-(f)$. Ainsi, $\mathcal{I}^-(f)$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Par construction de $\mathbb{R}$ (corps contenant $\mathbb{Q}$ et dont toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure), elle admet une borne supérieure $I_1(f)$. Et de même, $\mathcal{I}^+(f)$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne inférieure $I_2(f)$. De plus, on a

$$m(b-a) \leq I_1(f) \leq I_2(f) \leq M(b-a)\,.$$

Or, d'après le Théorème 29.1.13, pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_ϵ et ψ_ϵ telles que $0 \leq \psi_\epsilon - \varphi_\epsilon \leq \epsilon$. Il vient $I_{[a;b]}(\varphi_\epsilon) \in \mathcal{I}^-$ et $I_{[a;b]}(\psi_\epsilon) \in \mathcal{I}^+$. On en déduit

$$0 \leq I_2(f) - I_1(f) \leq I_{[a;b]}\left(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon\right) \leq I_{[a;b]}(\epsilon) = \epsilon(b-a)\,.$$

En conséquence, $I_2(f) = I_1(f)$.
Cette valeur commune est appelée l'intégrale sur $[a;b]$ de la fonction f, notée $\int_{[a;b]} f$.

Toutes les propriétés vraies pour l'intégrale d'une fonction en escalier le sont également pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Proposition 29.1.19. **1.** *L'intégrale $\int_{[a;b]} f$ est un réel indépendant des valeurs prises par f en un nombre fini de points de $[a;b]$.*
2. *La fonction $f \mapsto \int_{[a;b]} f$ est une application linéaire de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.*
3. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$. Si $f \leq g$ alors $\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$.*

On admet cette proposition.

Proposition 29.1.20 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[a;b]$. Alors, on a*

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f| \,.$$

Démonstration. La fonction $|f|$ est également continue par morceaux et l'on a de plus : $-|f| \leq f \leq |f|$. Par conséquent, on dispose de l'inégalité

$$\int_{[a;b]} -|f| \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f| \,.$$

La linéarité de l'intégrale nous donne

$$-\int_{[a;b]} |f| \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f| \,.$$

Ceci achève la preuve. □

Proposition 29.1.21 (Relation de Chasles)**.** *Soient a, b, c trois réels vérifiant $a < b < c$. Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[a;c]$. Cette fonction est donc définie, continue par morceaux sur $[a;b]$ et sur $[b;c]$. La réciproque est vraie. De plus, on a*

$$\int_{[a;c]} f = \int_{[a;b]} f + \int_{[b;c]} f \,.$$

Proposition 29.1.22 (Inégalité de la moyenne)**.** *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, alors la fonction fg est continue par morceaux sur $[a;b]$. De plus, on a*

$$\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leq \sup_{[a;b]} |f| \int_{[a;b]} |g|$$

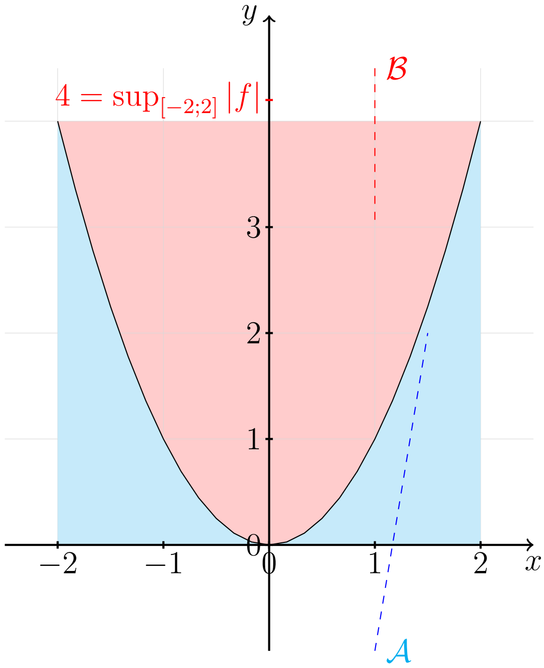
Exercice 29.1.23. *En procédant comme dans la preuve de la Proposition 29.1.20, démontrer l'inégalité de la moyenne.*

On remarque qu'en prenant $g = \mathbb{1}_{[a;b]}$, on retrouve

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq (b-a) \sup_{[a;b]} |f| \,. \tag{29.1}$$

Ceci s'illustre bien sur la représentation graphique suivante :

FIGURE 29.3 – Bornitude d'une intégrale



$$\mathcal{A} \leq \mathcal{A} + \mathcal{B} = 4 \times \sup_{[-2;2]} |f|$$

Théorème 29.1.24 (Théorème fondamental)**.** *Soit une fonction f définie, continue à valeurs réelles positives sur le segment $[a;b]$. Cette fonction est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.*

Démonstration. On sait déjà que si f est nulle alors son intégrale est nulle. Il reste à prouver que si son intégrale est nulle, elle est nulle. On procède par contraposée. Soit une fonction f continue par morceaux, positive et non nulle. Il existe donc $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) > 0$. La fonction f est continue en x_0. En choisissant $\epsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset [a;b]$ et tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$. Il vient

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2},$$

si $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$.

Soit φ la fonction en escalier sur $[a;b]$ définie par

- Pour tout $x \in [a; x_0 - \alpha]$, $\varphi(x) = 0$.
- Pour tout $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, $\varphi(x) = \frac{f(x_0)}{2}$.
- Pour tout $x \in [x_0 + \alpha; b]$, $\varphi(x) = 0$.

Le calcul nous donne $\int_{[a;b]} \varphi = \alpha f(x_0)$. Or, $\alpha > 0$ et $f(x_0) > 0$ donc $\int_{[a;b]} \varphi > 0$. Puis, comme $\varphi \leq f$, on obtient la positivité stricte de l'intégrale de f sur $[a;b]$. □

Proposition 29.1.25 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient f et g deux fonctions définies, continues sur le segment $I = [a; b]$ alors :*

$$\left|\int_I fg\right| \leq \sqrt{\int_I f^2}\sqrt{\int_I g^2}\,.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si les deux fonctions sont colinéaires.

Démonstration. Si f est identiquement nulle, l'inégalité est vérifiée.
Si f n'est pas identiquement nulle, la fonction f^2 est continue, positive et non identiquement nulle. Donc, d'après le théorème fondamental, l'intégrale de f^2 n'est pas égale à 0. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)^2$ est une fonction continue sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Il vient ainsi :

$$\int_I (\lambda f + g)^2 \geq 0$$

On développe $(\lambda f + g)^2$ et l'on utilise la linéarité de l'intégrale. On en déduit

$$P(\lambda) := \lambda^2 \int_I f^2 + 2\lambda \int_I fg + \int_I g^2 \geq 0\,,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. P est un trinôme du second degré en λ et il est de signe constant. Conséquemment, son discriminant est négatif ou nul ce qui équivaut à

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2\,.$$

De plus, il y a égalité si et seulement s'il existe λ_0 tel que $P(\lambda_0) = 0$ ce qui signifie

$$\int_I (\lambda_0 f + g)^2 = 0\,.$$

D'après le théorème fondamental (Théorème 29.1.24), il vient $\lambda_0 f + g = 0$. La preuve est achevée. □

On donne maintenant une extension de la notion d'intégrale. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue par morceaux sur I, à valeurs réelles. Pour tout $(a; b) \in I^2$, si $a \leq b$, on pose $\int_a^b f := \int_{[a;b]} f$. Si $a > b$, on pose $\int_a^b f := -\int_{[a;b]} f$.
Toutes les propriétés précédentes sont encore vraies.

29.1.4 Sommes de Riemann

Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats classiques sur l'approximation de l'intégrale d'une fonction f continue par une somme de Riemann de la fonction f subordonnée à une subdivision σ de $[a; b]$. Les preuves sont omises car elles sont trop techniques. On ne présente d'ailleurs pas les résultats généraux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la subdivision de pas constant égal à $\frac{b-a}{n}$: $\sigma_n = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

Définition 29.1.26. *La n-ième somme de Riemman associée à la fonction f sur le segment $[a;b]$ est définie par*

$$R_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 29.1.27. *On a la convergence suivante :*

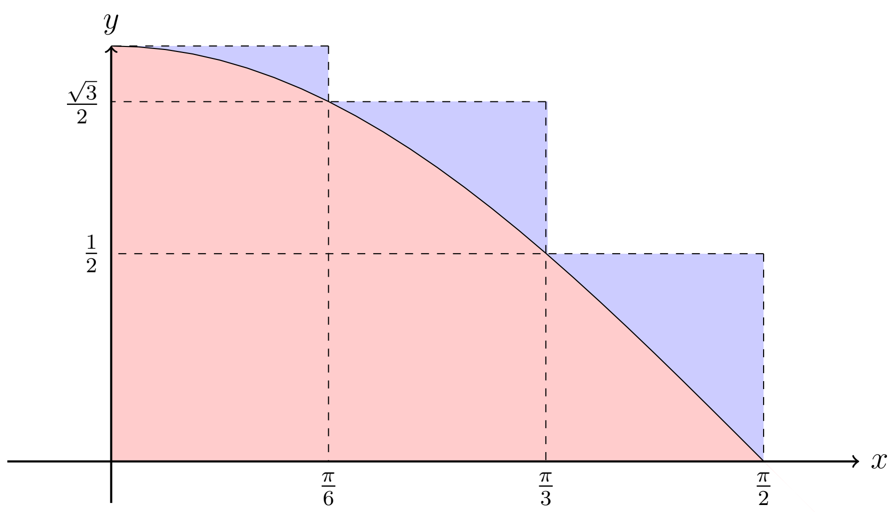
$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} f\,.$$

En d'autres termes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} f\,.$$

On peut illustrer cette méthode d'approximation, la méthode des rectangles, comme suit :

FIGURE 29.4 – Méthode des rectangles



Exemple 29.1.28. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$S_p(n) := \sum_{k=0}^{n-1} k^p.$$

On cherche un équivalent pour n tendant vers l'infini de $S_p(n)$.

Pour ce faire, on remarque

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p .$$

On introduit la fonction $f_p(x) := x^p$*. Ainsi, il vient*

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_p\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{1-0}\int_{[0;1]} f_p = \frac{1}{p+1} .$$

Donc $S_p(n)$ *est équivalent à* $\frac{n^{p+1}}{p+1}$.

29.2 Intégration et dérivation

29.2.1 Primitive et intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction définie, continue sur $[a;b]$ $(a < b)$. Pour tout $x \in [a;b]$, la fonction f est définie, continue sur $[a;x]$ et le nombre $\int_a^x f = \int_{[a;x]} f$ est défini.

Définition 29.2.1. *Une fonction* F *définie sur* $[a;b]$ *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$ *si et seulement si* F *est dérivable sur* $[a;b]$ *et telle que* $F' = f$*.*

Théorème 29.2.2. *Étant donnés une fonction* f *définie, continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, à valeurs réelles, et un élément* a *de* I*, la fonction* $x \mapsto \int_a^x f$ *est l'unique primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a*.*

Démonstration. On pose $F(x) := \int_a^x f$. Alors, $F(a) = 0$. Puis, on calcule la quantité suivante :

$$\frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right)\mathrm{d}t .$$

On se donne ensuite $\epsilon > 0$ quelconque. Alors, pour α assez petit, pour tout $t \in [x-\alpha; x+\alpha]$, on a $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ d'où par l'inégalité (29.1) :

$$\left|\frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) - f(x)\right| \leq \sup_{t\in[x;x+h]} |f(t) - f(x)| \leq \epsilon .$$

□

On peut utiliser ce résultat pour calculer une intégrale :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: [F(t)]_a^b$$

29.2.2 Méthodes d'intégration

29.2.2.1 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$. On a alors

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,.$$

Conséquemment, on a

$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b (uv)'(t)\mathrm{d}t - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Le problème est le suivant : lorsqu'on doit effectuer le calcul de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, il faut identifier les fonctions u et v telles que $f = uv'$ et telles que l'intégrale de $u'v$ soit plus facile à calculer que celle de f.

Exemple 29.2.3. *On calcule*

$$\begin{aligned}\int_1^3 \log(t)\mathrm{d}t =& [t\log(t)]_1^3 - \int_1^3 t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(t)\mathrm{d}t \\ =& 3\log(3) - \int_1^3 t\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ =& 3\log(3) - \int_1^3 \mathrm{d}t \\ =& 3\log(3) - 2\,.\end{aligned}$$

29.2.2.2 Changement de variable

Étant données une fonction f définie, continue sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction φ à valeurs dans I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha;\beta]$, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit F la fonction définie par $F(x) := \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$. La fonction F est la composée de φ et de la fonction $F_0(x) := \int_{\varphi(\alpha)}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, de fonction dérivée f. Ainsi :

$$F'(x) = \varphi'(x)\times\left(F_0'\circ\varphi\right)(x) = (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)\,.$$

Conséquemment, on a

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + C,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Or, $F(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f(t)\mathrm{d}t = 0 = C$. On en déduit $F(x) = \int_{\alpha}^{x} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$. En particulier, en prenant $x = \beta$, on trouve le résultat. $\square$

Exemple 29.2.4. *On cherche à calculer* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\mathrm{d}x$. *On remarque :* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x))\sin(x)\mathrm{d}x$. *On pose* $y := \cos(x)$ *d'où* $\mathrm{d}y = -\sin(x)\mathrm{d}x$. *Il vient*

$$J = -\int_1^0 (1 - y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 (1 - y^2)\mathrm{d}y = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

Exercice 29.2.5. *Montrer que l'on a* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x = \log(2)$.

29.2.2.3 Règles de Bioche

Les règles de Bioche sont utilisées lorsque l'on cherche à intégrer une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques (cosinus, sinus, tangente). L'idée est de faire un changement de variable adéquat. Les règles de Bioche nous disent quel est le bon changement de variable à faire.

Proposition 29.2.6. *Soit* f *une fonction de la forme* $f(t) = G(\cos(t), \sin(t))$ *où* G *est une fraction rationnelle à deux variables. On pose*

$$\mathrm{d}\omega(t) := f(t)\mathrm{d}t\,.$$

dω est une forme différentielle.

- *Si* $\mathrm{d}\omega(-t) = \mathrm{d}\omega(t)$, *on applique le changement de variable* $y := \cos(t)$.
- *Si* $\mathrm{d}\omega(\pi - t) = \mathrm{d}\omega(t)$, *on applique le changement de variable* $y := \sin(t)$.
- *Si* $\mathrm{d}\omega(\pi + t) = \mathrm{d}\omega(t)$, *on applique le changement de variable* $y := \tan(t)$.
- *Sinon, on applique le changement de variable* $y := \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Il est important de ne pas oublier le $\mathrm{d}t$. Ainsi, $\mathrm{d}(-t) = -\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}(\pi - t) = -\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}(\pi + t) = \mathrm{d}t$. Afin de réussir le quatrième changement de variable, on rappelle

$$\cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\,, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1 - u^2}$$

où $u := \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

29.2.2.4 Quelques primitives usuelles

- $\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\log|\cos(x)|$.
- $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\mathrm{d}x = \log|\tan(x)|$.
- $\int \tan^2(x)\mathrm{d}x = \tan(x) - x$.

- $\int \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.
- $\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.
- $\int \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x = 2\arctan(e^x)$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

29.3 Intégrales généralisées

On présente ici la notion d'intégrale généralisée. En d'autres termes, on s'intéresse à ce qu'il se passe en $\pm\infty$. Également, on regarde ce qu'il se passe au voisinage d'un point où la fonction que l'on cherche à intégrer est non bornée.

Définition 29.3.1.

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\mathrm{d}x$$

Et, si f est non bornée en a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Si ces limites existent, on dit que l'intégrale correspondante converge (ou est convergente), sinon elle diverge (ou est divergente).

Exemple 29.3.2. *On considère l'intégrale de Riemann (avec $a>0$) :*
- $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ *converge si $\alpha>1$ et diverge sinon.*
- $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ *converge si $0\le\alpha<1$ et diverge sinon.*

On en déduit un critère de convergence très utile :
- *si pour $x\to\infty$, on a $f(x)\simeq\frac{1}{x^\alpha}$ alors l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge si $\alpha>1$ et diverge sinon.*
- *si pour $x\to 0$, on a $f(x)\simeq\frac{1}{x^\alpha}$ alors $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ converge si $0\le\alpha<1$ et diverge sinon.*

Par extension, on définit (définition au **sens standard**)
- Pour c borné quelconque

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R'\to\infty}\int_{-R'}^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)\mathrm{d}x\,,$$

- et, si f non bornée en $x=c\in\,]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon'\to 0}\int_{c+\epsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On utilise souvent une définition alternative de ces intégrales généralisées dite au sens de la valeur principale de Cauchy :

$$\text{v.p.}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

et, si f non bornée en $x = c \in \,]a,b[$

$$\text{v.p.}\left(\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

Si l'intégrale converge au sens standard, elle converge aussi en partie principale et les deux définitions donnent la même valeur de l'intégrale. Une intégrale peut converger en v.p. sans converger au sens standard.

29.4 Espaces $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

On suppose dans cette section que nous travaillons avec des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On a alors :

- $f = f_x + if_y$ intégrable si et seulement si f_x et f_y sont intégrables.
- $\int \overline{f(t)}\mathrm{d}t = \overline{\int f(t)\mathrm{d}t}$.

29.4.1 Fonctions égales presque partout

Définition 29.4.1. *Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $a := \inf I \geq -\infty$ et $b := \sup I \leq +\infty$. Alors, la longueur de l'intervalle I est*

$$l\,(I) := b - a\,.$$

Éventuellement, cette longueur peut être égale à $+\infty$.

Définition 29.4.2. *Soit un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille d'intervalles $\{I_n^\epsilon\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ telle que*

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^\epsilon \quad \textit{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} l\,(I_n^\epsilon) < \epsilon\,.$$

Proposition 29.4.3. *Tout ensemble dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$) est de mesure nulle. En particulier, $\mathbb{Q}$ est négligeable.*

Démonstration. On montre déjà que tout ensemble dénombrable $\mathbb{E}$ est de mesure nulle. En effet, on peut écrire : $\mathbb{E} = \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Il suffit alors de considérer $I_n^\epsilon := \left]x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\,;\, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right[$.
Puis, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on écrit $r = \frac{p}{q}$ avec p premier avec q et $q > 0$. On considère alors la fonction $f(r) := 2^q(2p+1)$. $\mathbb{Q}$ est donc en bijection avec $\mathbb{Z}$, qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ en prenant la fonction $f(n) := 2n+1$ si $n \geq 0$ et $f(n) := -2n$ si $n < 0$. □

Exemple 29.4.4 (Ensemble triadique de Cantor)**.** *Soit un intervalle $\mathcal{I} := [a;b]$. Alors, on introduit le nouvel ensemble :*

$$\mathcal{T}(\mathcal{I}) = \mathcal{T}([a;b]) := \left[a; a + \frac{b-a}{3}\right] \bigcup \left[a + 2\frac{b-a}{3}; b\right].$$

En d'autres termes, on enlève le tiers central de l'intervalle. Puis, si l'on considère plusieurs intervalles disjoints $\mathcal{I}_1, \cdots, \mathcal{I}_k$, on définit : $\mathcal{T}\left(\bigcup_{p=1}^k \mathcal{I}_p\right) := \bigcup_{p=1}^k \mathcal{T}(\mathcal{I}_p)$. On considère alors la suite d'ensembles définie par $A_0 := [0;1]$ et $A_{n+1} := \mathcal{T}(A_n)$. Cette suite converge vers un ensemble, que l'on appelle ensemble triadique de Cantor. Sa mesure est nulle par construction. Mais cet ensemble n'est pas dénombrable puisqu'il est en bijection avec $\mathbb{R}$.

On admet cette assertion vu qu'elle est assez délicate.

Conséquemment, un ensemble peut ne pas être dénombrable tout en étant de mesure nulle.

Exemple 29.4.5. *Par définition, l'intervalle fermé $[0;1]$ a une longueur de 1 donc sa mesure est non nulle. La mesure de Lebesgue de cet ensemble est d'ailleurs égale à 1.*

Définition 29.4.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \;:\; f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."*

29.4.2 Espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ des fonctions sommables (intégrables)

Définition 29.4.7. *On appelle espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions f dites sommables (ou intégrables au sens de Lebesgue) telles que :*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Remarque 29.4.8. *L'intégrale au sens de Lebesgue est différente de l'intégrale au sens de Riemann qui a été présentée au début du chapitre. Au lieu d'approximer les fonctions par des fonctions en escalier, on les approxime par des fonctions dites étagées. L'intégrale au sens de Lebesgue d'une fonction continue par morceaux est la même que l'intégrale au sens de Riemann.*

Remarque 29.4.9. *En fait, ce n'est pas un espace de fonctions, mais un espace de classe d'équivalence de fonctions. On choisit de ne pas donner d'importance à ce "détail".*

Théorème 29.4.10. *Pour toute fonction dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on pose*

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x\,.$$

C'est une norme sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Définition 29.4.11. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0.$$

On parle aussi de convergence en moyenne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Théorème 29.4.12. *Toute suite de Cauchy (voir Définition 37.6.1) de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ converge. Dit autrement, $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est complet. Voir le chapitre 39 sur la topologie pour en comprendre les enjeux.*

29.4.3 Espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré sommable

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ contient de nombreuses fonctions permettant de modéliser les signaux d'énergie finie ou encore les fonctions d'ondes de la mécanique quantique.

Définition 29.4.13. *On appelle $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des classes d'équivalence des fonctions de carré intégrable :*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)^* f(x) \mathrm{d}x < \infty.$$

Exemple 29.4.14.

- *$x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $x \mapsto \frac{\sin x}{x} \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. En effet, la fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ est bornée. Et, en l'infini ($\pm\infty$), elle est dominée par $\frac{1}{x^2}$ si bien qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. En revanche, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas absolument sommable donc elle n'est pas dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*
- *$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}(1+x^2)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \notin \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Elle est bien dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ vu qu'en l'infini, elle est intégrable et en 0, elle est équivalente à $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Prendre son carré ne pose aucun souci en l'infini mais en 0, on a une équivalence avec $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ donc la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}\right)^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 29.4.15. *Pour tous les éléments f et g de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on pose*

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)^* g(x) \mathrm{d}x\,.$$

C'est un produit hermitien, voir page 255. La norme associée est :

$$||f||_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Définition 29.4.16. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_2 = 0.$$

On parle aussi de convergence en moyenne quadratique :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Théorème 29.4.17. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *est un espace de Hilbert c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée au produit scalaire.*

29.5 Exercices

Exercice 1

Calculez les primitives et intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int xsin(2x)\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int x^n \log x \mathrm{d}x$, avec $n \in \mathbb{Z}$.
- $\displaystyle\int \cos x \log(1+\cos x)\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int \sin(\log x)\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \mathrm{d}x$

Exercice 2

Calculez les primitives et intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 4x^2 + 13x}{4x^2 - 4x + 5}\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 5)}\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x^3 \exp(x + 1)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \sin x \cosh x\mathrm{d}x$

Chapitre 30

Séries numériques

30.1 Généralités

30.1.1 Définition

Soit une suite de réels ou de complexes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 30.1.1. *On définit $(S_n)_{n\geq 0}$, la suite des sommes partielles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_n$ converge.*

Notation 30.1.2. *La série de terme générale u_n est aussi notée $(\sum u_n)$.*

Définition 30.1.3. *La limite de la série est S définie par*

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k =: \sum_{k=0}^{\infty} u_k \,.$$

30.1.2 Remarques

30.1.2.1 Correspondance entre suites et séries

Il y a une correspondance bijective entre les suites et les séries. En effet, toute série $(\sum u_n)$ est en fait la suite des sommes partielles.
Réciproquement, toute suite (u_n) peut être considérée comme une série $(\sum v_n)$. On pose $v_0 := u_0$ et

$$v_n := u_n - u_{n-1} \,,$$

pour tout $n \geq 1$. En effet, on a alors, par somme télescopique, voir page 58 :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_0 + (u_1 - u_0) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n \,.$$

30.1.2.2 Changement d'un nombre fini de termes

Si on change un nombre fini de termes de la série $(\sum u_n)$, on ne change pas la nature de cette série (convergente ou divergente). En revanche, si la série est convergente, on change la limite de celle-ci.

30.1.2.3 Convergence vers 0

Pour que la série $(\sum u_n)$ soit convergente, il est nécessaire que la suite $(u_n)_n$ tende vers 0. En effet, si la série $(\sum u_n)$ converge, cela signifie que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers une limite S. Puis, comme $u_n = S_n - S_{n-1}$, on en déduit que u_n converge vers $S - S = 0$.

Cette condition n'est pas suffisante. On en donne un exemple par la suite.

30.1.3 Exemples

Contre-exemple 30.1.4. *Soit la série* $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ *avec* $u_n := \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. La suite* $(u_n)_n$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini. Toutefois, la série est divergente.*

Démonstration. On pose $T_n := S_{2^n}$. Alors, $T_0 = S_1 = 1$. Puis :

$$T_{n+1} = S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2^{n+1}}} \geq T_n + \frac{2^n}{2^{n+1}} = T_n + \frac{1}{2}\,.$$

Conséquemment, on obtient $T_n \geq 1 + \frac{n}{2}$. Ainsi, la suite de terme général S_{2^n} converge vers l'infini. Comme $u_n \geq 0$, on en déduit la croissance de la suite de terme générale S_n. Ceci achève la preuve. □

Donnons maintenant un exemple de série convergente.

Exemple 30.1.5. *Pour tout* $n \geq 1$*, on pose* $u_n := \frac{1}{n(n+1)}$*. On procède à une décomposition en éléments simples (voir page 161) et l'on obtient*

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n =& \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ =& \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ =& 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1\,. \end{aligned}$$

Donc, la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}\right)$ *est convergente et sa somme vaut* 1.

30.1.4 Espace vectoriel

Proposition 30.1.6 (Somme de séries convergentes)**.** *Soient deux séries réelles ou complexes convergentes* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$*. Alors, la série de terme général* $u_n + v_n$ *est convergente et l'on a de plus*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \,.$$

Proposition 30.1.7. *Soit une série réelle ou complexe convergente* $(\sum u_n)$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors, la série de terme général* λu_n *est convergente et de plus*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n \,.$$

Exercice 30.1.8. *Démontrer les Propositions 30.1.6 et 30.1.7.*

Proposition 30.1.9. *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.*

Remarque 30.1.10. *On ne peut rien dire sur la somme de deux séries divergentes.*

Exemple 30.1.11. *On pose* $u_n := 1$ *et* $v_n := 1$*. Les deux séries de terme général* u_n *et* v_n *sont divergentes (car les suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *ne tendent pas vers* 0*) et leur somme est divergente.*

Contre-exemple 30.1.12. *On pose* $u_n := 1$ *et* $v_n := -1$*. Les deux séries de terme général* u_n *et* v_n *sont divergentes (car les suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *ne tendent pas vers* 0*) mais leur somme est convergente.*

Proposition 30.1.13. *Soit une série réelle ou complexe divergente* $(\sum u_n)$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{C}^*$*. Alors, la série de terme général* λu_n *est divergente.*

Remarque 30.1.14. *Dans la Proposition 30.1.13, on suppose* λ *non nul. En effet, si l'on prenait* $\lambda = 0$*, on aurait*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \,.$$

Pourtant, si $u_n = 1$*,* $0 \times \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 0 \times +\infty$ *ce qui est une forme indéterminée.*

30.1.5 Séries alternées

Définition 30.1.15. *Une série réelle* $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ *est dite alternée si* $(-1)^n u_n$ *est de signe constant.*

30.1.5.1 Critère spécial des séries alternées

Théorème 30.1.16. *Soit une série réelle alternée, $(\sum u_n)$. On se donne les deux hypothèses suivantes :*

- *Le terme général u_n tend vers 0.*
- *La suite $(|u_n|)_n$ est décroissante.*

Alors, la série $(\sum u_n)$ converge.

Démonstration. On suppose, sans rien changer à la généralité que l'on a $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On a alors :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| < 0$$

car la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante. Ainsi, la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante. De même, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante. Puis, on remarque

$$S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} > 0\,.$$

De plus, la quantité $S_{2n} - S_{2n+1}$ tend vers 0. Conséquemment, les deux suites sont adjacentes donc convergent vers une même limite d'après le Théorème 25.3.49 ce qui achève la preuve. □

Proposition 30.1.17. *Sous les hypothèses du Théorème 30.1.16, la somme totale est encadrée par les sommes partielles consécutives et la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue du premier terme négligé. En d'autres termes, si on note $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} u_k$, il vient*

$$S_n \le S_\infty \le S_{n+1} \quad ou \quad S_{n+1} \le S_\infty \le S_n$$

ainsi que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| = |S_\infty - S_n| \le |u_{n+1}|\,.$$

De plus, le signe de S_∞ est celui de u_0.

Exercice 30.1.18. *Démontrer la Proposition 30.1.17.*

Exemple 30.1.19. *On regarde la série $\left(\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$. C'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. La série est donc convergente. On calcule maintenant sa limite comme suit.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\,.\end{aligned}$$

On remarque $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t$ d'où :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \log(2)\,,
\end{aligned}
$$

après application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, que l'on admet.

Le passage de la première ligne à la deuxième ligne vient de la finitude du nombre de termes dans la somme (avant de prendre la limite) et de la linéarité de l'intégrale (voir page 336). Le passage de la deuxième à la troisième provient de la somme des termes d'une suite géométrique (voir page 56).

30.2 Séries à termes réels positifs

On se restreint maintenant aux séries à termes réels positifs. En effet, on peut permuter les termes d'une telle série alors que l'on ne peut pas forcément lorsque la série est générale.

30.2.1 Théorème général de comparaison

Proposition 30.2.1. *Soit une série* $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ *à termes réels positifs. Cette série converge si et seulement si la suite* $(S_n)_n$ *des sommes partielles est majorée. Alors, cette série a pour somme :*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n\,.$$

Démonstration. Si la série converge, la suite des sommes partielles est convergente donc bornée et en particulier, elle est majorée. La suite des sommes partielles est croissante car on a $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$. Donc, si la suite des sommes partielles est majorée, elle est convergente et sa limite est son supremum d'après le Théorème 25.3.37, ce qui achève la preuve. □

Notation 30.2.2. *Soient deux suites à termes positifs* u *et* v*. Alors, s'il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $u_n \leq M v_n$*, on écrira* $u_n = O(v_n)$*.*

Il est important de comprendre que la notation O est différente de la notation o que l'on a déjà vue à la Notation 28.2.1.

Proposition 30.2.3. *Soient deux séries à termes réels positifs $\sum u_n$ et $\sum \alpha_n$. On suppose $\alpha_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = O(\alpha_n)$. Alors, si $\sum \alpha_n$ converge, la série de terme général u_n converge aussi.*

Démonstration. Sous les hypothèses de la Proposition 30.2.3, il existe $M > 0$ tel que $u_n \leq M\alpha_n$. D'où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \,.$$

La suite des sommes partielles est donc majorée. On en déduit la convergence de la série $\sum u_n$ d'après la Proposition 30.2.1. □

Proposition 30.2.4. *Soient deux séries à termes réels positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose $u_n \sim v_n$. Alors, $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge aussi.*

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, on peut remarquer que l'on a $u_n \leq 2v_n$ et $v_n \leq 2u_n$ pour n suffisamment grand. Par conséquent, comme les premiers termes d'une série n'influencent pas sur la convergence ou non de celle-ci, le résultat est immédiat. □

30.2.2 Séries de référence

On va se servir de la précédente section pour déterminer si des séries sont convergentes ou divergentes. Pour cela, on a besoin de quelques séries de référence.

30.2.2.1 Séries géométriques

Ici, le terme général correspond à une suite géométrique :

$$u_n = q^n \,,\ q \geq 0 \,.$$

La suite des sommes partielles est

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \,,$$

si $q \neq 1$. Si $q = 1$, on a $S_n = n + 1 \longrightarrow +\infty$. Donc, si $q = 1$, la série $\sum u_n$ diverge. Puis, si $q > 1$, on a $q^{n+1} \longrightarrow +\infty$ d'où $S_n \longrightarrow +\infty$. Ainsi, la série diverge.
Si $0 \leq q < 1$, on a $q^n \to 0$ d'où $S_n \to \frac{1}{1-q}$. La série converge donc. On peut résumer ceci dans le résultat suivant.

Théorème 30.2.5. *La série géométrique $\left(\sum_{n\geq 0} q^n\right)$ avec $q \geq 0$ converge si et seulement si $0 \leq q < 1$ et alors sa somme est $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.*

30.2.2.2 Séries de Riemann

On présente ici la série de Riemann. Il s'agit aussi de la première définition de la fonction ζ de Riemann.

Théorème 30.2.6. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. On peut prouver facilement ce résultat en utilisant le théorème de comparaison avec une intégrale à savoir le Théorème 30.4.1. On va toutefois le démontrer d'une autre manière.

Soit $n \geq 1$ et $\alpha \neq 0$. On a, suite à un développement limité :

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} - 1\right) \sim -\frac{\alpha}{n}\frac{1}{n^\alpha} = -\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} .$$

D'où l'on obtient l'équivalence

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) .$$

Puis, pour $\alpha \neq 1$, il vient

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) =: v_n .$$

On calcule la somme partielle de la série de terme générale v_n :

$$S'_n := \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) .$$

Si $\alpha > 1$, la suite S'_n converge vers $\frac{1}{\alpha-1}$ donc elle est majorée d'où la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge. La proposition 30.2.3 donne la convergence de la série de Riemann pour $\alpha > 1$.

Réciproquement, si $\alpha < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge d'où la divergence de la série de Riemann pour $\alpha < 1$ s'ensuit.

Enfin, si $\alpha = 1$, on est ramené au cas de la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ dont on a déjà vu la divergence, voir le Contre-exemple 30.1.4 à la page 350.

□

Remarque 30.2.7. *En d'autres termes, la fonction ζ définie par*

$$\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$$

n'est définie que si $\alpha > 1$. On peut, à vrai dire, définir cette fonction sur le demi-plan des complexes de partie réelle strictement supérieure à 1.

Vous pourrez voir définie la fonction zêta en dehors de ce demi-plan. Toutefois, la fonction de Riemann et la série de Riemann ne coïncident que sur ce demi-plan.

30.2.3 Comparaison logarithmique

On va maintenant comparer les quotients successifs entre deux séries, ce qui nous donnera deux tests très utiles pour déterminer la nature (divergence ou convergence) d'une série.

Théorème 30.2.8. *Soient deux suites (u_n) et (v_n) de réels strictement positifs tels que, à partir du rang n_0, on a*

$$\forall n \geq n_0 \,, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \,.$$

Alors, u_n est dominé par α_n : $u_n = O\left(\alpha_n\right)$.

Démonstration. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_n = u_{n_0} \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \,.$$

L'hypothèse du Théorème nous donne

$$u_n \leq u_{n_0} \times \frac{\alpha_{n_0+1}}{\alpha_{n_0}} \times \cdots \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{u_{n_0}}{\alpha_{n_0}} \, \alpha_n \,.$$

Ceci achève la preuve. □

On obtient alors les deux tests suivants.

Théorème 30.2.9 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général u_n est un réel positif strictement. On suppose qu'il existe*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l \,.$$

Alors, si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge. Et, si $l > 1$, la série diverge. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. Supposons que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $l < 1$. Alors, il existe ϵ_0 tel que $l + 2\epsilon_0 = 1$. Puis, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \epsilon_0 = \frac{(1-\epsilon_0)^{n+1}}{(1-\epsilon_0)^n}$. Il s'ensuit $u_n = O((1-\epsilon_0)^n)$. Par conséquent, la série associée à la suite u converge.

Supposons maintenant que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $l > 1$. Alors, il existe ϵ_0 tel que $l - 2\epsilon_0 = 1$. En procédant comme précédemment, on en déduit que $(1+\epsilon_0)^n = O(u_n)$. Comme la série de terme général $(1+\epsilon_0)^n$ diverge, il en est de même pour la série associée à u. □

Théorème 30.2.10 (Critère de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général u_n est un réel positif strictement. On suppose qu'il existe*

$$\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l \,.$$

Alors, si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge. Et, si $l > 1$, la série diverge. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. On suppose dans un premier temps $l < 1$. Alors, pour n assez grand, on a $\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \epsilon_0$ où $\epsilon_0 > 0$. Puis, en mettant à la puissance n, il vient $u_n \leq (1-\epsilon_0)^n$ d'où la convergence de la série est immédiate.

On suppose maintenant que $l > 1$. Alors, pour n assez grand, on a $\sqrt[n]{u_n} \geq 1+\epsilon_0$ où $\epsilon_0 > 0$. Puis, en mettant à la puissance n, il vient $u_n \geq (1+\epsilon_0)^n$ d'où la divergence de la série est immédiate.

□

On termine cette section en donnant deux exemples.

Exemple 30.2.11 (Développement en série entière de l'exponentielle)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. On pose $u_n := \frac{x^n}{n!}$. On applique d'abord le critère de d'Alembert :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 < 1\,.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$. On peut ainsi définir une fonction. Une question naturelle est la continuité ou non d'une série de fonctions continues. On ne répondra pas à cette question dans ce chapitre.

On applique maintenant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}\,.$$

Or, d'après la formule de Stirling, $n! = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\,(1+o(1))$. Aussi, il vient l'équivalence $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$. D'où $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers 0. Il s'ensuit la convergence de la série.

On remarque ici qu'il est plus facile d'utiliser le critère de d'Alembert.

Exemple 30.2.12. *On pose $u_n := \frac{1}{2^{n^2}}$. On applique d'abord le critère de d'Alembert :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = \frac{1}{2^{2n+1}} \longrightarrow 0 < 1\,.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{1}{2^{n^2}}$.

On applique maintenant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 < 1\,.$$

D'où la convergence de la série.

Ici, le critère de Cauchy était plus simple à appliquer. On aurait aussi pu noter : $2^{n^2} > 2^n$ d'où $u_n = O\left(2^{-n}\right)$.

30.3 Séries à termes réels ou complexes

On va maintenant s'adosser autant que faire se peut aux séries à termes réels strictement positifs.

Définition 30.3.1. *Soit $\sum u_n$ une série à terme général réel ou complexe. On dit que la série est absolument convergente si la série des modules $\sum |u_n|$ est convergente.*

Remarque 30.3.2. *Cette définition s'étend aux espaces vectoriels normés en général d'où l'on parle dans ce cours de convergence absolue dans le cas d'une série de fonctions.*

Théorème 30.3.3. *Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente. De plus, on dispose de l'inégalité triangulaire*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| .$$

Démonstration. Soit une série réelle ou complexe $\sum u_n$. On suppose qu'elle est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. La convergence de la série $\sum u_n$ est équivalente à la convergence de la suite (S_n). Montrons que la suite (S_n) est de Cauchy (voir Définition 37.6.1). En d'autres termes, soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| .$$

On peut ensuite utiliser l'inégalité triangulaire car on a un nombre fini de termes et l'on obtient

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| ,$$

car $\sum |u_k|$ est convergente. Puis, comme la série est absolument convergente, on en déduit que le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|$ tend vers 0 quand n est grand. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe n assez grand tel que $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite $(S_n)_n$ est ainsi de Cauchy (voir Définition 37.6.1). Comme les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets (c'est-à-dire que toute suite de Cauchy y est convergente), on en déduit que la suite $(S_n)_n$ est convergente donc la série $\sum u_n$ converge.

Puis, on remarque : $|S_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 30.3.4. *Ce théorème est vrai dans tout espace vectoriel normé complet, ce qui est le cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension fini et des espaces classiques en théorie de la mesure.*

Exemple 30.3.5. *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument car $\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge vers $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.*

Contre-exemple 30.3.6. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge (vers* $\log(2)$*) sans être absolument convergente car la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Définition 30.3.7. *Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Théorème 30.3.8 (Théorème de réarrangement de Riemann)**.** *Soit une série* $\sum u_n$ *à valeurs réelles. On suppose qu'elle est semi-convergente. Alors, pour tout* $A \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty; +\infty\}$*, il existe une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que*

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \longrightarrow A\,.$$

On ne peut donc pas écrire $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

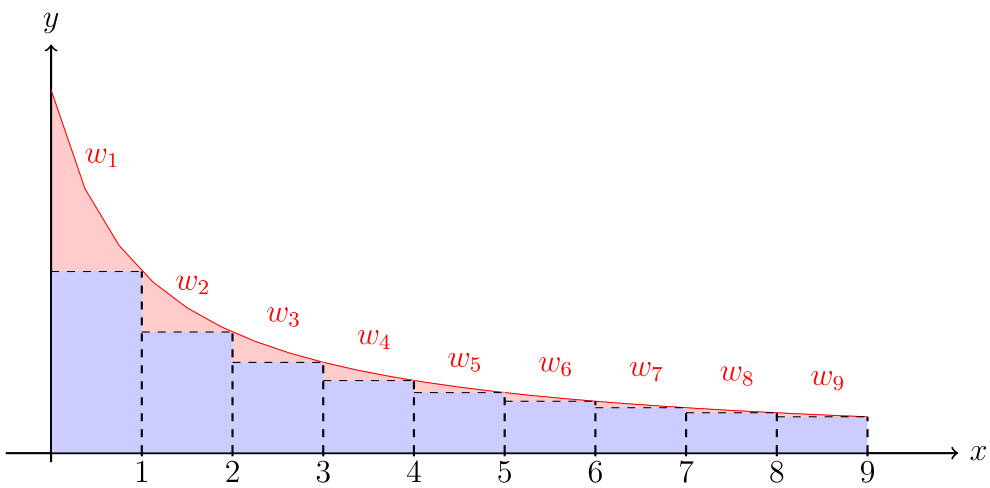
30.4 Comparaison entre une série et une intégrale

On dit souvent que l'intégration est une sommation. Dans cette section, on se sert de cette façon de voir.

Théorème 30.4.1 (Cas des séries à termes réels positifs)**.** *Soit* f *une fonction de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* f *est continue par morceaux, positive et décroissante. Alors, la série* $\sum_{n\geq 1} w_n$ *converge avec* $w_n := \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$.
On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ *converge si et seulement si la fonction* f *est intégrable sur* $[0; +\infty[$.

Démonstration. On commence par faire un dessin :

FIGURE 30.1 – Comparaison entre une série et une intégrale



Comme f est décroissante, pour tout $t \in [n-1;n]$, on a $f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$ d'où

$$\int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)\mathrm{d}t \iff f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n-1)\,.$$

On obtient ainsi

$$0 \leq w_n \leq v_n := f(n-1) - f(n)\,.$$

La quantité v_n est positive et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k &= (f(0) - f(1)) + (f(1) - f(2)) + \cdots + (f(n-1) - f(n)) \\ &= f(0) - f(n) \longrightarrow f(0) - l\,,\end{aligned}$$

avec $l := \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Cette limite existe car f est positive (donc minorée) et décroissante. Donc la série $\sum v_n$ converge ce qui nous donne immédiatement la convergence de la série $\sum w_n$.

Sachant que la série

$$\sum_{n\geq 1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$$

converge, la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ converge, ce qui équivaut à l'intégrabilité sur $[0;+\infty[$ de la fonction f car la fonction f est positive. □

Exemple 30.4.2. *La fonction f définie par $f(x) := \frac{1}{x}$ est positive, décroissante sur $[1;+\infty[$. Donc $\sum w_n$ converge, avec $w_n := \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n} = \log(n) - \log(n-1) - \frac{1}{n}$. On en déduit la convergence de la suite S_n définie par $S_n := \sum_{k=1}^{n} w_k = \log(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On note*

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)\right)\,.$$

Il s'agit de la constante d'Euler. Mais, la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ d'où la divergence de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ s'ensuit.

Exercice 30.4.3 (Séries de Bertrand)**.** *Soient α et β deux réels. On pose :*

$$u_n := \frac{\log(n)^\beta}{n^\alpha}\,.$$

Déterminer la convergence de la série $\sum u_n$ en fonction de α et β.

Théorème 30.4.4 (Cas des séries réelles ou complexes)**.** *Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*

Alors, la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est absolument convergente, avec $w_n := \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$.

30.5 Exercices

Exercice 1

Étudier la convergence des séries de terme général :

- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.
- $2\log\left(n^3+1\right)+3\log\left(n^2+1\right)$.
- $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$.
- $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
- $\frac{(-1)^n}{\log(n)}$.
- $\frac{1!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
- $\frac{1}{\log(n)^{\log(n)}}$.
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
- $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$.

Exercice 2

Soit la suite de terme général $u_n := (n^4+n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$ où P est un polynôme. À quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 3

Quelle est la nature de la série de terme général $\log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 4

Soit $\alpha > 0$. Étudier la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$.

Exercice 5

Calculer les sommes des séries suivantes :

- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
- $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
- $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.

Chapitre 31

Familles sommables

Ce chapitre a un grand intérêt pour les probabilités discrètes en ce qui concerne la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

31.1 Suites simples

31.1.1 Cas des suites de réels positifs

Définition 31.1.1. *Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est dite sommable s'il existe une constante positive M telle que pour toute partie finie $\mathcal{J}$ de $\mathbb{N}$, la somme partielle $S_{\mathcal{J}}(u) := \sum_{i\in\mathcal{J}} u_i$ est majorée par M : $S_{\mathcal{J}}(u) \leq M$.*

Définition 31.1.2. *Si u est une suite sommable de réels positifs, on appelle somme de la suite u le réel positif $S(u)$ défini par*

$$S(u) := \sup_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}}(u)\,,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Notation 31.1.3. *La somme de u est aussi notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

Théorème 31.1.4. *Soit u une suite de réels positifs. S'il existe une suite croissante $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathbb{N}$ dont la réunion est égale à $\mathbb{N}$ et telle qu'il existe $M > 0$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{\mathcal{J}_n}(u) \leq M$, alors la suite u est sommable. De plus, $S(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathcal{J}_n}(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{\mathcal{J}_n}(u)$.*

Démonstration. Soit une telle suite croissante $(\mathcal{J}_n)_n$. Soit une partie finie quelconque $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$. Alors, on a $\mathcal{J} = \{\lambda_k \ :\ k \in [\![1;p]\!]\}$ où $p := \#\mathcal{J}$. Par définition, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_n = \mathbb{N}$. Il s'ensuit que pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_k \in \mathcal{J}_{n_k}$. En prenant $N := \max\limits_{k\in[\![1;p]\!]} n_k$, on a $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_N$. En particulier, $S_{\mathcal{J}}(u) \leq S_{\mathcal{J}_N}(u) \leq M$. On en déduit que la suite u est bien sommable.

Par définition, $S(u) := \sup_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}}(u)$ où le supremum est pris sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. En particulier, $S(u) \geq S_{\mathcal{J}_n}(u)$ d'où $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathcal{J}_n}(u) \leq S(u)$. De plus, on a vu que toute partie finie $\mathcal{J}$ de $\mathbb{N}$ pouvait être incluse dans $\mathcal{J}_N$ pour N assez grand donc $S_{\mathcal{J}}(u) \leq S_{\mathcal{J}_N}(u) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathcal{J}_n}(u)$ si bien que l'on a $S(u) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathcal{J}_n}(u)$.

On en déduit $S(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathcal{J}_n}(u) = \lim_{n\to+\infty} S_{\mathcal{J}_n}(u)$. □

Dans le cas des suites de réels positifs, la sommabilité est équivalente à la convergence de la série associée. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 31.1.5. *Soit u une suite de réels positifs. La suite u est sommable si et seulement si la série $(\sum u_n)$ converge. De plus, on a $S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*

Démonstration. On applique le Théorème 31.1.4 avec la suite croissante de parties de $\mathbb{N}$ suivante : $\mathcal{J}_n := [\![0; n]\!]$. □

31.1.2 Cas des suites réelles ou complexes

Définition 31.1.6. *Une suite u de réels ou de complexes est dite sommable si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*

Définition 31.1.7. *La somme d'une suite sommable de réels ou de complexes est égale à $S(u) := \lim_{n\to+\infty} S_{\mathcal{J}_n}(u) =: \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où $(\mathcal{J}_n)_n$ est une suite croissante de parties finies de $\mathbb{N}$ dont la réunion est égale à $\mathbb{N}$.*

Remarque 31.1.8. *N'importe quelle suite $(\mathcal{J}_n)_n$ croissante de parties finies de $\mathbb{N}$ et dont la réunion vaut $\mathbb{N}$ donnera la même somme. On admet cette assertion.*

Théorème 31.1.9. *Une suite u de réels ou de complexes est sommable si et seulement si la série $(\sum u_n)$ converge absolument et alors*

$$S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

Démonstration. La suite u est sommable si et seulement si la suite des valeurs absolues (ou des modules) est sommable ce qui équivaut à la convergence de la série $(\sum |u_n|)$ donc à la convergence absolue de $(\sum u_n)$. Puis, en prenant $\mathcal{J}_n := [\![0; n]\!]$, on a défini une suite croissante de parties finies de $\mathbb{N}$ et dont la réunion vaut $\mathbb{N}$. Donc $S(u) = \lim_{n\to+\infty} S_{\mathcal{J}_n}(u) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$. □

31.1.3 Exemple de suite non sommable

Prenons $u_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \geq 1$. La série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ ne converge pas absolument vu que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Ainsi, la suite u n'est pas sommable. On dit que la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est une série semi-convergente. En effet, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2)$.

Néanmoins, on peut réordonner cette série de sorte à converger vers une autre valeur.

Posons $\mathcal{I}_k := \{2k-1; 4k-2; 4k\}$ pour tout $k \geq 1$ et $\mathcal{J}_n := \bigcup_{k=1}^n \mathcal{I}_k$.

Alors

$$\begin{aligned}
T_n := \sum_{k \in \mathcal{J}_n} u_k &= \sum_{k=1}^n (u_{2k-1} + u_{4k-2} + u_{4k}) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2} \log(2) \,.
\end{aligned}$$

En réordonnant encore différemment, on peut obtenir une limite différente. On rappelle notamment le théorème suivant :

Théorème 31.1.10 (Théorème de réarrangement de Riemann)**.** *En réorganisant les termes d'une série réelle semi-convergente, on peut obtenir n'importe quelle somme donnée au départ ou même une série divergente.*

Ce théorème est admis.

Remarque 31.1.11. *Au contraire, avec une suite sommable, la somme est commutativement convergente.*

31.2 Suites doubles

31.2.1 Ensembles dénombrables

On commence par donner une caractérisation d'un ensemble dénombrable.

Théorème 31.2.1 (ADMIS)**.** *Un ensemble $\mathcal{I}$ est infini dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(\mathcal{J}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathcal{I}$ dont la réunion est égale à $\mathcal{I}$.*

On montre ainsi facilement que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ou même $\mathbb{Z}^2$ sont dénombrables.

31.2.2 Familles sommables

Ici, on s'intéresse à des familles indexées par un ensemble infini dénombrable non nécessairement égal à $\mathbb{N}$.

31.2.2.1 Famille de réels positifs

Définition 31.2.2. *Soit $u = (u_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de réels positifs, indexée par un ensemble infini dénombrable $\mathcal{I}$. On dit que la famille u est sommable s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, on a $S_\mathcal{J}(u) = \sum_{i\in\mathcal{J}} u_i \leq M$. Alors, la famille a pour somme :*

$$S(u) = \sum_{i\in\mathcal{I}} u_i = \sup_{\mathcal{J}} S_\mathcal{J}(u)\,,$$

où $\mathcal{J}$ décrit l'ensemble des parties finies de $\mathcal{I}$.

Théorème 31.2.3. *Supposons qu'il existe une suite croissante $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathcal{I}$ et dont la réunion est égale à $\mathcal{I}$ et un réel positif M tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{\mathcal{J}_n}(u) \leq M$. Alors, la famille u est sommable et de plus $S(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathcal{J}_n}(u) = \lim_{n\to+\infty} S_{\mathcal{J}_n}(u)$.*

Exercice 31.2.4. *Démontrer le théorème précédent en utilisant la preuve du Théorème 31.1.4.*

31.2.2.2 Famille quelconque de réels ou de complexes

On peut à nouveau généraliser au cas des familles de réels ou de complexes.

Définition 31.2.5. *La famille $u = (u_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de réels ou de complexes, indexée par un ensemble infini dénombrable $\mathcal{I}$ est dite sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in\mathcal{I}}$ est sommable. Et de plus, pour toute suite croissante $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathcal{I}$ et dont la réunion est égale à $\mathcal{I}$, on a $S(u) = \lim_{n\to+\infty} S_{\mathcal{J}_n}(u)$.*

31.2.3 Interversions de la sommation

On va ici voir que la sommabilité permet d'intervertir les sommes infinies.

31.2.3.1 Cas d'une suite double de réels positifs

Théorème 31.2.6. *Soit une suite double $u = (u_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs. Alors la famille u est sommable si et seulement si*

- *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum_q u_{p,q}\right)$ converge vers une limite $l_p \in \mathbb{R}_+$.*
- *De plus : la série $\left(\sum_p l_p\right)$ converge.*

Alors, on a également :

$$S(u) = \sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\,.$$

La preuve n'est pas difficile et elle ressemble aux précédentes. Elle n'est donc pas donnée.

31.2.3.2 Extension

On étend à nouveau :

Théorème 31.2.7. *Soit une suite double $u = (u_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels ou de complexes. Alors la famille u est sommable si et seulement si*

- *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum_q |u_{p,q}|\right)$ converge vers une limite $l_p \in \mathbb{R}_+$.*
- *De plus : la série $\left(\sum_p l_p\right)$ converge.*

Alors, on a également :

$$\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\,.$$

31.2.3.3 Cas d'une famille produit

Ici, on se donne deux suites sommables de réels ou de complexes : $(a_p)_p$ et $(b_q)_q$. On pose $u_{p,q} := a_p b_q$.

Alors, la famille $u := (u_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et de plus $\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q\right)$.

La preuve est à nouveau omise puisqu'elle est classique.

31.2.4 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 31.2.8. *Soient deux séries $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ de réels ou de complexes. On définit une troisième série appelée produit de Cauchy des deux précédentes : $\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right)$, où $w_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,:\,p+q=n} u_p v_q$.*

Théorème 31.2.9. *Si les deux séries $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ sont absolument convergentes, alors la série $\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right)$ est également absolument convergente et de plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.*

L'idée de la preuve est de considérer $\mathcal{J}_n := \{(p;q) \in \mathbb{N}^2 \ : \ p+q \leq n\}$. Cette partie est finie et la réunion de tous les $\mathcal{J}_n$ donne bien $\mathbb{N}^2$. En exploitant le caractère sommable, on obtient le résultat demandé.

Exemple 31.2.10. *On définit l'exponentielle de* $z \in \mathbb{C}$ *par* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Alors, on a bien*

$$\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z') \,. \tag{31.1}$$

Démonstration. Par définition, $\exp(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$ et $\exp(z) \times \exp(z') = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{n!}\right)$. On pose $u_n := \frac{z^n}{n!}$ et $v_n := \frac{(z')^n}{n!}$. La série de terme général u_n et celle de terme général v_n sont convergentes absolument.

De fait, en posant $w_n := \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$, on en déduit $\exp(z) \times \exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

Or, $w_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!} \frac{(z')^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p (z')^{n-p} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p (z')^{n-p} = \frac{(z+z')^n}{n!}$ par la formule du binôme de Newton.

La preuve est achevée.

□

31.3 Exercices

Exercice 1

Démontrer que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable, où $a_{n,p} := \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

Exercice 2

Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite sommable de nombres complexes. Pour tout $n,p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} := \frac{p}{n(n+1)} a_p \mathbb{1}_{[\![1;n]\!]}(p)$. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

Chapitre 32

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, les fonctions considérées seront de A dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où A est une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.
Le cas des séries de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ se ramène au cas d'une suite de fonctions $(S_n)_n$ avec $S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.

32.1 Convergences simple, uniforme et absolue

32.1.1 Définitions

32.1.1.1 Pour les suites de fonctions

Définition 32.1.1. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f de A dans $\mathbb{C}$ si*

$$\forall x \in A\,, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Mais encore, cela signifie :

$$\forall x \in A\,, \forall \epsilon > 0, \exists p_x \in \mathbb{N}\ \forall p \geq p_x \Rightarrow |f_p(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Ici, l'entier p_x dépend de x.

Exemple 32.1.2. *On considère la suite de fonctions définie par $f_n(x) := x^n$ sur $A := [0; 1[$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $f_n(x) \longrightarrow 0 =: f(x)$. Donc, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Toutefois, pour chaque x, le p_x associé à ϵ dépend effectivement de x. Calculons justement p_x. La décroissance de la suite de terme général x^n nous permet de dire que p_x est le premier entier tel que $x^{p_x} \leq \epsilon$ ce qui donne $p_x \geq \frac{\log(\epsilon)}{\log(x)}$. On voit ainsi que $\lim_{x\to 1^-} p_x = +\infty$.*

On trouve ce mode de convergence trop faiblard comme l'a montré l'exemple précédent. On introduit donc la convergence uniforme.

Définition 32.1.3. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si*

$$||f_n - f||_\infty := \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

quand n tend vers l'infini. Soit encore :

$$\forall \epsilon > 0, \exists p_A \in \mathbb{N}\ \forall p \geq p_A \Rightarrow \forall x \in A\,, |f_p(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Ici, l'entier p_A est le même pour tous les éléments de A ou plutôt, l'ensemble $\{p_x\ :\ x \in A\}$ est majoré par p_A.

Exemple 32.1.4. *Si on reprend $f_n(x) := x^n$ mais que l'on se place sur $A := [0; \frac{1}{2}]$, alors on a bien convergence uniforme. En effet : $||f_n - 0||_\infty = \sup_{x\in A} |x^n| = \dfrac{1}{2^n} \longrightarrow 0$.*

Remarque 32.1.5. *La suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur A si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Exemple 32.1.6. *Dans l'Exemple 32.1.2, on peut prendre $x_n := 1 - \frac{1}{n}$. Alors, $f_n(x_n)$ tend vers $e^{-1} \neq 0$. Et, si l'on prend $y_n := 1 - \frac{1}{n^2}$, alors $f_n(y_n)$ tend vers $1 \neq 0$.*

Définition 32.1.7. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de A vers f si*

$$\sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

quand n tend vers l'infini où K désigne n'importe quel ensemble fermé et borné inclus dans A. Soit encore :

$$\forall \epsilon > 0, \exists p_K \in \mathbb{N}\ \forall p \geq p_K \Rightarrow \forall x \in K\,, |f_p(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Exemple 32.1.8. *Dans l'Exemple 32.1.2, on a bien convergence uniforme sur tout compact de $[0; 1[$.*

Remarque 32.1.9. *La convergence uniforme d'une suite de fonctions entraîne sa convergence simple mais la réciproque est fausse.*

32.1.1.2 Pour les séries de fonctions

Définition 32.1.10. *On dit que la série de fonctions $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ converge simplement vers f sur A si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge simplement vers f sur A.*

Définition 32.1.11. *On dit que la série de fonctions $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ converge uniformément vers f sur A si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur A.*

Définition 32.1.12. *On dit que la série de fonctions* $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ *converge uniformément vers* f *sur tout compact de* A *si la suite des sommes partielles* $(S_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur tout compact de* A*.*

Remarque 32.1.13. *La convergence uniforme d'une série de fonctions entraîne sa convergence simple mais la réciproque est fausse.*

32.1.2 Stabilité des propriétés des fonctions

Définition 32.1.14. *Ici,* $\mathcal{B}(A)$ *désigne l'espace des fonctions bornées de* A *dans* $\mathbb{C}$*.*

Définition 32.1.15. *On le munit de la norme uniforme. On d'autres termes, on pose*

$$||f||_\infty := \sup_{x\in A} |f(x)|$$

Proposition 32.1.16. *Si une suite* $(f_n)_n$ *de* $\mathcal{B}(A)$ *converge uniformément sur* A *vers* f*, alors* f *est également un élément de* $\mathcal{B}(A)$*.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K_n > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|f_n(x)| \leq K_n$. D'autre part, pour $\epsilon := 1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, pour tout $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$.
En particulier, pour $n = p$, pour tout $x \in A$, $|f_p(x) - f(x)| \leq 1$. l'inégalité triangulaire nous donne immédiatement

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f_p(x) + (f(x) - f_p(x))| \\ &\leq |f(x)| + |f_p(x) - f(x)| \\ &\leq K_p + 1 \,. \end{aligned}$$

Donc f est bornée sur A. □

32.1.3 Théorèmes d'interversions des limites

Théorème 32.1.17. *Soit une suite de fonctions* $(f_n)_n$ *de* A *dans* $\mathbb{C}$*. Soit* $a \in A$*. On suppose que la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A *et que l'on a*

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n \,.$$

Alors, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \,.$$

D'où la formule d'interversion des limites

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) \,,$$

l'existence de ces deux limites étant assurée par les hypothèses.

On admet la preuve de ce théorème.

Corollaire 32.1.18. *Soit une série de fonctions* $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ *de* A *dans* $\mathbb{C}$. *Soit* $a \in A$. *On suppose que la série de fonctions* $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ *converge uniformément vers* S *sur* A *et que l'on a*

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n\,.$$

Alors, on a

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,.$$

D'où la formule d'interversion des limites

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)\,,$$

l'existence de ces deux limites étant assurée par les hypothèses.

32.1.4 Continuité de la limite

À partir du Théorème 32.1.17, on obtient les résultats suivants sur la limite d'une suite de fonctions qui converge uniformément.

Théorème 32.1.19. *On suppose que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A. *De plus, chaque fonction* f_n *est continue au point* a. *Alors* f *est continue au point* a.

Corollaire 32.1.20. *On suppose que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A. *De plus, chaque fonction* f_n *est continue sur* A. *Alors* f *est continue sur* A.

Remarque 32.1.21. *Les deux résultats précédents restent vrais si la convergence est uniforme sur tout compact au lieu d'être uniforme sur* A.

Ces résultats concernent les suites de fonctions. On peut les tracter aux séries de fonctions.

Théorème 32.1.22. *On suppose que la série de fonctions* $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ *converge uniformément vers* S *sur* A. *De plus, chaque fonction* f_n *est continue au point* a. *Alors* S *est continue au point* a.

Corollaire 32.1.23. *On suppose que la série de fonctions* $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ *converge uniformément vers* S *sur* A. *De plus, chaque fonction* f_n *est continue sur* A. *Alors* S *est continue sur* A.

Remarque 32.1.24. *Les deux résultats précédents restent vrais si la convergence est uniforme sur tout compact au lieu d'être uniforme sur* A.

32.1.5 Convergence absolue d'une série de fonctions

On présente maintenant un autre type de convergence pour les séries de fonctions. Ce type de convergence est parfois appelé "convergence normale" pour faire référence au mot "norme". On va parler ici de convergence absolue, pour faire le lien avec les séries d'éléments d'un espace vectoriel normé, voir le Chapitre 37.

Définition 32.1.25. *Soit une série de fonctions* $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ *où* f_n *est bornée de* A *dans* $\mathbb{C}$*. On pose donc* $||f_n||_\infty := \sup_{x\in A} |f_n(x)|$*. On dit que la série de fonctions converge absolument pour la norme infinie sur* A *si la série numérique* $\left(\sum_{n\geq 0} ||f_n||_\infty\right)$ *converge.*

Proposition 32.1.26. *La série de fonctions* $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ *converge absolument pour la norme infinie sur* A *si et seulement si on peut trouver une série* $\left(\sum_{n\geq 0} \alpha_n\right)$ *majorante et convergente. Ici, on dit que la série* $\left(\sum_{n\geq 0} \alpha_n\right)$ *est majorante si l'on a*

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n\,,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in A$*.*

Définition 32.1.27. *Soit une série de fonctions* $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ *où* f_n *est bornée de* A *dans* $\mathbb{C}$*.*
On dit que la série de fonctions converge absolument pour la norme infinie sur tout compact de A *si la série numérique* $\left(\sum_{n\geq 0} ||f_n||_K\right)$ *converge où l'on a* $||f_n||_K := \sup_{x\in K} |f_n(x)|$*,* K *étant un compact quelconque de* A*.*

Théorème 32.1.28. *Soit une série de fonctions* $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ *où* f_n *est bornée de* A *dans* $\mathbb{C}$*. On suppose que cette série est absolument convergente pour la norme infinie. Alors, la série converge uniformément sur* A*.*

Exercice 32.1.29. *Démontrer le théorème précédent.*

32.2 Exercices

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) := n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0;1]$.
1) Trouver la limite simple des fonctions f_n.
2) Y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 2

On pose $f_n(x) := x^n(1-x)$ et $g_n(x) := x^n \sin(\pi x)$.
1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$.
2) En déduire qu'il en est de même pour la suite $(g_n)_n$ (on utilisera la concavité de la fonction sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$).

Exercice 3

Soit $f_n(x) := n\cos^n(x)\sin(x)$.
1) Chercher la limite simple, f des fonctions f_n.
2) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 4

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

Exercice 5

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1}\frac{t^{x-1}}{t+1}\mathrm{d}t$.

Chapitre 33

Séries entières

Dans ce chapitre, nous allons plus loin que dans celui sur les développements limités puisque nous obtenons des sommes jusqu'à l'infini.

33.1 Rayon de convergence

33.1.1 Définitions

Définition 33.1.1. *On appelle "série entière" toute série de fonctions qui est de la forme* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *où* z *est une variable complexe et chaque coefficient* a_n *est indépendant de* z.

Proposition 33.1.2. *Soit* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *une série entière. Soit un réel strictement positif* ρ *tel que la suite* $(|a_n|\rho^n)$ *est bornée. Alors, pour tout complexe* z *tel que* $|z| < \rho$, *on a* $|a_n z^n| = O\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$.

Démonstration. On peut écrire $|a_n z^n| = |a_n|\rho^n \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$. Comme la suite $(|a_n|\rho^n)_n$ est bornée, le résultat découle immédiatement. $\square$

Définition 33.1.3. *Soit* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *une série entière. On définit son rayon de convergence* $R \in [0; +\infty]$ *de la façon suivante :*

$$R := \sup\left\{\rho > 0 \;:\; \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|\rho^n\right) \text{ converge.}\right\} \tag{33.1}$$

Proposition 33.1.4. *Soit* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *une série entière de rayon de conver-*

gence R_1. On définit les deux quantités suivantes :

$$R_2 := \sup\left\{\rho > 0 \ : \ \lim_{n\to\infty} |a_n|\rho^n = 0\right\} \tag{33.2}$$

et

$$R_3 := \sup\left\{\rho > 0 \ : \ (|a_n|\rho^n)_n \ \textit{est bornée.}\right\} \tag{33.3}$$

Alors, $R_1 = R_2 = R_3$. On peut donc aussi bien définir le rayon de convergence d'une série entière par (33.1)*, par* (33.2) *ou par* (33.3)*.*

Démonstration. De façon évidente, $R_1 \leq R_2 \leq R_3$. En effet, pour tout $r \geq 0$, si la série $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n\right)_n$ converge, on en déduit la convergence de $|a_n|r^n$ vers 0. Et, une suite convergente étant bornée, on en déduit la bornitude de la suite $(a_n r^n)_n$. Donc, si $r < R_1$, on a $r \leq R_2$ d'où $R_1 \leq R_2$ et de même $R_2 \leq R_3$. Il reste donc à prouver que l'on a $R_3 \leq R_1$.
Soit $r \geq 0$ tel que $r < R_3$. Soit maintenant $\rho \in]r; R_3[$. On a alors

$$|a_n|r^n = |a_n|\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

car la suite $(|a_n|\rho^n)_n$ est bornée. Or, la série géométrique $\left(\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)$ converge. On en déduit la convergence de la série $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n|r^n\right)_n$ c'est-à-dire $r \leq R_1$ d'où $R_3 \leq R_1$ ce qui achève la preuve. □

33.1.2 Calcul pratique

On applique la règle de d'Alembert.

Théorème 33.1.5. *Soit $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)_n$ une série entière telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Supposons qu'il existe $L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Alors, $R = \frac{1}{L}$.*

Démonstration. **1)** Si $|z| < \frac{1}{L}$, on a $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \longrightarrow L|z| < 1$. La série $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)_n$ converge donc et l'on en déduit $|z| \leq R$ d'où $\frac{1}{L} \leq R$.
2) Si $|z| > \frac{1}{L}$, on a $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \longrightarrow L|z| > 1$. La série $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)_n$ diverge donc et l'on en déduit $|z| \geq R$ d'où $\frac{1}{L} \geq R$ ce qui achève de prouver $R = \frac{1}{L}$. □

33.1.3 Exemples de rayons de convergence

Exemple 33.1.6. *On considère la série entière $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right)$. Alors,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0\,,$$

d'où $R = +\infty$.

Exemple 33.1.7. *On considère la série entière* $\left(\sum_{n\geq 0} n!z^n\right)$*. Alors,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty\,,$$

d'où $R = 0$*.*

Exemple 33.1.8. *On considère la série entière* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n\right)$*. Alors,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \longrightarrow 1\,,$$

d'où $R = 1$*.*

Exercice 33.1.9. *Calculer les rayons de convergence des séries entières* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} nz^n\right)$*,* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\right)$ *et* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2^n z^n\right)$*.*

On donne maintenant un exemple moins trivial.

Exemple 33.1.10. *On considère la série entière* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{\sin(n)} z^n\right)$*. Ici,*

$$e^{-1} \leq e^{\sin(n)} \leq e\,.$$

Les deux séries $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-1} z^n\right)$ *et* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} ez^n\right)$ *ont pour rayon de convergence* $R = 1$ *donc il en est de même pour* $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{\sin(n)} z^n\right)$*.*

33.1.4 Disque de convergence

Définition 33.1.11. *Soit* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *une série entière complexe de rayon de convergence* R*. On appelle "disque de convergence" de cette série le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* R *:* $D(0;R) = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| < R\}$*.*

Théorème 33.1.12. 1) *Pour tout complexe* z *tel que l'on ait* $|z| > R$*, la série* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *diverge.*

2) *Pour tout complexe* z *tel que l'on ait* $|z| < R$*, la série* $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n\right)$ *converge.*

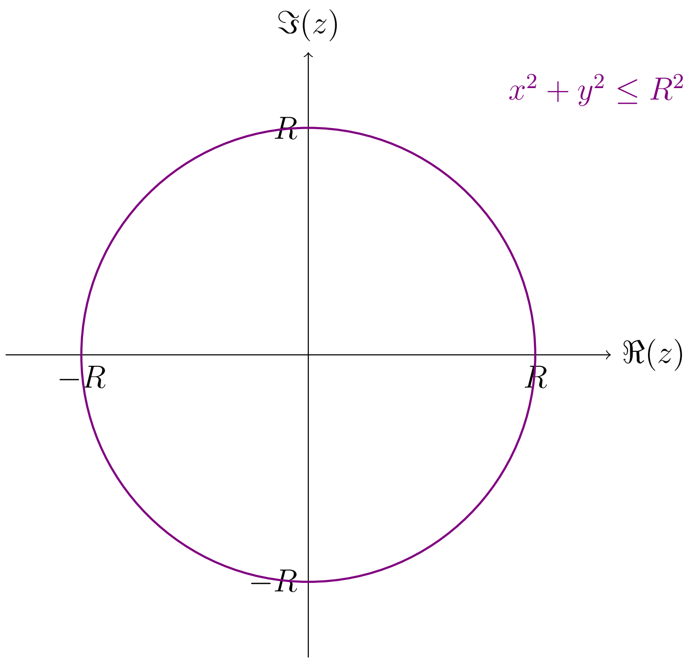
3) *La somme de la série entière,* $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est continue sur* $D(0;R)$*.*

Démonstration. **1.** Si $|z| > R$, la suite $\left(a_n|z|^n\right)_n$ ne tend pas vers 0. Donc la série $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ diverge.

2. Si $|z| < R$, la série $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n\right)$ converge d'après la définition de R.

3. Soit $\mathcal{K}$ un compact inclus dans $D(0;R)$. Posons $\rho := \sup_{z\in\mathbb{K}} |z|$. Alors, $\rho < R$ d'où la série $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n|\rho^n\right)$ est convergente donc la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ converge absolument pour la norme infinie. On en déduit que la fonction S est continue sur $D(0;R)$. □

FIGURE 33.1 – Disque de convergence



33.1.5 Opération algébrique

33.1.5.1 Somme et combinaisons linéaires

Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$ deux séries entières de rayons respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$.
La série entière $\left(\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, z^n\right)$ a un rayon de convergence $R \geq \min\{R_1; R_2\}$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tous les complexes λ et μ, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)\, z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\,,$$

si $|z| < \min\{R_1; R_2\}$.

33.1.5.2 Produit de Cauchy

Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$ deux séries entières de rayons respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$.
On définit une nouvelle série entière : $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ avec

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Alors, $\left(\sum_{n\geq 0} c_n z^n\right)$ a un rayon de convergence R tel que $R \geq \min\{R_1; R_2\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_1; R_2\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple 33.1.13. *On considère la série entière* $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n)$ *avec* $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *On remarque*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k c_{n-k}$$

avec $b_k = \frac{1}{k}$ *et* $c_{n-k} = 1$. *La série entière* $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\right)$ *a un rayon de convergence* $R_1 = 1$ *et pour tout* $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$. *Et, la série entière* $\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)$ *a un rayon de convergence* $R_2 = 1$ *et pour tout* $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. *Donc la série entière* $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n)$ *a un rayon de convergence* $R \geq 1$. *De plus, pour tout* $x \in]-1;1[$, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = -\frac{\log(1-x)}{1-x} .$$

33.2 Série entière d'une variable réelle

On se restreint maintenant à la variable réelle.

33.2.1 Intervalle de convergence

Définition 33.2.1. *Soit* $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ *une série entière réelle :* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a_n \in \mathbb{R}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* R *son rayon de convergence. L'intervalle de convergence de la série entière est* $]-R;R[$.

Proposition 33.2.2. *Soit* $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ *une série entière réelle :* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a_n \in \mathbb{R}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* R *son rayon de convergence. Alors pour tout* $x \in]-R;R[$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ *converge.*

33.2.2 Intégration et dérivation terme à terme

Théorème 33.2.3. *Soit $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ une série entière réelle : $x \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit R son rayon de convergence. Alors, on peut intégrer terme à terme la somme de cette série entière sur l'intervalle de convergence $]-R;R[$. En d'autres termes, pour tout $x \in]-R;R[$, on a*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Ce résultat se prouve facilement à partir de la convergence absolue pour la norme infinie de la série de fonctions $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$.

Théorème 33.2.4. *Soit $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ une série entière réelle : $x \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit R son rayon de convergence. Alors, on peut dériver terme à terme la somme de cette série entière sur l'intervalle de convergence $]-R;R[$. En d'autres termes, pour tout $x \in]-R;R[$, on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Ce résultat se prouve en montrant que le rayon de convergence de la série $(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1})$ est égal à celui de la série $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$. En effet, si le rayon de convergence de la seconde série entière est R, alors pour tout $\rho < R$, il existe $\rho' \in]\rho;R[$ tel que $a_n(\rho')^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Puis, l'on en déduit que $n a_n \rho^{n-1} \leq \frac{1}{\rho}(a_n(\rho')^n) \times n \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$; ce qui tend bien vers 0 et achève de prouver que le rayon de convergence de la première série est au moins égale à celui de la seconde.

Pour démontrer ensuite que les deux rayons sont bien égaux, on remarque que si $n a_n \rho^{n-1}$ tend vers 0, alors il en est de même pour $a_n \rho^n$.

Corollaire 33.2.5. *Soit $f : x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ avec de plus :*

$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in]-R;R[\ \ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1)) a_n x^{n-p}\,.$$

En particulier, on a

$$a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)\,.$$

33.2.3 Fonctions développables en série entière

Définition 33.2.6. *Une fonction f à valeurs réelles, définie au voisinage de 0 est dite développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe $R > 0$ et une série entière $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ tels que pour tout $x \in]-R;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Proposition 33.2.7. *Ainsi, pour que f soit développable en série entière en 0, il faut que*

- *f soit $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.*
- *La seule série entière possible est sa série de Taylor en 0 : $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Cette série entière doit avoir un rayon de convergence $R > 0$.*
- *De plus, on doit avoir (ce n'est pas immédiat) : $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ce qui équivaut à*
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$$
pour tout $x \in]-R; R[$.

Contre-exemple 33.2.8. *La fonction $f : x \mapsto f(x) := e^{-\frac{1}{x}}H(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais elle n'est pas développable en série entière. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$. Et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$f^{(p)}(x) = \mathcal{Q}(x)e^{-\frac{1}{x}}H(x)\,,$$

où $\mathcal{Q}(x) = P(\frac{1}{x})$, P étant une fonction polynômiale. On a donc $f^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Or, l'égalité suivante est fausse :

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.x^n = e^{-\frac{1}{x}}H(x)\,,$$

dès que $x > 0$.

33.2.4 Développements classiques

On présente ici les développements en série entière classiques.

33.2.4.1 Développements connus

- $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\sinh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n$ pour tout $x \in]-1;1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

33.2.4.2 Intégration d'un développement connu

On connaît le développement de la fonction $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. On a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

pour tout $x \in]-1;1[$. Puis, on intègre et il vient

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

pour tout $x \in]-1;1[$.

33.3 Exercices

Exercice 1

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.

- Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.

Exercice 2

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec

- $a_n \longrightarrow l \neq 0$.
- La suite $(a_n)_n$ est périodique non nulle.
- $a_n := \frac{n^n}{n!}$.
- $a_{n^2} = n!$ et $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 3

Développer en séries entières les fonctions suivantes :

- $x \mapsto \log(1 + x + x^2)$.
- $x \mapsto (x - 1)\log(x^2 - 5x + 6)$.
- $x \mapsto x\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- $x \mapsto \frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
- $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Chapitre 34

Séries de Fourier

Il peut sembler étrange à certains de parler des séries de Fourier avant d'aborder la Transformée de Fourier. En effet, les séries de Fourier n'ont d'intérêt que pour les fonctions périodiques tandis que la transformée de Fourier peut s'appliquer à une classe bien plus vaste de signaux.

En fait, l'intérêt pédagogique de commencer par les séries de Fourier est indéniable : mieux appréhender la projection orthogonale dans un espace de Hilbert, même si l'on n'entrera pas dans la théorie générale des Hilbert dans ce polycopié.

En fait, il faut voir ce chapitre comme une mise en bouche. Bien sûr, il est important de préciser que l'idée sous-jacente est la même puisqu'elle est liée aux *caractères*, objet dont nous ne donnerons pas la définition. Le lecteur intéressé est invité à consulter les ressources numériques usuelles. Disons seulement que les caractères sont les entiers lorsque l'on est dans le cas des signaux périodiques, sont les réels dans le cas des signaux non périodiques et peuvent s'avérer encore plus "vicieux" dans le cadre général.

34.1 Coefficients de Fourier

34.1.1 Généralités

On appelle $CM_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 34.1.1. *Étant donnée une fonction g continue par morceaux, définie sur un intervalle de longueur 2π, $I := [a; a + 2\pi]$, avec $g(a) = g(a + 2\pi)$, il existe une seule fonction f de $CM_{2\pi}$ qui coïncide avec g sur $[a; a + 2\pi]$. Et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in [a + 2k\pi; a + 2k\pi + 2\pi]$, on a $f(x) = g(x - 2k\pi)$.*

Proposition 34.1.2. *L'intégrale de toute fonction $f \in CM_{2\pi}$ sur une période 2π ne dépend pas de la borne de départ. En d'autres termes, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t &= \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t+2\pi)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

34.1.2 Coefficients de Fourier sous forme complexe

Définition 34.1.3. *Pour $f \in CM_{2\pi}$, on définit la suite complexe $\hat{f} := \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ par*

$$\hat{f}(n) := c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t\,.$$

Proposition 34.1.4. *Il s'agit donc du produit scalaire hermitien entre la fonction f et la fonction $e_n(t) := e^{int}$ divisé par la norme au carré de e_n. On peut ainsi écrire*

$$c_n(f) = \frac{\langle e_n; f\rangle}{||e_n||^2}\,.$$

Proposition 34.1.5. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.*

Exercice 34.1.6. *Prouver la Proposition 34.1.5.*

Proposition 34.1.7. *Soit $g(t) := f(-t)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$.*

Démonstration. En effet, on a

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}f(-t)\mathrm{d}t\,.$$

On applique le changement de variable $u := -t$ et il vient

$$c_n(g) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} e^{inu}f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(-n)u}f(u)\mathrm{d}u = c_{-n}(f)\,.$$

□

Proposition 34.1.8. *De la Proposition 34.1.7, on en déduit que si f est paire alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$. De même, si f est impaire alors $c_{-n}(f) = -c_n(f)$.*

34.1.3 Coefficients de Fourier sous forme trigonométrique

Définition 34.1.9. *Pour $f \in CM_{2\pi}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $a_n(f)$ par*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t \,.$$

Proposition 34.1.10. *Il s'agit donc du produit scalaire entre la fonction f et la fonction $t \mapsto \cos(nt)$ divisé par la norme au carré de la fonction $t \mapsto \cos(nt)$.*

Démonstration. Posons $u_n(t) := \cos(nt)$. Alors, la norme au carré de la fonction u_n est

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)^2 \mathrm{d}t =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \mathrm{d}t \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2nt)) \mathrm{d}t \\ =& \left[\frac{1}{2}(1 + \frac{\sin(2nt)}{2n}) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ =& \frac{1}{2} \,.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$a_n(f) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t}{\frac{1}{2}} = \frac{\langle f ; u_n \rangle}{||u_n||^2} \,.$$

□

Définition 34.1.11. *Pour $f \in CM_{2\pi}$, on définit $a_0(f)$ par*

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{d}t \,.$$

Proposition 34.1.12. *Il s'agit donc du produit scalaire entre la fonction f et la fonction $t \mapsto 1$ divisé par la norme au carré de la fonction $t \mapsto 1$.*

Exercice 34.1.13. *Démontrer la Proposition 34.1.12.*

Définition 34.1.14. *Pour $f \in CM_{2\pi}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $b_n(f)$ par*

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t \,.$$

Proposition 34.1.15. *Il s'agit donc du produit scalaire entre la fonction f et la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ divisé par la norme au carré de la fonction $t \mapsto \sin(nt)$.*

Exercice 34.1.16. *Démontrer la Proposition 34.1.15.*

On peut lier $c_n(f)$ avec $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Proposition 34.1.17. *On observe $c_0(f) = a_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad et \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} .$$

Réciproquement, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 34.1.18. *Démontrer la Proposition 34.1.17.*

34.1.4 Série de Fourier

34.1.4.1 Définition

À tout élément f de $CM_{2\pi}$, on associe sa série de Fourier :

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} \right)$$

ou encore

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \right) .$$

Remarque 34.1.19. *Ces séries correspondent à la somme des vecteurs orthogonaux qui constituent le signal f.*

34.1.4.2 Sommes partielles

On définit la suite des sommes partielles $(S_p(f))_{p \in \mathbb{N}}$ associées à la série de Fourier de f :

$$\begin{aligned} S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e^{int} &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{p} \left(c_n(f) e^{int} + c_{-n}(f) e^{-int} \right) \\ &= a_0(f) + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \right) . \end{aligned}$$

Proposition 34.1.20. *Si f est paire, $b_n(f) = 0$ d'où*

$$S_p(f) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{p} a_n(f) \cos(nt) .$$

Proposition 34.1.21. *Si f est impaire, $a_n(f) = 0$ d'où*

$$S_p(f) = \sum_{n=1}^{p} b_n(f) \sin(nt) .$$

34.1.5 Étude de la suite des coefficients de Fourier

On rappelle $\hat{f}(n) = c_n(f)$.

34.1.5.1 Linéarité

L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire sur $CM_{2\pi}$. En d'autres termes :

$$c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g)\,,$$

pour toutes les fonctions f et g dans $CM_{2\pi}$ et pour toute constante complexe λ.

34.1.5.2 Bornitude

La suite $\hat{f}$ est bornée :

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Cette inégalité se démontre facilement en utilisant l'inégalité triangulaire.

34.1.5.3 Convergence vers 0 en l'infini

En outre, $c_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers $\pm\infty$. Pour démontrer cette limite, on peut montrer que la suite $\hat{f}$ est de carré sommable (comme on le fera dans la Section 34.2) mais on peut aussi procéder comme suit. On regarde uniquement le cas où n tend vers $+\infty$. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques dérivables et de dérivées continues étant dense dans $CM_{2\pi}$, on peut supposer sans rien changer à la généralité que l'on a f dérivable.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t\,.$$

On procède à une intégration par parties :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right] + \frac{1}{2i\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t\,.$$

On a donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0\,.$$

34.1.5.4 Coefficients de Fourier d'une dérivée

Théorème 34.1.22. *Si f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$c_n(f') = inc_n(f)\,.$$

Démonstration. On calcule simplement

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(t)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}(-in)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= inc_n(f)\,. \end{aligned}$$

□

On peut aller plus loin en procédant par récurrence

Théorème 34.1.23. *Si f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k\, c_n(f)\,.$$

En particulier, $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$.

Exercice 34.1.24. *Prouver le Théorème 34.1.23.*

34.2 Convergence en moyenne quadratique

On considère ici des fonctions continues. L'idée est ici d'aborder la série de Fourier comme la décomposition orthogonale de la fonction f.

34.2.1 L'espace préhilbertien $C_{2\pi}$

Définition 34.2.1. *On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues, 2π-périodiques. On le munit du produit scalaire complexe*

$$\langle f; g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

pour tous $f, g \in C_{2\pi}$. À ce produit scalaire, on associe la norme

$$||f||_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\,.$$

$||f||_2$ s'appelle la moyenne quadratique de f sur $[-\pi; \pi]$.

Proposition 34.2.2. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale avec $e_n(t) := e^{int}$.*

Démonstration. Si $n \neq p$, on a

$$\langle e_n ; e_p \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-p)t} \mathrm{d}t = 0\,.$$

Et, si $n = p$, on a

$$\langle e_n ; e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-n)t} \mathrm{d}t = 1\,.$$

□

Ainsi, on a

$$S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) e_n = \sum_{n=-p}^{p} \langle f ; e_n \rangle \, e_n\,.$$

Alors, $S_p(f)$ est en fait la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel Vect $(e_{-p}, \cdots, e_{-1}, e_0, e_1, \cdots, e_p)$. On note $\mathbb{T}_p$ ce sous-espace vectoriel qui correspond à l'ensemble des polynômes trigonométriques du type $t \mapsto \sum_{-p}^{p} \alpha_n e^{int}$. On en déduit que la distance entre la fonction f et ce sous-espace vectoriel vaut $\mathrm{d}\,(f; \mathbb{T}_p) = ||f - S_p(f)||_2$ d'où aussi

$$||f||_2^2 = ||S_p(f)||_2^2 + \mathrm{d}\,(f; \mathcal{P}_p)^2 \geq ||S_p(f)||_2^2\,.$$

On obtient alors l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2\,,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. En particulier, on en déduit que la suite $\left(\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Or elle est croissante donc elle converge et l'on a de plus

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2\,.$$

34.2.2 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 34.2.3. *Pour tout élément f de $CM_{2\pi}$, la suite des sommes partielles de Fourier $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace préhilbertien $C_{2\pi}$. En d'autres termes :*

$$\lim_{p\to\infty} ||S_p(f) - f||_2 = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_p(f)(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Corollaire 34.2.4 (Formule de Parseval)**.** *Pour tout élément f de $CM_{2\pi}$, on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2\,.$$

Sous forme trigonométrique, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) .$$

De même, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^* g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)^* c_n(g) .$$

Exemple 34.2.5. *Soit f une fonction 2π-périodique paire telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [-\pi;\pi]$. On calcule sa série de Fourier comme suit.*
Comme f est paire, $b_n(f) = 0$ et si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n .
\end{aligned}$$

Puis, $a_0(f) = \frac{\pi^2}{3}$. La formule de Parseval nous donne donc

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} .$$

On en déduit par ailleurs

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .$$

34.3 Convergence ponctuelle

Jusqu'ici, nous n'avions pas une vraie convergence au sens où pour chaque x, la série convergeait. C'est donc l'objet de cette section.

Théorème 34.3.1. *Soit f une fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la famille des coefficients de Fourier de f est sommable. En d'autres termes, on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty .$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} S_p(f)(x)\,.$$

34.4 Exercices

Exercice 1

Calculer le développement en série de Fourier des fonctions 2π-périodiques suivantes :

- $f_1(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$.
- $f_2(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.
- $f_3(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.
- $f_4(x) = \max(0, \sin x)$.
- $f_5(x) = |\sin x|^3$.

Exercice 2

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}\,.$$

Exercice 3

Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ sur $[-\pi; \pi[$.
1) Chercher le développement en série de Fourier de f.
2) En déduire les sommes des séries $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\tilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 4

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) := e^{ax}$ avec $a \neq 0$.
2) Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
3) Que vaut $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2}$

Chapitre 35

Équations différentielles

35.1 Définitions

Définition 35.1.1 (Équation différentielle)**.** *Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre la variable t et les dérivées d'ordre* 0, $1 \cdots$, *n d'une fonction inconnue x de t. On l'écrit symboliquement :*

$$F\left(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\right) = 0\,. \tag{35.1}$$

Définition 35.1.2 (Résolution)**.** *Résoudre cette équation, c'est à la fois donner un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction x sur I telle que* (35.1) *soit vérifiée pour tout $t \in I$.*

35.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 35.2.1 (Rappel)**.** *Une fonction F est lipschitzienne si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$.*

Contre-exemple 35.2.2. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

Théorème 35.2.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *On considère l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = F\left(t, x(t)\right)$. On demande également une condition au bord : $x(t_0) = x_0$. On suppose que la fonction F est continue et lipschitzienne pour la deuxième variable. Alors, cette équation différentielle admet une unique solution.*

Remarque 35.2.4 (Phénomène de Peano)**.** *Il faut bien vérifier que la fonction est lipschitzienne sinon un phénomène dit de Peano peut apparaître à savoir la non-unicité de la solution.*

Exemple 35.2.5. *On considère l'équation différentielle*

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)}\,,$$

avec $x(0) = 0$. On cherche à résoudre sur $t \geq 0$. Alors, pour tout $t_0 \geq 0$, la fonction suivante est bien une solution de l'équation différentielle avec problème au bord :

$$x^{(t_0)}(t) := (t - t_0)^2 \, H(t - t_0)\,.$$

35.3 Équations différentielles linéaires

35.3.1 Définition

Définition 35.3.1 (Équation différentielle linéaire)**.** *Une équation différentielle linéaire est une équation différentielle telle que la fonction sous-jacente soit linéaire (donc lipschitzienne) pour chacune des coordonnées $x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)$. En d'autres termes, c'est une équation différentielle de la forme :*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = s(t)\,.$$

Notation 35.3.2. *Les fonctions $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont les coefficients de l'équation. La fonction s est le second membre de l'équation (ou la sortie).*

35.3.2 Espace affine - Espace vectoriel

Définition 35.3.3. *L'équation homogène associée à cette équation différentielle est*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0\,.$$

On a simplement enlevé le second membre.

Théorème 35.3.4. *Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre. Alors $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel (voir page 201) de dimension n. Et, pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$, on a $x_1 - x_2 \in \mathcal{S}_0$.*
Ainsi, il suffit de résoudre l'équation homogène et de trouver une solution particulière x_p et l'on a $\mathcal{S} = x_p + \mathcal{S}_0$. On dit que $\mathcal{S}$ est un espace affine (voir page 214).

35.3.3 Premier ordre à coefficients constants

Définition 35.3.5. *On considère ici une équation de la forme*

$$x'(t) + ax(t) = s(t)\,,$$

où $a \in \mathbb{R}$ et s est une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 35.3.6 (Espace affine)**.** *On sait que l'espace des solutions est un espace affine de dimension 1. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.*

35.3.3.1 Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + ax(t) = 0$.

Théorème 35.3.7. *Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.*

Démonstration. Soit x une solution de l'équation homogène associée. On pose $y(t) := x(t)e^{+at}$. On a alors :

$$y'(t) = x'(t)e^{at} + ax(t)e^{at} = (x'(t) + ax(t))\, e^{at} = 0\,.$$

La fonction y est donc constante et égale à λ. Or, $x(t) = y(t)e^{-at}$. $\square$

Remarque 35.3.8. *On résout en fait l'équation caractéristique $X + a = 0$.*

35.3.3.2 Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-at}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda(t)e^{-at}\right) + a\lambda(t)e^{-at} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{at}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = e^{-at}\int_0^t s(u)e^{au}\mathrm{d}u\,.$$

La solution générale de l'équation initiale est donc

$$x(t) = \left(C + \int_0^t s(u)e^{au}\mathrm{d}u\right)e^{-at}\,,$$

où C est une constante.

Astuce pour trouver la bonne entrée L'idée à retenir est que l'entrée et la sortie ne diffèrent que peu. Ainsi, si la sortie est une fonction polynômiale, l'entrée est aussi une fonction polynômiale. Si l'on a un logarithme en sortie, on a du logarithme en entrée. Si la sortie est une fonction trigonométrique, l'entrée est aussi une fonction trigonométrique. Idem avec les exponentielles. Et, si la sortie est une fraction rationnelle, l'entrée contient des fractions rationnelles et/ou des logarithmes et/ou des arctangentes.

35.3.4 Premier ordre à coefficients non constants

35.3.4.1 Définition

On considère ici une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = s(t)\,.$$

La fonction a ne doit pas être oubliée.

Remarque 35.3.9. *L'espace des solutions n'est pas forcément affine. Il y a en effet des soucis si a s'annule. On se place donc sur un intervalle où a ne s'annule pas et l'on se ramène alors à une équation de la forme*

$$x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

Proposition 35.3.10. *Alors, l'espace des solutions est un espace affine de dimension* 1*. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.*

35.3.4.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 35.3.11. *L'équation homogène est ici $x'(t) + c(t)x(t) = 0$.*

Théorème 35.3.12. *Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-C(t)}$ où C est une primitive de c.*

Démonstration. Soit x une solution de l'équation homogène associée. On pose $y(t) := x(t)e^{C(t)}$. On a alors :

$$y'(t) = x'(t)e^{C(t)} + C'(t)x(t)e^{C(t)} = \left(x'(t) + c(t)x(t)\right)e^{C(t)} = 0\,.$$

La fonction y est donc constante et égale à λ. Or, $x(t) = y(t)e^{-C(t)}$. □

35.3.4.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-C(t)}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\left(\lambda(t)e^{-C(t)}\right)' + a\lambda(t)e^{-C(t)} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{C(t)}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = e^{-C(t)}\int_0^t s(u)e^{C(u)}\mathrm{d}u\,.$$

La solution générale de l'équation initiale est donc

$$x(t) = \left(\mu + \int_0^t s(u)e^{C(u)}\mathrm{d}u\right)e^{-C(t)}\,,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

35.4 Non linéaires du premier ordre

Bon nombre d'équations utiles ne sont pas linéaires. L'équation régissant la charge et la décharge de la cathode dans une batterie de lithium n'est pas linéaire.

Exemple 35.4.1. *Une équation très simplifiée qui intervient dans les modèles biologiques :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\nabla V\left(x(t)\right)$$

où V est un potentiel non-convexe, comme par exemple $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

35.4.1 Équations à variables séparées

Définition 35.4.2. *Une équation à variables séparées est une équation dans laquelle la fonction sous-jacente F est de la forme $F(t,x,x') = f_1(t)f_2(x)x'$. Une telle équation se met donc sous la forme $g(x(t))x'(t) = h(t)$. En utilisant la notation physicienne, il vient :*

$$g(x(t))\mathrm{d}(x(t)) = h(t)\mathrm{d}t\,.$$

Proposition 35.4.3. *Il suffit d'intégrer. Soit G une primitive de g et soit H une primitive de h. On intègre de t_0 à t :*

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = H(t) - H(t_0)\,.$$

Ainsi, si G est une bijection, on peut écrire

$$x(t) = G^{-1}\left\{G(x(t_0)) + H(t) - H(t_0)\right\}\,.$$

35.4.2 Exemple

On considère l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -V'\left(x(t)\right)\,,$$

avec $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t) - x(t)^3} = \mathrm{d}t\,.$$

On intègre la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-x^3}$ en décomposant en éléments simples (voir page 161) : $\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$ d'où

$$\log|x(t)| - \frac{1}{2}\log\left|x(t)^2 - 1\right| = t + \lambda\,,$$

où λ est une constante. On prend l'exponentielle, on inverse et il vient $\sqrt{1 - \frac{1}{x(t)^2}} = Ce^{-t}$ d'où

$$x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha e^{-2t}}}\,, \quad \text{avec } \alpha > 0\,.$$

35.4.3 Équations homogènes

Définition 35.4.4 (Équation homogène)**.** *Une équation homogène est de la forme*

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right).$$

Proposition 35.4.5. *On pose : $y(t) := \frac{x(t)}{t}$ c'est-à-dire $x(t) = ty(t)$. Conséquemment, l'équation initiale devient*

$$ty'(t) + y(t) = f(y(t)),$$

ce qui est une équation à variables séparées :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{f(y(t)) - y(t)} = \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

35.4.4 Équations de Bernoulli

Définition 35.4.6 (Équation de Bernoulli)**.** *Une équation de Bernoulli est une équation de la forme*

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)x(t)^{\alpha}, \ \alpha \neq 1, \ \alpha \neq 0.$$

Proposition 35.4.7. *On fait le changement de variable : $y(t) := x(t)^{\beta}$ où β sera choisi subséquemment. Ainsi, $x(t) = y(t)^{\frac{1}{\beta}}$. L'équation devient :*

$$\frac{1}{\beta}y'(t)y(t)^{\frac{1}{\beta}-1} + a(t)y(t)^{\frac{1}{\beta}} = b(t)y(t)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Puis, en multipliant par $y(t)^{1-\frac{1}{\beta}}$, on a

$$\frac{1}{\beta}y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}.$$

On choisit donc $\beta := 1 - \alpha$ et l'équation en y est linéaire.

35.5 Linéaires du deuxième ordre

35.5.1 Coefficients constants

35.5.1.1 Définition

Définition 35.5.1. *On considère ici une équation de la forme*

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = s(t).$$

Proposition 35.5.2 (Espace affine)**.** *On sait que l'espace des solutions est un espace affine de dimension 2. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.*

35.5.1.2 Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$.

Définition 35.5.3 (Équation caractéristique)**.** *L'équation caractéristique associée est $X^2 + aX + b = 0$. On note $\Delta := a^2 - 4b$. Trois cas :*

- *Si $\Delta > 0$, il y a deux solution réelles r_1 et r_2.*
- *Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution réelle r_0.*
- *Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes $r + is$ et $r - is$*

Théorème 35.5.4. *Si $\Delta > 0$, alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{r_1 t}\,;\, t \mapsto e^{r_2 t})$.*
Si $\Delta = 0$, alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto te^{r_0 t}\,;\, t \mapsto e^{r_0 t})$.
Si $\Delta < 0$, alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \cos(st)\, e^{rt}\,;\, t \mapsto \sin(st)\, e^{rt})$.

Il convient de noter que dans chacun des trois cas, les deux vecteurs forment une base. En effet, la dimension de l'espace vectoriel des solutions à l'équation homogène est 2. Or, il est facile de vérifier que dans chacun des trois cas, ce sont des familles libres.

35.5.1.3 Recherche d'une solution particulière

Notation 35.5.5. *On note $(e_1\,;\, e_2)$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$.*

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda_1(t)e_1(t) + \lambda_2(t)e_2(t)$ où les deux fonctions λ_1 et λ_2 doivent vérifier

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)e_1'(t) + \lambda_2'(t)e_2'(t) = s(t) \\ \lambda_1'(t)e_1(t) + \lambda_2'(t)e_2(t) = 0 \end{cases}.$$

On obtient alors $\lambda_1'(t) = \frac{e_2(t)s(t)}{e_1'(t)e_2(t) - e_1(t)e_2'(t)}$ et $\lambda_2'(t) = -\frac{e_1(t)s(t)}{e_1'(t)e_2(t) - e_1(t)e_2'(t)}$.

Cette méthode semble peut-être moins naturelle que celle utilisée dans les équations différentielles linéaires du premier ordre mais elle répond à un objectif simple : ne pas retomber sur un des vecteurs de la base de l'espace vectoriel associé.

Astuce pour trouver la bonne entrée L'idée à retenir est que l'entrée et la sortie ne diffèrent que peu. Ainsi, si la sortie est une fonction polynômiale, l'entrée est aussi une foncion polynômiale. Si l'on a un logarithme en sortie, on a du logarithme en entrée. Si la sortie est une fonction trigonométrique, l'entrée est aussi une fonction trigonométrique. Idem avec les exponentielles. Et, si la sortie est une fraction rationnelle, l'entrée contient des fractions rationnelles et/ou des logarithmes et/ou des arctangentes.

35.5.2 Coefficients non constants

35.5.2.1 Définition

Définition 35.5.6. *Une équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients non constants est une équation de la forme*

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

35.5.2.2 Deux exemples très simples

On peut considérer l'équation

$$x''(t) = tx(t)\,,$$

et l'équation

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2 - 1)x(t) = 0\,.$$

35.5.2.3 Méthode générale de résolution de ces équations

Théorème 35.5.7. *Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations et il n'y en aura jamais.*

Le théorème est admis. Voir la dernière page du livre "Théorie de Galois" d'Yvan Gozard.

Exemple 35.5.8. *L'équation $x''(t) = tx(t)$ ne peut pas être résolue.*

Remarque 35.5.9. *Un bon nombre de fonctions sont définies comme étant des solutions à certaines équations différentielles non résolubles. Exemple : les fonctions de Bessel.*

35.6 Exercices

Exercice 1

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1) $x'(t) - 3x(t) = 2$.
2) $x'(t) + 2x(t) = e^{2t}$.
3) $x'(t) + x(t) = \log(t)$.
4) $x'(t) - 5x(t) = e^{5t}$.
5) $x'(t) + 3t^2x(t) = t^2$.
6) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$.
7) $(1 + t^2)x'(t) - tx(t) = 1 + t + t^2$.

Exercice 2

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1'(t) & = & 4x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & 2t+2 \\ x_2'(t) & = & -3x_1(t) & - & x_2(t) & + & t^2+1 \end{array}\right. .$$

Exercice 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & te^{5t} \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & + & 7x_2(t) & + & 2te^{5t} \end{array}\right. .$$

Exercice 4

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & + & x_2(t) & + & x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_3'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_4'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & x_3(t) & + & 2x_4(t) \end{array}\right. .$$

Exercice 5

Résoudre ces différentes équations différentielles du premier ordre :

1) $tx'(t) - 2x(t) - t^4 = 0$.

2) $2tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t}$.

3) $x'(t)\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-x(t)^2}$.

4) $x'(t)\tan(t) = x(t)$.

5) $x'(t) = 2tx(t)^2$.

6) $x(t) - \frac{t}{2}x'(t) = \sqrt{x(t)}$.

7) $tx'(t) - x(t) - x(t)^3 = 0$.

Exercice 6

Résoudre ces différentes équations différentielles du second ordre :

1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}$.

2) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}$.

3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t)$.

4) $t^2(\log(t) - 1)\,x''(t) - tx'(t) + x(t) = 0$.

5) $t^2x''(t) + tx'(t) - x(t) = t^2$.

6) $t^2x''(t) - t(t+2)x'(t) + (t+2)x(t) = -t(t+1)$.

Septième partie

Topologie

Chapitre 36

Introduction

Partie à part dans cet ouvrage puisque l'on ne trouve aucune section dédiée aux exercices dans aucun des trois chapitres. Il est donc naturel de se demander si cette partie est importante ou non.

36.1 Intérêt

La topologie est au cœur de la notion de convergence. En fait, qui dit convergence dit topologie sous-jacente. Il nous apparait donc évident qu'une partie propre à la topologie devait être rédigée. Néanmoins, bien qu'il y ait quelques exercices d'applications directe du cours au sein du cours, nous avons choisi de ne pas mettre de section dédiée aux exercices.

Comprendre la topologie n'est pas nécessaire pour la suite à Télécom. Mais, c'est un plus indéniable dès que l'on aborde, dans le cours de probabilités et statistiques la notion de convergences des variables aléatoires.

Le même phénomène se produit avec le cours sur les distributions.

Par ailleurs, pour ceux qui voudront approfondir leurs connaissances en mathématiques appliquées, il leur faudra bien revoir la topologie.

36.2 Objectifs

Plus que de former l'étudiant à la topologie, cette partie a surtout pour but de l'y sensibiliser. À bien des égards, cette partie est un bonus.

36.3 Prérequis

La partie sur l'analyse doit avoir été étudiée au préalable. Il en est de même avec la partie sur l'algèbre linéaire.

36.4 Organisation

Voici l'organisation générale de cette partie.

36.4.1 Espaces vectoriels normés

D'abord, les notions les plus classiques des espaces vectoriels normés sont introduites. Puis, l'on voit les propriétés simples. De nombreuses figures permettent à l'étudiant d'acquérir une intuition des concepts.

36.4.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans ce chapitre, on se concentre sur les espaces vectoriels normés qui sont de dimension finie. Ces espaces ont le bon goût que toutes leurs normes y induisent des topologies équivalentes ; ce qui n'est pas toujours vrai. De plus, les fermés bornés y sont compacts. On retrouve notamment les résultats les plus classiques et les plus intuitifs.

36.4.3 Notions avancées de topologie

Ce chapitre est probablement l'un des plus ardus. Il relève très clairement du hors programme mais présente un intérêt assez simple : aborder le théorème de Banach-Steinhaus. Ce dernier implique *grosso modo* que toute suite de distributions converge, sous une hypothèse raisonnable à savoir qu'elle converge séquentiellement. Ce chapitre est à réserver aux plus aguerris et aux plus courageux.

Chapitre 37

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, nous présentons les espaces vectoriels normés. Il convient de signaler que l'on ne suppose pas la finitude de la dimension de l'espace en question. Par ailleurs, il faut souligner que tout espace vectoriel muni d'une topologie n'est pas nécessairement normé.

37.1 Normes et distances

Dans toute la suite, $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. De manière générique, le corps de base est noté $\mathbb{K}$. Fondamentalement, la différence est dans l'utilisation du module à la place de celle de la valeur absolue.

37.1.1 Définitions

On commence par introduire la notion de norme.

Définition 37.1.1 (Norme sur un espace vectoriel). *L'application $\mathcal{N}$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathcal{N}(x) := ||x||$ est une norme sur $\mathbb{E}$ si et seulement si elle vérifie les trois axiomes suivants :*

- *Pour tout $x \in \mathbb{E}$, $||x|| \geq 0$. De plus, $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{E}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$.*
- *Pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, on a l'inégalité triangulaire : $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.*

Remarque 37.1.2. *Si $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathbb{E}$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, on a*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y|| \leq ||x|| + ||y|| \,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire et de remarquer que $|| - x|| = ||x||$. En effet : $x = y + (x - y)$ d'où $||x|| \leq ||y|| + ||x - y||$ si bien que l'on a $||x - y|| \geq ||x|| - ||y||$. Les vecteurs x et y jouant un rôle symétrique, il s'ensuit aussi $||x - y|| \geq ||y|| - ||x||$. □

Définition 37.1.3 (Espace vectoriel normé). *Un espace vectoriel $\mathbb{E}$ muni d'une norme $\mathcal{N}$ est appelé un espace vectoriel normé.*

Donnons maintenant quelques exemples de normes.

Exemple 37.1.4. *Sur $\mathbb{R}$, l'application qui à un réel associe sa valeur absolue est une norme.*

Exemple 37.1.5. *Sur $\mathbb{C}$, l'application qui à un complexe associe son module est une norme.*

Exemple 37.1.6. *En dimension finie, avec $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n$, on dispose de trois normes bien connues. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Les trois normes les plus utilisées sont :*

- $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ *où $|x_i|$ désigne la valeur absolue de x_i si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module sinon.*
- $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ *est la norme euclidienne de x. Elle dérive d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.*
- $||x||_\infty := \max_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i|$ *est la norme uniforme.*

Exercice 37.1.7. *Vérifier que $x \mapsto ||x||_1$, $x \mapsto ||x||_2$ et $x \mapsto ||x||_\infty$ telles que définies dans l'Exemple 37.1.6 sont bien des normes sur $\mathbb{K}^n$.*

Remarque 37.1.8. *En fait, on peut considérer pour tout $p \in [1; +\infty[$, la norme $\mathcal{N}_p$ définie par $\mathcal{N}_p(x) := ||x||_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Donnons maintenant d'autres exemples, en dimension infinie :

Exemple 37.1.9. *Plaçons-nous sur $\mathbb{K}[X]$, l'espace des polynômes sur $\mathbb{K}$. Alors, $P(X) := \sum_{i=0}^\infty \alpha_i X^i$ où il n'y a qu'un nombre fini de coefficients α_i non nuls. Similairement au cas de la dimension finie, on peut considérer :*

- $||P||_1 := \sum_{i=0}^\infty |\alpha_i|$.
- $||P||_2 := \sqrt{\sum_{i=0}^\infty |\alpha_i|^2}$.
- $||P||_\infty := \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i|$.

Exercice 37.1.10. *Vérifier que $P \mapsto ||P||_1$, $P \mapsto ||P||_2$ et $P \mapsto ||P||_\infty$ telles que définies dans l'Exemple 37.1.9 sont bien des normes sur $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque 37.1.11. *À nouveau, sur $\mathbb{K}[X]$, l'application $\mathcal{N}_p$ définie par $\mathcal{N}_p(x) := ||P||_p := (\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.*

On peut également regarder le cas de la dimension infinie non dénombrable (admis) :

Exemple 37.1.12. *Pour $a < b$ deux réels, on considère $\mathbb{E} := \mathcal{C}([a;b], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $p \in [1; +\infty[$, on peut considérer la norme $\mathcal{N}_p$ définie par $\mathcal{N}_p(f) := ||f||_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$. On peut aussi considérer : $||f||_\infty := \sup_{t \in [a;b]} |f(t)|$.*

Exercice 37.1.13. *Vérifier que pour tout $p \in [1; +\infty[$, $\mathcal{N}_p$ telle que définie dans l'Exemple 37.1.12 est bien une norme sur $\mathcal{C}([a;b], \mathbb{C})$.*

Définition 37.1.14. *Un vecteur x de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, ||.||)$ est dit unitaire si $||x|| = 1$.*

Remarque 37.1.15. *À tout vecteur non nul x de $\mathbb{E}$, on peut associer un vecteur unitaire qui lui est colinéaire et de même sens à savoir $x' := \frac{x}{||x||}$.*

On définit maintenant la notion de distance :

Définition 37.1.16. *Une distance d sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application de $\mathbb{E}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait les axiomes suivants :*
- *Pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$. Et $\mathrm{d}(x,y) = 0$ implique $x = y$.*
- *Pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.*
- *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$, on a $\mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.*

Définition 37.1.17. *Un espace vectoriel muni d'une distance d est appelé un espace métrique.*

Remarque 37.1.18. *Un espace métrique n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Par exemple l'espace des probabilités admettant un moment d'ordre deux fini peut être muni de la distance de Wasserstein mais n'est pas un espace vectoriel pour autant. Pour information, la distance de Wasserstein entre deux telles probabilités est*

$$\mathbb{W}(\mu, \nu) := \inf \mathbb{E}\left(||X - Y||^2\right) ,$$

où l'infimum est pris sur toutes les variables aléatoires X et Y ayant pour lois de probabilité respectives μ et ν.

Cette distance est d'un intérêt crucial en transport optimal. Nous n'en dirons pas plus.

Lemme 37.1.19. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni de la norme $\mathcal{N}$. Alors, on peut lui associer une distance d :*

$$\mathrm{d}(x,y) := ||x - y|| .$$

Exercice 37.1.20. *Démontrer que l'application d de l'Exemple 37.1.19 est bien une distance sur $\mathbb{E}$.*

37.1.2 Boules ouvertes et fermées

On commence par introduire la notion de boule ouverte.

Définition 37.1.21. *Soit $x_0 \in \mathbb{E}$. Soit $r > 0$. Alors la boule* **ouverte** *de centre x_0 et de rayon r est :*

$$\mathbb{B}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{E} \ : \ ||x - x_0|| < r\} .$$

De la même manière :

Définition 37.1.22. *Soit* $x_0 \in \mathbb{E}$*. Soit* $r > 0$*. Alors la boule* **fermée** *de centre* x_0 *et de rayon* r *est :*

$$\overline{\mathbb{B}}\,(x_0, r) := \{x \in \mathbb{E} \;:\; ||x - x_0|| \leq r\}\ .$$

Exemple 37.1.23. *En particulier, la boule unité* $\mathbb{U}$ *de* $\mathbb{E}$ *est la boule fermée de centre* 0 *et de rayon* 1 *:* $\mathbb{U} := \overline{\mathbb{B}}\,(0,1) = \{x \in \mathbb{E} \;:\; ||x|| \leq 1\}$*.*

Il est intéressant de noter que la boule unité dépend fortement de la norme considérée.

Exemple 37.1.24. *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on a les boules unités suivantes :*

FIGURE 37.1 – Boule unité de la norme $||.||_1$

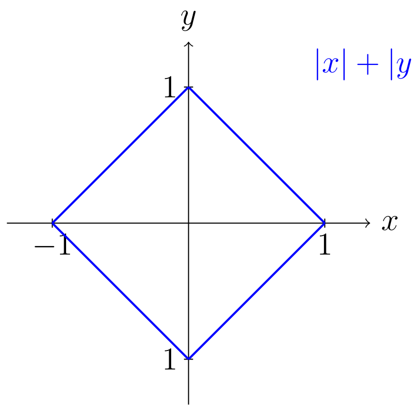


FIGURE 37.2 – Boule unité de la norme $||.||_2$

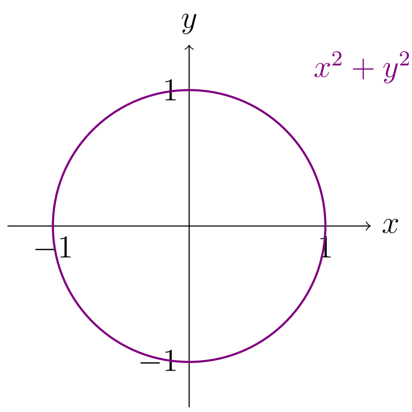
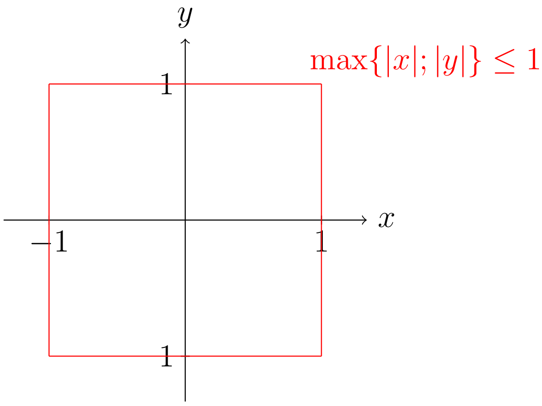


FIGURE 37.3 – Boule unité de la norme $||.||_\infty$



37.1.3 Distance d'un point à une partie

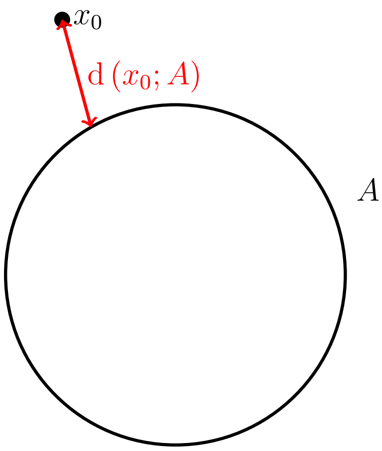
Dans ce paragraphe, $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel normé, de norme $||.||$.
Soit $x_0 \in \mathbb{E}$ et soit $A \subset \mathbb{E}$, non vide.

Définition 37.1.25. *La distance de x_0 à A est le réel positif*

$$\mathrm{d}(x_0, A) := \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x_0, y) = \inf_{y \in A} ||y - x_0|| \, .$$

Cette notion s'illustre bien avec une représentation graphique :

FIGURE 37.4 – Distance d'un point à une partie



Remarque 37.1.26. *On peut avoir $\mathrm{d}(x_0, A) = 0$ sans pour autant que l'on ait $x_0 \in A$.*

Exemple 37.1.27. *Prenons* $\mathbb{R}^2$ *et munissons-le de la norme euclidienne. On considère* $A := \mathbb{B}(0,1)$ *la boule ouverte de centre* 0 *et de rayon* 1*. Alors tout point de la sphère unité est de distance* 0 *avec* A*. Pourtant, ces points ne sont pas dans* A*.*

Exemple 37.1.28. *On considère* $\mathbb{R}$ *muni de la valeur absolue. Alors, le nombre* π *n'est pas rationnel :* $\pi \notin \mathbb{Q}$*. Pourtant,* $\mathrm{d}(\pi, \mathbb{Q}) = 0$*. En effet, en considérant* $(r_n)_n$ *la suite des valeurs approchées décimales par défaut d'ordre* n *de* π*, il vient* $||\pi - r_n|| \leq 10^{-n} \longrightarrow 0$*.*

37.1.4 Parties bornées

Définition 37.1.29. *Une partie* A *non vide d'un espace vectoriel normé de* $\mathbb{E}$ *est dite bornée si la partie de* $\mathbb{R}$ *:* $\{\mathrm{d}(x,y) \ : \ (x,y) \in A^2\}$ *est majorée.*

Lemme 37.1.30. *Une partie* A *de* $\mathbb{E}$*, espace vectoriel normé, est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule ouverte* $\mathbb{B}(0,r)$ *de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$*.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $A \subset \mathbb{B}(0,r)$ alors pour tout $x, y \in A$: $||x-y|| \leq ||x|| + ||y|| \leq 2r$ d'où A est bornée.

Réciproquement, si A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \in A$, on ait $||x-y|| \leq M$. Soit un point quelconque x_0 de A. Posons $r := ||x_0|| + M + 1$. Alors pour tout $x \in A$, il vient

$$||x|| = ||(x - x_0) + x_0|| \leq ||x - x_0|| + ||x_0|| \leq M + ||x_0|| < r\,.$$

□

Exemple 37.1.31 (Parties bornées dans le plan $\mathbb{R}^2$)**.** *Les segments, les ellipses, les cercles, les disques sont des parties bornées dans le plan.*

Contre-exemple 37.1.32 (Parties non bornées dans le plan $\mathbb{R}^2$)**.** *Les demi-plans, les droites, les demi-droites, les hyperboles et les paraboles sont des parties non bornées dans le plan.*

Il est bien sûr plus difficile de représenter la non-bornitude sur une image de taille nécessairement finie donc on ne donne pas de représentation graphique.

Définition 37.1.33 (Applications bornées)**.** *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels normés. Pour simplifier, on note* $||.||$ *les deux normes. Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{E}$*. L'application* f *de* A *dans* $\mathbb{F}$ *est dite bornée si* $f(A)$ *est une partie bornée de* $\mathbb{F}$*.*

Notation 37.1.34. *On note* $\mathcal{B}(A, \mathbb{F})$ *l'ensemble des applications bornées de* A *dans* $\mathbb{F}$*.*

Lemme 37.1.35. *L'ensemble* $\mathcal{B}(A, \mathbb{F})$ *peut être muni d'une structure d'espace vectoriel. Et, on peut normer cet espace vectoriel par la norme suivante :*

$$||f||_\infty := \sup_{x \in A} ||f(x)||\,.$$

37.1.5 Applications Lipschitziennes

Définition 37.1.36. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés et soit $A \subset \mathbb{E}$. Une application f de A dans $\mathbb{F}$ est dite Lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ si pour tous $x, y \in A$, on a $||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$.*

Remarque 37.1.37. *Cela équivaut à dire que le taux de variation $\frac{||f(x)-f(y)||}{||x-y||}$ est majoré quand x et y décrivent A, avec $x \neq y$.*

Exemple 37.1.38. *L'application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := ||x||$ est 1-Lipschitz. En effet, $\Big|||x|| - ||y||\Big| \leq ||x - y||$.*

Contre-exemple 37.1.39. *L'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := \sqrt{x}$ n'est pas Lipschitzienne sur $[0; a]$ mais elle l'est sur $[a; +\infty[$.*

En effet, prenons $x := 0$ et $y \in [0; a]$. Alors $|f(y) - f(x)| = \sqrt{y}$. Et donc $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Or, l'ensemble $\left\{\frac{1}{\sqrt{y}} \ : \ y \in]0; a]\right\}$ n'est pas bornée si bien que f n'est pas Lipschitzienne sur $[0; a]$.

Et, pour tout $y > x \geq a > 0$, on a $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} = \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Il est important de comprendre que la notion de fonction Lipschitzienne est liée (sans lui être équivalente) à celle de fonction dérivable.

Proposition 37.1.40. *Soit f une fonction dérivable de l'intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est Lipschitzienne sur $\mathcal{I}$ si et seulement si sa dérivée est bornée. Alors, $k := ||f'||_\infty := \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)|$ convient comme rapport de Lipschitz.*

Démonstration. Si f' est bornée sur $\mathcal{I}$, $k := ||f'||_\infty := \sup_{x \in \mathcal{I}} |f'(x)| < \infty$. Puis, d'après le théorème des accroissements finis, pour tous $x, y \in \mathcal{I}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq k|y - x|$ d'où f est k-Lipschitzienne.

Réciproquement, si f est k-Lipschitzienne, soit $x_0 \in \mathcal{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{I}$ avec $x \neq x_0$, on a

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq k\,.$$

Par conséquent, $|f'(x_0)| := \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq k$. Il s'ensuit que $|f'|$ est bornée par k sur $\mathcal{I}$. □

Théorème 37.1.41. *Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois espaces vectoriels normés. Soit une application f de A dans $\mathbb{F}$ avec $A \subset \mathbb{E}$. Soit ensuite une application g de B dans $\mathbb{G}$ avec $B \subset \mathbb{F}$ et $f(A) \subset B$. On suppose que f est k-Lipschitzienne et que g est k'-Lipschitzienne. Alors l'application $g \circ f$ de A dans $\mathbb{G}$ est kk'-Lipschitzienne.*

Démonstration. En effet, pour tous $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned}||(g \circ f)(y) - (g \circ f)(x)|| &= ||g[f(y)] - g[f(x)]|| \\ &\leq k'||f(y) - f(x)|| \\ &\leq k'k||y - x||\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

□

37.2 Suites dans un espace vectoriel normé

37.2.1 Convergence d'une suite

Qui dit suite dit convergence...

Définition 37.2.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé. Soit $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{E}$. On dit que la suite u converge vers l'élément $l \in \mathbb{E}$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall p \in \mathbb{N}\,, \ \ p \geq p_0 \Rightarrow ||u_p - l|| < \epsilon\,.$$

Lemme 37.2.2. *L'élément $l \in \mathbb{E}$ est alors unique. On l'appelle* **la limite** *de la suite u : $l = \lim_{p\to\infty} u_p$.*

Remarque 37.2.3. *On a équivalence entre $l = \lim_p u_p$ et $\lim_p ||u_p - l|| = 0$.*

Définition 37.2.4. *Une suite u qui ne converge vers aucun élément de $\mathbb{E}$ est dite divergente.*

Proposition 37.2.5. *Soient deux suites u et v. On les suppose convergentes avec $l = \lim_p u_p$ et $l' = \lim_p v_p$. Soient λ et μ deux scalaires de $\mathbb{K}$. Alors la suite w définie par $w_p := \lambda u_p + \mu v_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ converge aussi et l'on a $\lim_p w_p = \lambda l + \mu l'$.*

37.2.2 Comparaison de deux normes

Dans la mesure où l'on a défini plusieurs normes pour un même espace vectoriel, on pourrait être tenté de les comparer. En effet, la convergence étant une notion intrinsèquement liée à la norme considérée, toutes les normes donnent-elles la même limite ?

Cette question légitime trouve sa réponse dans ce paragraphe.

Théorème 37.2.6. *Soit un espace vectoriel $\mathbb{E}$ que l'on munit de deux normes : $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$. Alors toute suite de points de $\mathbb{E}$ qui converge vers 0 pour $\mathcal{N}$ converge également vers 0 pour $\mathcal{N}'$ si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{E}$ on a $\mathcal{N}'(x) \leq \alpha\mathcal{N}(x)$.*

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{N}'(x) \leq \alpha\mathcal{N}(x)$. Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 pour $\mathcal{N}$. Par définition, on a $\mathcal{N}(u_n) \longrightarrow 0$. Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{N}'(u_n) \leq \alpha\mathcal{N}(u_n) \longrightarrow 0$ d'où u converge vers 0 pour $\mathcal{N}$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_\alpha \in \mathbb{E}$ tel que $\mathcal{N}'(x_\alpha) > \alpha\mathcal{N}(x_\alpha)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe u_n tel que $\mathcal{N}'(u_n) > n\mathcal{N}(u_n)$. On considère le vecteur unitaire (pour $\mathcal{N}'$) associé à u_n, $v_n := \frac{u_n}{\mathcal{N}'(u_n)}$. Alors, $\mathcal{N}'(v_n) = 1$. Et pourtant, $\mathcal{N}(v_n) = \frac{\mathcal{N}(u_n)}{\mathcal{N}'(u_n)} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Ainsi, la suite v converge vers 0 pour $\mathcal{N}$ mais pas pour $\mathcal{N}'$.

□

Remarque 37.2.7. *Il peut sembler curieux au premier abord de se restreindre à la convergence vers* 0*. Toutefois, comme on est dans un espace vectoriel, si la suite* u *converge vers* $l \in \mathbb{E}$ *pour la norme* $\mathcal{N}$*, il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite* v *avec* $v_n := u_n - l$*, laquelle tend bien vers* 0 *pour la norme* $\mathcal{N}$*.*

Définition 37.2.8. *Deux normes* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}'$ *sur l'espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *sont dites équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs* α *et* β *tels que pour tout* $x \in \mathbb{E}$*, on ait* $\alpha\mathcal{N}(x) \leq \mathcal{N}'(x) \leq \beta\mathcal{N}(x)$*.*

Remarque 37.2.9. *Quand deux normes sont équivalentes, les topologies (voir page 441 pour la définition générale d'une topologie) qu'elles induisent sont les mêmes. En d'autres termes, la convergence d'une suite d'éléments de* $\mathbb{E}$ *dans l'une des deux normes vers* $l \in \mathbb{E}$ *implique la convergence vers le même élément* l *dans l'autre norme.*

Remarque 37.2.10. *On verra plus tard qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Exemple 37.2.11. *On se place sur* $\mathbb{K}^n$*. Alors les trois normes* $||.||_1$*,* $||.||_2$ *et* $||.||_\infty$ *sont équivalentes. En effet, pour tout* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$*, soit* k_0 *tel que* $|x_{k_0}| = \max_{i\in[\![1;n]\!]} |x_i|$*. De fait, on a :*

$$\begin{aligned}
||x||_\infty = |x_{k_0}| &= \sqrt{|x_{k_0}|^2} \\
&\leq \sqrt{|x_{k_0}|^2 + \underbrace{\sum_{i\in[\![1;n]\!], i\neq k_0} |x_i|^2}_{\geq 0}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = ||x||_2\,.
\end{aligned}$$

Puis, $||x||_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = ||x||_1^2$ *d'où* $||x||_2 \leq ||x||_1$*. Il s'ensuit*

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1\,,$$

pour tout élément $x \in \mathbb{K}^n$. Mais on a également $|x_i| \leq ||x||_\infty$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ d'où $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n||x||_\infty$. Il vient :

$$\frac{1}{n}||x||_1 \leq ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \,,$$

ce qui achève la preuve.

En dimension infinie, en revanche, on ne dispose pas toujours d'une telle équivalence.

Contre-exemple 37.2.12. *On considère $\mathbb{E} := \mathbb{K}[X]$. Alors $P(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i X^i$ où $\#\{i \in \mathbb{N} \;:\; \alpha_i \neq 0\} < \infty$.*

On pose $||P||_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i|$, $||P||_2 := \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i|^2}$ et $||P||_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i|$. On peut montrer facilement que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $||P||_1 \geq ||P||_2 \geq ||P||_\infty$.

Prenons maintenant $(P_n)_n$ la suite de polynômes définie comme suit $P_n(X) := \sum_{i=0}^n X^i$. Alors $||P_n||_1 = n+1$, $||P_n||_2 = \sqrt{n+1}$ et $||P_n||_\infty = 1$.

Comme les rapports $\frac{||P_n||_1}{||P_n||_2} = \sqrt{n+1}$ et $\frac{||P_n||_2}{||P_n||_\infty} = \sqrt{n+1}$ ne sont pas bornés, on en déduit que la norme $||.||_1$ et la norme $||.||_2$ ne sont pas équivalentes. De même, les normes $||.||_2$ et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes. Enfin, on pourrait aussi prouver facilement que les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ ne sont pas non plus équivalentes.

37.2.3 Suites extraites

Définition 37.2.13. *Soit u une suite d'éléments de l'espace vectoriel normé $\mathbb{E}$. On appelle suite extraite de u toute suite v de la forme $v_n := u_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Exemple 37.2.14. *Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite u.*

Remarque 37.2.15. *On parle aussi de sous-suite.*

Définition 37.2.16. *On appelle valeur d'adhérence de u toute limite d'une suite extraite de u.*

Lemme 37.2.17. *Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit u une suite convergente de limite l. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite quelconque de u. Comme u_n tend vers l, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$, on a $||u_n - l|| < \epsilon$. Comme la fonction φ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n$ d'où pour tout $n \geq n_\epsilon$, $\varphi(n) \geq \varphi(n_\epsilon) \geq n_\epsilon$ et donc $||u_{\varphi(n)} - l|| < \epsilon$ ce qui achève de prouver la convergence de la sous-suite vers l. □

Par conséquent, toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Par contraposée, on en déduit également :

Lemme 37.2.18. *Toute suite admettant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

Proposition 37.2.19. *Pour rappel, toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dont la preuve est plus loin, voir Théorème 38.1.6.*

Remarque 37.2.20. *Une suite réelle peut admettre une valeur d'adhérence sans pour autant être bornée. Par exemple, la suite* u *définie par* $u_n := n^{(-1)^n}$ *est telle que* $u_{2n} = (2n^{(-1)^{2n}}) = (2n)^1 = 2n \longrightarrow +\infty$ *et* $u_{2n+1} = (2n+1)^{(-1)^{2n+1}} = (2n+1)^{-1} = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$ *d'où* 0 *est une valeur d'adhérence de* u *bien que* u *ne soit pas bornée.*

37.3 Topologie d'un espace vectoriel normé

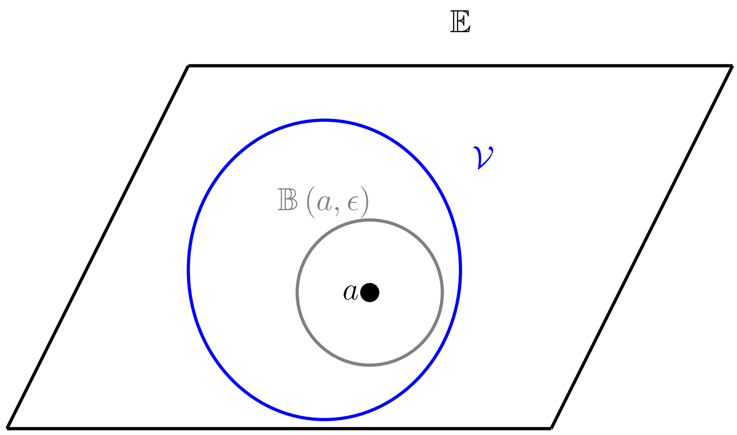
Dès que l'on parle de norme, il convient de parler de topologie.

37.3.1 Voisinages, ouverts et fermés

Définition 37.3.1. *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace vectoriel normé. Soit* $\mathcal{V} \subset \mathbb{E}$ *et* $a \in \mathbb{E}$*. On dit que* $\mathcal{V}$ *est un voisinage de* a *s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $\mathbb{B}(a, \epsilon) \subset \mathcal{V}$*.*

Voici une représentation graphique d'un voisinage :

FIGURE 37.5 – Voisinage d'un point



Définition 37.3.2. *Une partie* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{E}$ *est un ouvert de* $\mathbb{E}$ *si* $\mathcal{O}$ *est un voisinage de tous ses points. En d'autres termes : pour tout* $a \in \mathcal{O}$*, il existe* $\epsilon_a > 0$ *tel que* $\mathbb{B}(a, \epsilon_a) \subset \mathcal{O}$*.*

Proposition 37.3.3. *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace vectoriel normé. Alors :*

- *$\emptyset$ et $\mathbb{E}$ sont des ouverts de $\mathbb{E}$.*
- *Toute intersection* **finie** *d'ouverts de $\mathbb{E}$ est un ouvert de $\mathbb{E}$.*
- *Toute réunion d'ouverts de $\mathbb{E}$ est un ouvert de $\mathbb{E}$.*

Démonstration. Le premier point est immédiat concernant $\mathbb{E}$. Pour ce qui est de l'ensemble vide, il s'agit d'un résultat de logique élémentaire selon lequel faux implique vrai (ici, $a \in \emptyset$ est le faux), voir Remarque 2.3.18.

Prouvons maintenant le deuxième point. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts de $\mathbb{E}$. On pose $\mathcal{O} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Soit $a \in \mathcal{O}$. Alors, pour tout $i \in I$, on a $a \in \mathcal{O}_i$ d'où il existe $\epsilon_i > 0$ tel que $\mathbb{B}\left(a, \epsilon_i\right) \subset \mathcal{I}_i$. On introduit $\epsilon := \inf_{i\in I} \epsilon_i > 0$. Alors pour tout $i \in I$, $\mathbb{B}(a, \epsilon) \subset \mathbb{B}(a, \epsilon_i) \subset \mathcal{O}_i$. D'où $\mathbb{B}(a, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Il s'ensuit que $\mathcal{O}$ est bien un ouvert de $\mathbb{E}$.

Prouvons maintenant le troisième point. On se donne $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{E}$. On pose $\mathcal{O}' := \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Soit $a \in \mathcal{O}'$. Alors, il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in \mathcal{O}_{i_0}$ donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{B}(a, \epsilon_0) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \mathcal{O}'$. Ainsi, $\mathcal{O}'$ est bien un ouvert de $\mathbb{E}$.

□

Remarque 37.3.4. *Nous verrons plus tard, en topologie générale que l'on définit une base d'ouverts de $\mathbb{E}$ par ces trois hypothèses.*

Exemple 37.3.5. *Tout intervalle ouvert $]-\infty; a[$, $]a; b[$ et $]a; +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. De même, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Exemple 37.3.6. *Dans un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$, toute boule ouverte $\mathbb{B}(a, r)$ avec $a \in \mathbb{E}$ et $r > 0$ est un ouvert de $\mathbb{E}$.*

Exercice 37.3.7. *Démontrer le résultat de l'Exemple 37.3.6.*

Définition 37.3.8. *Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{E}$ est appelé fermé de $\mathbb{E}$ si son complémentaire dans $\mathbb{E}$ est un ouvert de $\mathbb{E}$.*

Proposition 37.3.9. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé. Alors :*
- *$\emptyset$ et $\mathbb{E}$ sont des fermés de $\mathbb{E}$.*
- *Toute réunion* **finie** *de fermés de $\mathbb{E}$ est un fermé de $\mathbb{E}$.*
- *Toute intersection de fermés de $\mathbb{E}$ est un fermé de $\mathbb{E}$.*

La preuve est immédiate à partir de la Proposition 37.3.3.

Exemple 37.3.10. *Tout intervalle fermé $]-\infty; a]$, $[a; b]$ et $[a; +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*

Exemple 37.3.11. *De même, on peut montrer que l'ensemble triadique de Cantor (l'ensemble des réels dans $[0; 1]$ ne comportant pas de 1 dans leur développement en base 3) est un fermé de $\mathbb{R}$.*

Exemple 37.3.12. *Dans un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$, toute boule fermée $\overline{\mathbb{B}}(a, r)$ avec $a \in \mathbb{E}$ et $r > 0$ est un fermé de $\mathbb{E}$.*

Démonstration. Soit x dans le complémentaire de $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$. Par définition, $\mathrm{d}(a,x) > r$. On pose $\epsilon := \mathrm{d}(a,x) - r$. Soit $y \in \mathbb{B}(x, \frac{\epsilon}{2})$ quelconque. Alors, $\mathrm{d}(a,y) \geq \mathrm{d}(a,x) - \mathrm{d}(x,y) = r + \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = r + \frac{\epsilon}{2} > r$. Par conséquent, la boule ouverte $\mathbb{B}(x, \frac{\epsilon}{2})$ est incluse dans le complémentaire de $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$ ce qui prouve que le complémentaire de $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$ est ouvert et donc que $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$ est fermé. □

37.3.2 Intérieur et adhérence

Définition 37.3.13. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset \mathbb{E}$. On dit qu'un point $a \in A$ est intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de a c'est-à-dire s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{B}(a,\epsilon) \subset A$.*

Définition 37.3.14. *L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'intérieur de A. C'est le plus grand ouvert de $\mathbb{E}$ inclus dans A, c'est-à-dire la réunion de tous les ouverts inclus dans A.*

Notation 37.3.15. *L'intérieur de A se note $\mathring{A}$.*

On a immédiatement $\mathring{A} \subset A$. Et, $\mathring{A} = A$ si et seulement si A est un ouvert. Et, l'intérieur de l'intersection est l'intersection des intérieurs tandis que la réunion des intérieurs est incluse dans l'intérieur de la réunion.

Définition 37.3.16. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset \mathbb{E}$. On dit qu'un point $a \in \mathbb{E}$ est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de a a une intersection non vide avec A. En d'autres termes : $\forall \epsilon > 0$, $\mathbb{B}(a,\epsilon) \bigcap A \neq \emptyset$.*

Définition 37.3.17. *L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A. C'est le plus petit fermé de $\mathbb{E}$ contenant A, c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés qui contiennent A.*

Notation 37.3.18. *L'adhérence de A se note $\overline{A}$.*

On a immédiatement $A \subset \overline{A}$. Et, $A = \overline{A}$ si et seulement si A est un fermé. Et, l'adhérence de la réunion est la réunion des adhérences tandis que l'intersection des adhérences contient l'adhérence de l'intersection.

Remarque 37.3.19. *Le point a est adhérent à A si et seulement si* $\mathrm{d}(a,A) = 0$.

On sait déjà que l'on a $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. Puis, comme $\mathring{A}$ est un ouvert, son complémentaire est un fermé. Par conséquent, $\partial A := \overline{A} \bigcap \mathring{A}^c$ est aussi un fermé.

Définition 37.3.20. *Le fermé ∂A s'appelle la frontière de A.*

Lemme 37.3.21. *Soit $a \in \mathbb{E}$ et $A \subset \mathbb{E}$. Alors, $a \in \partial A$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{B}(a,\epsilon) \bigcap A \neq \emptyset$ et $\mathbb{B}(a,\epsilon) \bigcap A^c \neq \emptyset$.*

On donne maintenant la caractérisation séquentielle des points adhérents.

Théorème 37.3.22. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé et A une partie de $\mathbb{E}$. Soit $a \in \mathbb{E}$. Alors a est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite u d'éléments de A telle que* $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

Démonstration. Supposons $a \in \overline{A}$. Alors, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A$ tel que $||u_n - a|| < \frac{1}{n}$. Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

Réciproquement, s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$, $||u_n - a|| < \epsilon$. En particulier $u_{n_\epsilon} \in A$ et $||u_{n_\epsilon} - a|| < \epsilon$ ce qui prouve que $\mathbb{B}(a, \epsilon) \bigcap A \ni u_{n_\epsilon}$ d'où l'intersection est non vide, ce qui achève de prouver que $a \in \overline{A}$.

□

Corollaire 37.3.23. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé et A une partie de $\mathbb{E}$. A est fermé si et seulement si toute suite convergente de points de A a sa limite dans A.*

37.3.3 Parties denses

Définition 37.3.24. *Une partie A de l'espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ est dite dense dans $\mathbb{E}$ si $\overline{A} = \mathbb{E}$ c'est-à-dire si pour tout $x \in \mathbb{E}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $||x - a|| < \epsilon$.*

Exemple 37.3.25. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. De même, l'ensemble des décimaux est aussi dense dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 37.3.26. *D'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a;b]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, pour la norme infinie : $||f||_\infty := \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$.*

37.4 Limite et continuité

37.4.1 Définitions

Définition 37.4.1. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. On note $||.||$ la norme pour chacun des espaces. Soit A une partie de $\mathbb{E}$ et $a \in \overline{A}$. Soit une fonction f de A dans $\mathbb{F}$. On dit que f admet pour limite $b \in \mathbb{F}$ en a si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tel que} \ \forall x \in A\,,\ ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - b|| < \epsilon\,.$$

On peut aussi formuler la notion de limite comme suit : pour tout voisinage $\mathcal{W}$ de b dans $\mathbb{F}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathbb{E}$ tel que $f\left(A \bigcap \mathcal{V}\right) \subset \mathcal{W}$.

Remarque 37.4.2. *La limite b de f en a, si elle existe, est unique. On la note $\lim_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_a f$.*

Remarque 37.4.3. *Dans ces conditions, si $a \in A$, on a $b = f(a)$. On dit alors que f est continue en a. Si $a \notin A$, alors f admet une limite en a si et seulement si elle admet un prolongement par continuité en a.*

37.4.2 Extensions de la notion de limite

Définition 37.4.4. *Soit une fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{F}$, un espace vectoriel normé. On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ si pour tout $c \in \mathbb{R}$, $A \cap]c; +\infty[\neq \emptyset$. Alors, on dit que l'on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \geq c$ implique $||f(x) - b|| < \epsilon$.*

On a de même :

Définition 37.4.5. *Soit une fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{F}$, un espace vectoriel normé. On dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ si pour tout $c \in \mathbb{R}$, $A \cap] - \infty; c[\neq \emptyset$. Alors, on dit que l'on a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq c$ implique $||f(x) - b|| < \epsilon$.*

On regarde maintenant le cas d'une fonction d'un espace vectoriel normé dans $\mathbb{R}$.

Définition 37.4.6. *Soit f une fonction de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel normé. Soit $a \in \mathbb{E}$. On dit que l'on a $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si pour tout $c \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x - a|| < \delta$ implique $f(x) > c$. De même, on dit que l'on a $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si pour tout $c \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x - a|| < \delta$ implique $f(x) < c$.*

On termine avec une application allant d'un espace vectoriel normé vers un autre espace vectoriel normé.

Définition 37.4.7. *Soit f une application de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces vectoriels normés. On dit que f est définie au voisinage de l'infini si pour tout $R > 0$, $A \bigcap \mathbb{B}(0, R)^c \neq \emptyset$. Alors, on dit que l'on a $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{F}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in A$ satisfaisant $||x|| > R$, on a $||f(x) - b|| < \epsilon$.*

37.4.3 Propriétés des limites

Théorème 37.4.8. *Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois espaces vectoriels normés. On note $||.||$ la norme pour chacun des trois espaces. Soit f une application de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ et soit g une application de $B \subset \mathbb{F}$ dans $\mathbb{G}$. On suppose $f(A) \subset B$. Alors $g \circ f$ existe. Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = c \in \mathbb{G}$ alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{y \to b} g(y) = c$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B$, $||y - b|| < \delta$ implique $||g(y) - c|| < \epsilon$. Puis, comme $\lim_{x \to a} f(x) = b$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x - a|| < \eta$ implique $||f(x) - b|| < \delta$. Par conséquent, si $x \in A$ et $||x - a|| < \eta$, $f(x) \in B$ et $||f(x) - b|| < \delta$ d'où $||g(f(x)) - c|| < \epsilon$, ce qui achève la preuve.

□

Théorème 37.4.9. *Soit f une application de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces vectoriels normés. Soit a un point adhérent à A. Alors, $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{F}$ si et seulement si pour toute suite u de points de A avec $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ alors $(f(u_n))_n$ converge vers b.*

Démonstration. Supposons $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in A$ et $||x-a|| < \delta$ alors $||f(x)-b|| < \epsilon$. Soit maintenant une suite u de points de A qui converge vers a. Alors, il existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_\delta$, $||u_n - a|| < \delta$. D'où $||f(u_n) - b|| < \epsilon$. En d'autres termes, $f(u_n) \longrightarrow b$.

Réciproquement, supposons que f n'admet pas b comme limite en a. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x_\delta \in A$ avec $||x_\delta - a|| < \delta$ et $||f(x_\delta) - b|| > \epsilon_0$. Prenons $\delta := \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On construit ainsi une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a et telle que $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers b. □

Corollaire 37.4.10. *Soit f de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces vectoriels normés. Alors f est continue en $a \in A$ si et seulement si pour toute suite u de points de A telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Donnons maintenant les propriétés algébriques des limites.

Proposition 37.4.11. *Soient f et g deux applications de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose $\lim_a f = l_1$ et $\lim_a g = l_2$. Soient λ et μ deux scalaires de $\mathbb{K}$. On a alors $\lim_a(\lambda f + \mu g) = \lambda l_1 + \mu l_2$.*

Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$, on a aussi $\lim_a fg = l_1 \times l_2$. Si de plus $l_1 \neq 0$ alors $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{l_1}$.

Exercice 37.4.12. *Démontrer la proposition.*

37.4.4 Continuité globale

Définition 37.4.13. *Soit f une fonction de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des espaces vectoriels normés. On dit que f est continue sur A si f est continue en chaque point de A.*

Exemple 37.4.14. *Si f est k-Lipschitzienne sur A avec $k > 0$, alors f est continue sur A.*

Démonstration. En effet, pour tout $a \in A$, pour tout $\epsilon > 0$, en prenant $\delta := \frac{\epsilon}{k}$, pour tout $x \in A$ tel que $||x-a|| < \delta$, on a $||f(x) - f(a)|| \leq k||x-a|| < \epsilon$. □

Regardons les premières propriétés de la continuité globale.

Proposition 37.4.15. *Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois espaces vectoriels normés avec $A \subset \mathbb{E}$ et $B \subset \mathbb{F}$. Soit f une fonction de A dans $\mathbb{F}$ telle que $f(A) \subset B$ et soit g une fonction de B dans $\mathbb{G}$. Si f est continue sur A et si g est continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.*

Exercice 37.4.16. *Démontrer la proposition.*

On dispose également de la propriété élémentaire suivante :

Lemme 37.4.17. *Si f est une fonction continue de $A \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ et si $B \subset A$ alors la restriction de f à B est aussi continue sur B.*

Étudions maintenant les propriétés algébriques liées à l'ensemble des fonctions continues.

Proposition 37.4.18. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset \mathbb{E}$. On se donne deux fonctions continues f et g de A dans $\mathbb{F}$. Soient λ et μ deux scalaires. Alors $\lambda f + \mu g$ est aussi une fonction continue de A dans $\mathbb{F}$.*

Exercice 37.4.19. *Démontrer la proposition.*

Corollaire 37.4.20. *Il s'ensuit que l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel.*

Remarque 37.4.21. *On peut aller encore plus loin si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. En effet, dans ce cas, si f comme g sont continues sur A alors $f \times g$ l'est aussi. Et même, l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{C}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des applications de A dans $\mathbb{C}$, l'unité étant $\mathbb{1}_A$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ pour tout $x \in A$.*

On va maintenant étudier les liens entre la densité et la continuité.

Théorème 37.4.22. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset \mathbb{E}$. Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{F}$. On les suppose continues. On suppose qu'il existe $B \subset A$ dense dans A tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in B$. Alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$.*

Démonstration. Comme $A \subset \overline{B}$, tout point x de A est adhérent à B. Ainsi, il existe une suite r d'éléments de B telle que $\lim_n r_n = x$. La fonction f étant continue sur A : $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$. La fonction g est également continue sur A donc $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(r_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(x)$. □

Exemple 37.4.23. *Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Alors f est une application linéaire.*

Démonstration. Posons $a := f(1)$. Par récurrence, on peut établir

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = nf(1) = an\,, \tag{37.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$. Également, si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$ d'où $f(-n) = -f(n) = -an$. Conséquemment, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = an$.

De la même manière, on peut prouver $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$, on a :

$$f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)\,,$$

d'où $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{q} = \frac{p}{q}a$. Dit autrement, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$. Or, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il vient $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; c'est-à-dire que f est une application linéaire. □

Théorème 37.4.24. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset \mathbb{E}$. On suppose que f est une application continue de A dans $\mathbb{F}$. Alors :*

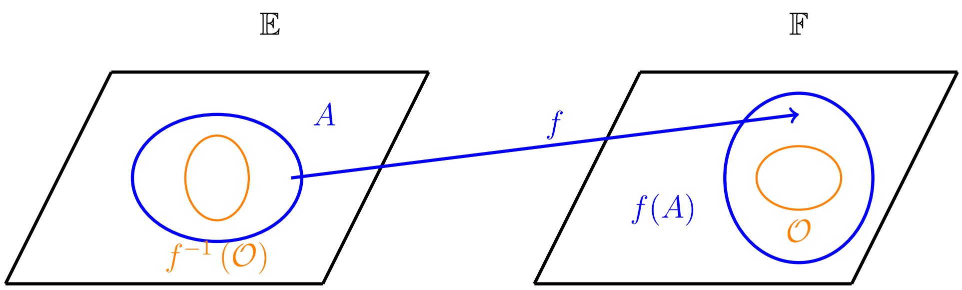
- *Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{F}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert relatif de A, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $\mathcal{G}$ de $\mathbb{E}$ tel que $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{G} \bigcap A$.*
- *Pour tout fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{F}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé relatif de A, c'est-à-dire qu'il existe un fermé $\mathcal{F}'$ de $\mathbb{E}$ tel que $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}' \bigcap A$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{F}$. Alors, pour tout $y \in \mathcal{O}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{B}(y, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Si $f^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset$, c'est bien un ouvert relatif de A. Dans le cas contraire, soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Alors $f(x) \in \mathcal{O}$ et donc comme f est continue sur A, il l'est en x d'où il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{B}(f(x), \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Comme f est continue en x, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{B}(x, \delta) \bigcap A$, on a $||f(y) - f(x)|| < \epsilon$ d'où $f(y) \in \mathcal{O}$. Il s'ensuit $y \in f^{-1}(\mathcal{O})$, ce qui achève de prouver que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert relatif de A.

La deuxième partie du théorème se prouve en prenant la complémentation. □

On peut illustrer le Théorème 37.4.24 avec l'image réciproque d'un ouvert comme suit :

FIGURE 37.6 – Application continue et ouvert



Exemple 37.4.25. *Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois ensembles*

$$\mathcal{G} := \{(x, f(x)) \ : \ x \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{G}_- := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < f(x)\right\}$$

ainsi que

$$\mathcal{G}_+ := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > f(x)\right\} .$$

Alors, en utilisant la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x,y) := y - f(x)$ et en remarquant que cette fonction est continue, il vient $\mathcal{G} := g^{-1}(\{0\})$ d'où $\mathcal{G}$ est un fermé. Au contraire, $\mathcal{G}_+$ et $\mathcal{G}_-$ sont des ouverts.

Exemple 37.4.26. *On considère* $\mathbb{E} := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrés de taille* n *et* $\mathbb{U} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices inversibles. On considère l'application* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(M) := \mathrm{Dét}(M)$. f *est continue en tant que fonction polynomiale des coefficients des matrices. Or,* $\mathbb{U} = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$. *Mais* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*_- \bigcup \mathbb{R}^*_+$ *donc c'est un ouvert en tant que réunion d'ouverts. Il s'ensuit que* $\mathbb{U}$ *est aussi un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.*

37.5 Applications linéaires continues

Naturellement, on va s'intéresser au caractère continu ou non des applications linéaires (qui préservent la structure d'espace vectoriel).

37.5.1 Définition et caractérisation

Théorème 37.5.1. *Soient* $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ *et* $(\mathbb{F}, \mathcal{N}')$ *deux espaces vectoriels normés. Soit* u *une application linéaire allant de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Alors,* u *est continue si et seulement s'il existe* $k \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{E}$, $\mathcal{N}'(u(x)) \leq k\mathcal{N}(x)$.

On en déduit immédiatement que u est k-Lipschitzienne. Ainsi, les seules applications linéaires et continues sont Lipschitzienne.

Démonstration. Supposons d'une part l'existence de k tel que pour tout $x \in \mathbb{E}$, on ait $\mathcal{N}'(u(x)) \leq k\mathcal{N}(x)$. Il s'ensuit que pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, $\mathcal{N}'(u(x-y)) \leq k\mathcal{N}(x-y)$. Puis, comme u est linéaire : $\mathcal{N}'(u(x) - u(y)) \leq k\mathcal{N}(x-y)$ ce qui prouve que u est k-Lipschitzienne sur $\mathbb{E}$ donc elle y est continue.

D'autre part, soit une application linéaire u continue sur $\mathbb{E}$. En particulier, elle est continue en 0. Or, $u(0) = 0$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{E}$ tel que $\mathcal{N}(x) \leq \delta_\epsilon$, on ait $\mathcal{N}'(u(x)) \leq \epsilon$. Prenons en particulier $\epsilon := 1$ et donc $\delta := \delta_1$. Soit $x \in \mathbb{E}$ avec $x \neq 0$. On considère $x' := \frac{\delta}{\mathcal{N}(x)}x$. Il s'ensuit $\mathcal{N}(x') = \delta$ d'où $\mathcal{N}'(u(x)) \leq 1$. Or, $\mathcal{N}'(u(x)) = \mathcal{N}'\left(u\left(\frac{\delta}{\mathcal{N}(x)}x\right)\right) = \mathcal{N}'\left(\frac{\delta}{\mathcal{N}(x)}u(x)\right) = \frac{\delta}{\mathcal{N}(x)}\mathcal{N}'(u(x)) \leq 1$. Par conséquent : $\mathcal{N}'(u(x)) \leq \frac{1}{\delta}\mathcal{N}(x)$. Ainsi, on a bien $\mathcal{N}'(u(x)) \leq k\mathcal{N}(x)$ avec $k := \frac{1}{\delta} > 0$. □

On peut ainsi procéder à la caractérisation des normes équivalentes.

Théorème 37.5.2. *Soit un espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *muni de deux normes* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}'$. *Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Les normes* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{N}'$ *sont équivalentes.*

ii) *L'application* $\mathrm{Id}_\mathbb{E}$ *est bicontinue (continue de* $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ *dans* $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ *et continue de* $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ *dans* $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$*) où* $\mathrm{Id}_\mathbb{E}(x) := x$ *pour tout* $x \in \mathbb{E}$.

iii) *Les ouverts de* $\mathbb{E}$ *pour la norme* $\mathcal{N}$ *sont les mêmes que ceux de* $\mathbb{E}$ *pour la norme* $\mathcal{N}'$.

Démonstration. Montrons d'abord que i) et ii) sont équivalentes. Le fait que les normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ soient équivalentes correspond à l'existence de constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{E}$, on ait $\alpha\mathcal{N}(x) \leq \mathcal{N}'(x) \leq \beta\mathcal{N}(x)$. Ceci équivaut à

$$\mathcal{N}'\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}(x)\right) = \mathcal{N}'(x) \leq k_1\mathcal{N}(x) \quad \text{avec } k_1 := \beta\,,$$

d'où $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ et à

$$\mathcal{N}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}(x)\right) = \mathcal{N}(x) \leq k_2\mathcal{N}'(x) \quad \text{avec } k_2 := \frac{1}{\alpha}\,,$$

d'où $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$. Ainsi, i) est bien équivalent à ii).

Supposons maintenant ii). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$. Comme $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$, il vient que $\mathcal{O} = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$. Et de même, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$, comme $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$, il vient que $\mathcal{O} = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$. Ainsi, ii) implique iii).

Il reste désormais à montrer que iii) implique ii). Supposons pour ce faire que les ouverts de $\mathbb{E}$ pour la norme $\mathcal{N}$ sont les mêmes que ceux de $\mathbb{E}$ pour la norme $\mathcal{N}'$. Montrons que $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ et continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$. Soit $x \in \mathbb{E}$. Alors $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}(x) = x$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de x dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$. Alors $\mathcal{W}$ contient un ouvert $\mathcal{O}$ de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ contenant $x : x \in \mathcal{O} \subset \mathcal{W}$. $\mathcal{O}$ est aussi un ouvert de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ donc un voisinage de x tel que $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \subset \mathcal{W}$. Par conséquent, $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue en tout point $x \in \mathbb{E}$ donc l'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$. De même, elle est continue de $(\mathbb{E}, \mathcal{N}')$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$, ce qui achève la preuve.

□

37.5.2 Norme d'une application linéaire continue

Théorème 37.5.3. *Soient $(\mathbb{E}, \mathcal{N})$ et $(\mathbb{F}, \mathcal{N}')$ deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. On le note $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

L'application $u \mapsto |||u||| := \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{E} \\ x \neq 0}} \dfrac{\mathcal{N}'(u(x))}{\mathcal{N}(x)} = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{E} \\ \mathcal{N}(x) \leq 1}} \mathcal{N}'(u(x))$ est une norme de l'espace $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

La démonstration du Théorème 37.5.3 sera donnée après une remarque et un exemple.

Remarque 37.5.4. *$|||u|||$ est la plus petite constante k telle que $\mathcal{N}'(u(x)) \leq k\mathcal{N}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.*

Exemple 37.5.5. *Soit $\mathbb{E} := \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$. On pose $\mathcal{N}_1(f) := \sup_{[0;1]} |f|$. Soit $\mathcal{N}_2(f) := \sup_{[0;1]} |f'|$. Et, soit $\mathcal{N}_3(f) := \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_2(f)$.*

- *D'abord, $\mathcal{N}_2$ n'est pas une norme sur $\mathbb{E}$. On considère l'application f définie par $f(x) := 1$. Alors $f \in \mathbb{E}$ et $\mathcal{N}_2(f) = 0$. Pourtant $f \neq 0$.*

- *Au contraire, $\mathcal{N}_1$ est une norme sur $\mathbb{E}$. Puis, si $\mathcal{N}_3(f) = 0$ alors $\mathcal{N}_1(f) = 0$ d'où $f = 0$. De plus, les autres axiomes sont faciles à vérifier.*
- *On remarque $\mathcal{N}_1(f) \leq \mathcal{N}_3(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. On se demande si les deux normes sont équivalentes. Pour montrer qu'elles ne le sont pas, on considère la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(t) := t^n$. Alors $\mathcal{N}_1(f_n) = 1$ tandis que $\mathcal{N}_3(f_n) = n+1$ d'où $\frac{\mathcal{N}_3(f_n)}{\mathcal{N}_1(f_n)} \longrightarrow +\infty$ si bien que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_3$ ne sont pas équivalentes.*

On se donne maintenant une forme linéaire u de $\mathbb{E}$ (dans $\mathbb{R}$) définie par $u(f) := f'(0)$. Étudions sa continuité par rapport à $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_3$. D'abord, on a immédiatement $|u(f)| = |f'(0)| \leq \mathcal{N}_2(f) \leq \mathcal{N}_3(f)$ donc u est continue pour $\mathcal{N}_3$. Considérons maintenant la suite de fonctions de $\mathbb{E}$ définie par $g_n(x) := -(1-x)^n$. Alors, $u(g_n) = g_n'(0) = n$. Mais, $\mathcal{N}_1(g_n) = 1$ d'où $\frac{|u(g_n)|}{\mathcal{N}_1(g_n)} = n \longrightarrow +\infty$ si bien que u n'est pas continue pour $\mathcal{N}_1$.

On va maintenant calculer $|||u|||$ pour la norme $\mathcal{N}_3$. On sait déjà que $|||u||| \leq 1$ vu que $|u(f)| \leq \mathcal{N}_3(f)$. Considérons à nouveau la suite $(g_n)_n$ avec $g_n(x) := -(1-x)^n$. On a $\mathcal{N}_1(g_n) = 1$ et $\mathcal{N}_2(g_n) = n$. D'où $\frac{|u(g_n)|}{\mathcal{N}_3(g_n)} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$. Il s'ensuit $|||u||| = 1$.

Preuve du Théorème 37.5.3. D'abord, l'application nulle u de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ qui, à $x \in \mathbb{E}$, associe $0_{\mathbb{F}}$ est bien linéaire continue puisque $\mathcal{N}'(u(x)) = 0 \leq k\mathcal{N}(x)$ avec $k = 0$. Il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \neq \emptyset$.

Soient maintenant u et v deux éléments de $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Soient λ et μ deux scalaires de $\mathbb{K}$. Comme u et v sont continues, il existe deux constantes k_1 et k_2 positives telles que pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $\mathcal{N}'(u(x)) \leq k_1\mathcal{N}(x)$ et $\mathcal{N}'(v(x)) \leq k_2\mathcal{N}(x)$.

Ainsi, pour tout élément x de $\mathbb{E}$, on a, en posant $w := \lambda u + \mu v$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}'(w(x)) &= \mathcal{N}'(\lambda u(x) + \mu v(x)) \leq \mathcal{N}'(\lambda u(x)) + \mathcal{N}'(\mu v(x)) \\
&\leq |\lambda|\mathcal{N}'(u(x)) + |\mu|\mathcal{N}'(v(x)) \leq |\lambda|k_1\mathcal{N}(x) + |\mu|k_2\mathcal{N}(x) \\
&\leq k\mathcal{N}(x)\,,
\end{aligned}$$

avec $k := |\lambda|k_1 + |\mu|k_2 \geq 0$. Donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Ainsi, $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Maintenant, pour tout $u \in \mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on a clairement $|||u||| \geq 0$. Et, si la norme est nulle c'est-à-dire si $|||u||| = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $\mathcal{N}'(u(x)) = 0$ d'où $u(x) = 0$ si bien que u est l'application nulle. Également, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $|||\lambda u||| = \sup\limits_{\mathcal{N}(x) \leq 1} \mathcal{N}'(\lambda u(x)) = |\lambda| \sup\limits_{\mathcal{N}(x) \leq 1} \mathcal{N}'(u(x)) = |\lambda|.|||u|||$. Prouvons maintenant l'inégalité triangulaire. Soit $x \in \mathbb{E}$ tel que $\mathcal{N}(x) \leq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}'((u+v)(x)) &= \mathcal{N}'(u(x) + v(x)) \\
&\leq \mathcal{N}'(u(x)) + \mathcal{N}'(v(x)) \\
&\leq |||u||| + |||v|||\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien $|||u+v||| \leq |||u|||+|||v|||$, ce qui achève de prouver que l'application $u \mapsto |||u|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

□

Intéressons-nous maintenant à la norme de la composée.

Proposition 37.5.6. *Soient trois espaces vectoriels normés $(\mathbb{E},\mathcal{N}_1)$, $(\mathbb{F},\mathcal{N}_2)$ et $(\mathbb{G},\mathcal{N}_3)$. Soit $u \in \mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $v \in \mathcal{L}_c(\mathbb{F},\mathbb{G})$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{G})$. De plus $|||v \circ u||| \leq |||u||| \times |||v|||$.*

Démonstration. En effet, pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\mathcal{N}_3((v \circ u)(x)) = \mathcal{N}_3\left(v(u(x))\right) \leq |||v|||\mathcal{N}_2(u(x)) \leq |||v||| \times |||u||| \times \mathcal{N}_1(x)$, ce qui achève de prouver la continuité de la fonction $v \circ u$ et l'on a immédiatement $|||v \circ u||| \leq |||u||| \times |||v|||$. □

37.6 Espaces de Banach

Définition 37.6.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé. Une suite de points $u = (u_n)_n$ est dite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $p_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq p_\epsilon$, on a $||u_p - u_q|| < \epsilon$.*

Remarque 37.6.2. *Toute suite de Cauchy est bornée. Prenons en effet $\epsilon = 1$. Alors, pour tous $p, q \geq p_1$, on a $||u_p - u_q|| < 1$. En particulier, $||u_p - u_{p_1}|| < 1$ d'où $||u_p|| < ||u_{p_1}||+1$. Puis, en posant $M := \max\{||u_i|| \ : \ i \in [\![0;p_1]\!]\}$, on a alors $||u_p|| \leq \max\{M; ||u_{p_1}||+1\}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, ce qui achève la preuve.*

Proposition 37.6.3. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit une suite u convergente de limite l. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe p_ϵ tel que pour tout $p \geq p_\epsilon$, on a $||u_p|| < \frac{\epsilon}{2}$ d'où pour tous $p, q \geq p_\epsilon$, on a $||u_p - u_q|| = ||(u_p - l) - (u_q - l)|| \leq ||u_p - l|| + ||u_q - l|| < \epsilon$. Ainsi, u est de Cauchy. □

Définition 37.6.4. *On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy y est convergente.*

Remarque 37.6.5. *On parle aussi d'espace de Banach.*

Définition 37.6.6. *Une partie $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel normé quelconque $\mathbb{E}$ est dite complète si toute suite de Cauchy de points de $\mathcal{A}$ est convergente.*

Remarque 37.6.7. *Toute partie de $\mathbb{E}$ qui est complète est fermée.*

Proposition 37.6.8. *Dans un espace de Banach, les parties complètes sont exactement les parties fermées.*

Exemple 37.6.9. *$\mathbb{R}$ est un espace de Banach.*

Contre-exemple 37.6.10. $\mathbb{Q}$ *n'est pas un espace de Banach. En effet, considérons la suite* $r = (r_n)_n$ *des valeurs approchées décimales par défaut de* $\sqrt{2}$*. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $r_n \in \mathbb{Q}$*. De plus, pour tous* $p, q \geq p_0$*, on a* $||u_p - u_q|| \leq 2 \times 10^{-p_0} < \epsilon$ *si* $p_0 > -\frac{\log\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}{\log(10)}$*. Pourtant, la suite* r *ne converge pas dans* $\mathbb{Q}$*.*

Exemple 37.6.11. *Soit* $\mathbb{E} := \mathcal{B}([0;1], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions bornées de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$*. Soit* $\mathcal{C}$ *le sous-espace vectoriel fermé des applications continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $\mathbb{F}$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}$ *et* $\mathcal{C}$ *formé des applications polynomiales de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$*. On munit* $\mathbb{E}$ *de la norme uniforme :* $||f||_\infty := \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$*. Les espaces* $\mathbb{E}$ *et* $\mathcal{C}$ *sont complets.* $\mathbb{F}$ *ne l'est pas.*

Chapitre 38

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les espaces vectoriels normés. Ici, nous verrons quelques particularités inhérentes à la dimension finie.

38.1 Compacité

La première notion à laquelle nous allons nous intéresser est la compacité.

38.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 38.1.1. *Soit $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ où $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel normé (de dimension finie ou non). On dit que $\mathcal{K}$ est une partie compacte de $\mathbb{E}$ si, de toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{K}$, on peut en extraire une sous-suite convergente vers un élément $x \in \mathcal{K}$.*

Remarque 38.1.2. *On devrait normalement parler de partie séquentiellement compacte. En effet, la vraie définition d'un compact est un peu plus subtile : de tout recouvrement de $\mathbb{E}$ par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Proposition 38.1.3. *Toute partie compacte $\mathcal{K}$ de $\mathbb{E}$ est fermée et bornée.*

Démonstration. Soit $\mathcal{K}$ une partie compacte de $\mathbb{E}$. Montrons d'abord que $\mathcal{K}$ est bornée. On va supposer par l'absurde qu'elle ne l'est pas. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathcal{K}$ tel que $||u_{n+1}|| \geq ||u_n|| + 1$. En particulier, $||u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}|| \geq 1$ d'où la suite v définie par $v_n := u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$ ne tend pas vers 0 ; ceci pour toute fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Par conséquent, aucune des sous-suites ne converge. Et donc $\mathcal{K}$ ne peut être un compact.

Prouvons maintenant que $\mathcal{K}$ est fermé. Soit u une suite de points de $\mathcal{K}$ qui converge vers $l \in \mathbb{E}$. De u, on extrait une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $l' \in \mathcal{K}$. Mais, $l' = \lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} u_n = l$ donc $l \in \mathcal{K}$. Ainsi, $\mathcal{K}$ est fermé. $\square$

Proposition 38.1.4. *Toute partie fermée d'un compact est un compact.*

Démonstration. Soit $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ un compact. Soit $\mathcal{F}$ un fermé inclus dans $\mathcal{K}$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors, $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{K}$. Conséquemment, on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $l \in \mathcal{K}$. Puis, comme $(u_{\varphi(n)})_n$ est une suite d'éléments du fermé $\mathcal{F}$, il s'ensuit que sa limite est dans $\mathcal{F}$. Ainsi, on a extrait une sous-suite convergente vers un élément de $\mathcal{F}$ ce qui achève de prouver que $\mathcal{F}$ est bien un compact. □

Théorème 38.1.5. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. Soient $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ et $\mathcal{K}' \subset \mathbb{F}$ deux compacts. Alors, $\mathcal{K} \times \mathcal{K}' := \{(x, y) \ : \ x \in \mathcal{K} \text{ et } y \in \mathcal{K}'\}$ est une partie compacte de l'espace vectoriel $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.*

Démonstration. Soit $u = (u_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (v_n, w_n)$ où $v_n \in \mathcal{K}$ et $w_n \in \mathcal{K}'$. Comme $\mathcal{K}$ est un compact, on peut extraire de v une sous-suite convergente $(v_{\varphi_1(n)})_n$ vers $l \in \mathcal{K}$. Puis, la suite extraite $(w_{\varphi_1(n)})_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{K}'$ donc on peut en extraire une suite $(w_{\varphi_1(\varphi_2(n))})_n$ qui converge vers $l' \in \mathcal{K}'$. Or, la suite $(v_{\varphi_1(\varphi_2(n))})_n$ étant extraite de la suite convergente $(v_{\varphi_1(n)})_n$, elle converge vers $l \in \mathcal{K}$. Ainsi, la suite extraite $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))})_n$ converge vers $(l, l') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}'$, ce qui achève de prouver que $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$ est compact. □

38.1.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est un *gros morceau* de topologie : il permet de caractériser tous les compacts, en dimension finie.

Théorème 38.1.6. *De toute suite bornée de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{C}^p$ avec $p \geq 2$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. **Étape 1.** D'abord, on va prouver que de toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Soient a_0 et b_0 tels que $a_0 \leq u_n \leq b_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'un au moins des deux intervalles $\left[a_0; \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ et $\left[\frac{a_0+b_0}{2}; b_0\right]$ contient une infinité de valeurs de u_n. Ce nouvel intervalle est noté $[a_1; b_1]$ et sa longueur est $\frac{b_0-a_0}{2}$. On appelle $\varphi(1) := \inf \mathcal{I}_1$ où $\mathcal{I}_1 := \{n \in \mathbb{N} \ : \ u_n \in [a_1; b_1]\}$. On recommence le raisonnement avec l'intervalle $[a_1; b_1]$. En effet, pour tout $n \in \mathcal{I}_1$, $a_1 \leq u_n \leq b_1$ et $\#\mathcal{I}_1 = +\infty$. On obtient alors un intervalle $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1]$ de longueur $\frac{b_0-a_0}{2^2}$ et qui contient une infinité de valeurs de u_n. On appelle alors $\mathcal{I}_2 := \{n \in \mathbb{N} \ : \ u_n \in [a_2; b_2]\}$ et $\varphi(2) := \inf \mathcal{I}_2$. On définit par ce procédé une suite de segments emboîtés $[a_n; b_n]$ dont la longueur est égale à $\frac{b_0-a_0}{2^n} \longrightarrow 0$ et une sous-suite v de u avec $v_n = u_{\varphi(n)} \in [a_n; b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et sont donc convergentes de même limite $l \in \mathbb{R}$ d'après le Théorème 25.3.49. Puis, par le théorème des gendarmes (Théorème 25.3.42), la suite v converge vers l.

Étape 2. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}^p$ à $\mathbb{R}^{2p}$.

Étape 3. Soit $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 2$. Soit une suite bornée de $\mathbb{R}^q$: $u = (u_n)_n$.

On note $u_n^{(1)}, \cdots, u_n^{(q)}$ les q coordonnées de u_n dans la base canonique. Chacune des suites $(u_n^{(i)})_n$ est réelle et bornée. En particulier, la suite $(u_n^{(1)})_n$ est réelle et bornée et donc d'après la première étape, on peut en extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi_1(n)}^{(1)})$. On note $l_1 \in \mathbb{R}$ sa limite. Puis, la suite $(u_{\varphi_1(n)}^{(2)})$ est bornée. On peut en extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(2)})$ de limite $l_2 \in \mathbb{R}$. On remarque par ailleurs que $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(1)})$ est une suite extraite d'une suite convergente donc elle converge de même limite l_1. Ainsi, la suite $\left(u_{\theta_2(n)}^{(1)}, u_{\theta_2(n)}^{(2)}\right)$ converge vers $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ où $\theta_2 := \varphi_1 \circ \varphi_2$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Étape 4. Supposons que l'on ait construit au rang $k \in [\![1; q-1]\!]$ une application strictement croissante θ_k telle que chacune des suites $(u_{\theta_k(n)}^{(i)})_n$ converge vers $l_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1; k]\!]$. Alors, la suite $(u_{\theta_k(n)}^{(k+1)})_n$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(u_{\theta_k(\varphi_{k+1}(n))}^{(k+1)})_n$ qui converge vers $l_{k+1} \in \mathbb{R}$. Et, chacune des suites extraites $(u_{\theta_k(\varphi_{k+1}(n))}^{(i)})_n$ converge vers $l_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1; k]\!]$. Ainsi, on a construit une fonction strictement croissante $\theta_{k+1} := \theta_k \circ \varphi_{k+1}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $i \in [\![1; k+1]\!]$, chacune des suites $(u_{\theta_{k+1}(n)}^{(i)})_n$ converge vers $l_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1; k+1]\!]$.

Étape 5. Par récurrence finie, la propriété est vraie à tout rang $k \in [\![1; q]\!]$. Au rang q, on note $\varphi := \theta_q$. Alors, $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $(l_1, \cdots, l_q) \in \mathbb{R}^q$, ce qui montre qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers un élément de $\mathbb{R}^q$. □

Corollaire 38.1.7. *Les parties compactes de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{C}^p$ avec $p \geq 2$ sont exactement les parties fermées et bornées.*

Démonstration. Soit $\mathcal{K}$ une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{R}^p$ ou de $\mathbb{C}^p$ avec $p \geq 2$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente $v_n := (u_{\varphi(n)})_n$ de limite l. Or, $\mathcal{K}$ est une partie fermée donc la limite l est un élément de $\mathcal{K}$. Il s'ensuit que la suite u admet une sous-suite convergente vers $l \in \mathcal{K}$ et donc $\mathcal{K}$ est bien un compact. □

38.1.3 Compacité et continuité

Théorème 38.1.8. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{E}$. Soit f une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{F}$. On la suppose continue. Alors $f(\mathcal{K})$ est un compact de $\mathbb{F}$. On en déduit que f est bornée sur $\mathcal{K}$ et atteint la borne supérieure de sa norme sur $\mathcal{K}$.*

Démonstration. Soit $(v_n)_n$ une suite de points de $f(\mathcal{K})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathcal{K}$ tel que $v_n = f(u_n)$. Comme $\mathcal{K}$ est compact, on peut en extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_n$ de limite $l \in \mathcal{K}$. Comme f est continue, $f(l) = \lim_{n\to\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} v_{\varphi(n)}$. Par conséquent, la suite extraite $(v_{\varphi(n)})_n$ converge vers $f(l) \in f(\mathcal{K})$. Ainsi, $f(\mathcal{K})$ est bien un compact de $\mathbb{F}$.

Soit maintenant $\mathcal{A} := \{||f(x)|| \ : \ x \in \mathcal{K}\} \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ est l'image par le compact $\mathcal{K}$ de l'application continue à valeurs réelles g définie par $g(x) := ||f(x)||$. Ainsi,

$\mathcal{A}$ est un compact de $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ étant bornée, elle est majorée. Et, $\mathcal{A}$ étant fermée, son supremum lui appartient : $\sup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$. Par conséquent, il existe $x_0 \in \mathcal{K}$ tel que $||f(x_0)|| = \sup_{x\in\mathcal{K}} ||f(x)||$. □

Corollaire 38.1.9. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé et $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ un compact. Alors, toute application numérique continue f de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathcal{K}$ et atteint son maximum ainsi que son minimum sur $\mathcal{K}$.*

38.2 Topologie

38.2.1 Équivalence des normes

Les résultats obtenus précédemment sur la compacité permettent de nous assurer que les normes sont équivalentes en dimension finie.

Théorème 38.2.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. On suppose $\dim \mathbb{E} = p \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\mathbb{E}$ est équipotent à $\mathbb{K}^p$. On est ainsi amené à montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme infinie sur $\mathbb{K}^p$ où $||x||_\infty := \max_{i\in[\![1;p]\!]} |x_i|$ avec $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$. On note $(e_1, \cdots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, on a $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$. Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{K}^p$. L'inégalité triangulaire implique

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^p x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \mathcal{N}(x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^p |x_i| \mathcal{N}(e_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathcal{N}(e_i)}_{=:\alpha>0} ||x||_\infty .$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $\mathcal{N}(x) \leq \alpha ||x||_\infty$. L'application de $(\mathbb{K}^p, ||.||)$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\mathcal{N}(x)$ est continue car α-Lipschitz. En effet, $|\mathcal{N}(y) - \mathcal{N}(x)| \leq \mathcal{N}(y - x) \leq \alpha ||y - x||_\infty$. La partie $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{K}^p \ : \ ||x||_\infty = 1\}$ est un compact de $(\mathbb{K}^p, ||.||)$ en tant que partie fermée et bornée. $\mathcal{N}$ est continue sur $\mathcal{S}$ y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_0 \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{N}(x_0) = \inf_{x\in\mathcal{S}} \mathcal{N}(x)$. On pose $\beta := \mathcal{N}(x_0) > 0$ car $0 \notin \mathcal{S}$ et $x_0 \in \mathcal{S}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, pour $x \neq 0$, on a $x = ||x||_\infty x'$ où $x' \in \mathcal{S}$. Or, $\mathcal{N}(x') \geq \beta$ donc $\mathcal{N}(x) \geq \beta ||x||_\infty$. Il s'ensuit

$$\beta ||x||_\infty \leq \mathcal{N}(x) \leq \alpha ||x||_\infty .$$

Par conséquent, $\mathcal{N}$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes. □

On en déduit immédiatement qu'en dimension finie, toutes les notions topologiques sont indépendantes de la norme choisie.

Remarque 38.2.2. *Bien sûr, on peut créer des topologies qui ne dérivent pas d'une norme et alors les notions topologiques seront bien différentes.*

38.2.2 Continuité des applications linéaires

Théorème 38.2.3. *Soient deux espaces vectoriels normés $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. On suppose $\mathbb{E}$ de dimension finie. Alors toute application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est continue.*

Démonstration. On suppose $\mathbb{F}$ muni d'une norme $\mathcal{N}$. On considère la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ où $n = \dim \mathbb{E}$. Comme $\mathbb{E}$ est de dimension finie, on choisit d'utiliser la norme infinie $||.||_\infty$. Ainsi, si $x \in \mathbb{K}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. On a $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$. D'où

$$\mathcal{N}(u(x)) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \mathcal{N}(u(e_i)) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathcal{N}(u(e_i))}_{=:k} ||x||_\infty .$$

Par conséquent, u est continue sur $\mathbb{E}$ car pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\mathcal{N}(u(x)) \leq k||x||_\infty$. □

Corollaire 38.2.4. *Soient $\mathbb{E}_1, \cdots, \mathbb{E}_p$, p espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $\mathbb{F}$ un espace vectoriel normé. Alors toute application multilinéaire B de l'espace $\mathbb{E} := \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_p$ dans $\mathbb{F}$ est continue.*

38.2.3 Compacité et complétude

Théorème 38.2.5. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.*

La preuve est immédiate en utilisant l'équipotence avec $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$.

Théorème 38.2.6. *Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$) est complet : c'est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit u une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{E}$ avec $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{E} = n < \infty$. Comme la suite u est de Cauchy, elle est bornée. Puis, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente. Soit $l \in \mathbb{E}$ la limite de $(u_{\varphi(n)})_n$ où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ implique $||u_{\varphi(n)} - l|| < \frac{\epsilon}{2}$. Or, la suite u est de Cauchy donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_\epsilon$, $||u_p - u_q|| < \frac{\epsilon}{2}$. Par conséquent, en prenant $n \geq \max\{n_\epsilon, n_1\}$, il vient $||u_n - l|| < ||u_n - u_{\varphi(n)}|| + ||u_{\varphi(n)} - l|| < \epsilon$. Il s'ensuit que u converge vers l. □

Remarque 38.2.7. *Un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ n'a aucune raison d'être complet.*

Corollaire 38.2.8. *Soit $(u_n)_n$ une suite de points de $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que u converge vers $l \in \mathbb{E}$. Alors, on en déduit que l'ensemble $\mathcal{K} := \{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{l\}$ est un compact de $\mathbb{E}$.*

Démonstration. La suite u est convergente donc bornée. Il s'ensuit que $\mathcal{K}$ est borné. Montrons maintenant que $\mathcal{K}^c$ est un ouvert. Soit $x \notin \mathcal{K}$. Alors, $x \neq l$ d'où $\epsilon := \frac{||x-l||}{2} > 0$. Comme u converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \neq n_0$ on a $||u_n - l|| < \frac{\epsilon}{2}$. D'où pour tout $n \geq n_0$, $||u_n - x|| \geq ||x - l|| - ||u_n - l|| > \epsilon$.

Soit maintenant $\epsilon' := \min\{||x - u_k|| \ : \ k \in [\![0; n_0 - 1]\!]\} > 0$ vu que $x \notin \mathcal{K}$. Alors, pour tout $k \in [\![0; n_0 - 1]\!]$, on a $||u_k - x|| \geq \epsilon'$.

On considère $\epsilon_0 := \frac{1}{2}\inf\{\epsilon, \epsilon'\}$. Il vient immmédiatement $\mathcal{K} \bigcap \mathbb{B}(x, \epsilon_0) = \emptyset$ c'est-à-dire $\mathbb{B}(x, \epsilon_0) \subset \mathcal{K}^c$. On en déduit que $\mathcal{K}^c$ est ouvert donc $\mathcal{K}$ est un fermé et ainsi $\mathcal{K}$ est un compact. □

38.3 Séries

Ici, on se place dans un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, on peut y voir une analogie avec le cas des séries de réels ou de complexes.

38.3.1 Définitions

Définition 38.3.1. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé de dimension finie. À toute suite u de points de $\mathbb{E}$, on associe la suite des sommes partielles S avec $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge. Cette série a alors pour somme $S := \sum_{k=0}^{\infty} u_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n$.*

Proposition 38.3.2. *Pour que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge, il est nécessaire d'avoir $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Cette condition n'est pas suffisante.*

Démonstration. On a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Si la série converge, la suite S converge d'où $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ et donc $\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$.

Pour montrer que la condition n'est pas suffisante, il suffit de se placer dans le cas de la dimension 1 et de considérer la série harmonique $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$. □

Proposition 38.3.3. *L'ensemble des séries convergentes d'éléments de $\mathbb{E}$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, si $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n v_n)$ sont deux séries convergentes, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.*

Exercice 38.3.4. *Démontrer la proposition.*

Proposition 38.3.5. *Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathbb{E}$, espace vectoriel normé de dimension finie. On considère la série $(\sum_n u_n)$. On a $u_n = u_n^{(1)} e_1 + \cdots + u_n^{(p)} e_p$ pour tout n. Alors, la série $(\sum_n u_n)$ converge si et seulement si chacune des séries $(\sum_n u_n^{(k)})$ converge pour tout $k \in [\![1; p]\!]$. De plus, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}\right) e_k$.*

Démonstration. Supposons d'abord que chacune des séries $(\sum_n u_n^{(k)})$ converge pour tout $k \in [\![1; p]\!]$. On pose $l_k := \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}$. Alors :

$$\left|\left|S_n - \sum_{k=1}^{p} l_i e_i\right|\right|_\infty = \sup_{k\in[\![1;p]\!]} \left|\sum_{r=0}^{n} u_r^{(k)} - l_k\right| \longrightarrow 0\,.$$

Ainsi, on a bien la convergence de $(S_n)_n$ vers $\sum_{k=1}^p l_i e_i$.

Supposons réciproquement la convergence de $(S_n)_n$ vers $l \in \mathbb{E}$. On a $l = \sum_{k=1}^p l_i e_i$. Alors, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on a

$$\left|\sum_{r=0}^{n} u_r^{(k)} - l_k\right| \leq \left|\left|S_n - \sum_{k=1}^{p} l_i e_i\right|\right|_\infty \longrightarrow 0\,,$$

ce qui achève la preuve. □

38.3.2 Séries absolument convergentes

Proposition 38.3.6 (Critère de Cauchy). *Une série $(\sum_n u_n)$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ de dimension finie converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\left|\sum_{r=n+1}^{n+p} u_r\right|\right| < \epsilon$.*

Démonstration. $\mathbb{E}$ étant de dimension finie, c'est un Banach donc la suite $(S_n)_n$ converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_\epsilon$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $||S_{n+p} - S_n|| < \epsilon$. La preuve est achevée après que l'on a noté $S_{n+p} - S_n = \sum_{r=n+1}^{n+p} u_r$. □

Définition 38.3.7. *La série $(\sum_n u_n)$ est dite absolument convergente si la série de réels $(\sum_n ||u_n||)$ converge.*

Remarque 38.3.8. *En fait, cette définition ne nécessite pas que $\mathbb{E}$ soit de dimension finie. Ainsi, une série absolument convergente est une série dont la suite des sommes partielles des normes est convergente. En particulier, une série de fonctions $(\sum_n f_n)$ est absolument convergente pour la norme uniforme si $(\sum_n ||f_n||_\infty)$ converge. Bien qu'en CPGE, l'on parle habituellement de convergence normale, on préfère dans ce polycopié utiliser une terminologie cohérente.*

Théorème 38.3.9. *Dans un espace $\mathbb{E}$ de dimension finie, toute série $(\sum_n u_n)$ absolument convergente est convergente. Et, de plus : $||\sum_{n=0}^\infty u_n|| \leq \sum_{n=0}^\infty ||u_n||$.*

Démonstration. Comme la série numérique $(\sum_n ||u_n||)$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_\epsilon$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{r=n+1}^{n+p} ||u_r|| < \epsilon$. L'inégalité triangulaire implique $\left|\left|\sum_{r=n+1}^{n+p} u_r\right|\right| < \epsilon$. En d'autres termes, la série satisfait le critère de Cauchy donc elle converge. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left|\sum_{r=0}^{n} u_r\right|\right| \leq \sum_{r=0}^{n} ||u_r|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||\,.$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini et par continuité de l'application $x \mapsto ||x||$, il vient $||\sum_{n=0}^{\infty} u_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||$. $\square$

Remarque 38.3.10. *On n'a pas besoin que* $\mathbb{E}$ *soit de dimension finie en fait. Il suffit en effet que* $\mathbb{E}$ *soit un Banach.*

Chapitre 39

Notions avancées de topologie

39.1 Topologie générale

On va ici considérer la topologie générale sur les espaces vectoriels mais il convient de noter que la structure d'espace vectoriel est dispensable. On pourrait considérer n'importe quel ensemble Ω.

Définition 39.1.1 (Topologie)**.** *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. Une topologie sur $\mathbb{E}$ est définie comme une partie $\mathcal{T} \subset 2^{\mathbb{E}}$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble des parties de $\mathbb{E}$) stable par intersection finie et par réunion quelconque et contenant $\mathbb{E}$ et $\emptyset$.*

Remarque 39.1.2. *Cette définition est cohérente avec les propriétés (voir Proposition 37.3.3) sur les ouverts d'un espace vectoriel normé.*

Définition 39.1.3 (Ouverts)**.** *Les éléments d'une topologie $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie.*

Définition 39.1.4. *Les complémentaires des ouverts sont appelés les fermés.*

Définition 39.1.5. *On appelle voisinage ouvert de $x \in \mathbb{E}$ tout ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ contenant x.*

Définition 39.1.6. *On appelle base de voisinages ouverts de la topologie $\mathcal{T}$ toute partie $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ telle que si $x \in \mathcal{O} \in \mathcal{T}$, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset \mathcal{O}$.*

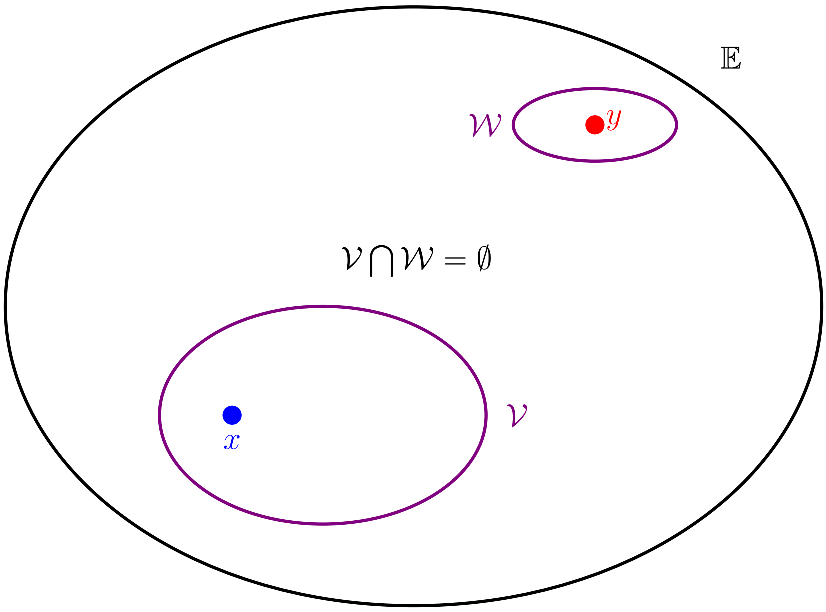
Proposition 39.1.7. *Tout ouvert est une réunion de voisinages ouverts de la base.*

Exemple 39.1.8. *Une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{E}$ est dite métrisable s'il existe une distance sur $\mathbb{E}$ telle que $\mathcal{T}$ coïncide avec l'ensemble des unions arbitraires de boules. Une base de voisinages ouverts commode est alors constituée par les boules ouvertes elles-mêmes.*

Définition 39.1.9 (Espace séparé)**.** *On dit que l'espace $\mathbb{E}$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ est séparé si pour tous $x, y \in \mathbb{E}$ avec $x \neq y$, il existe $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{T}$ tels que $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \bigcap \mathcal{W} = \emptyset$.*

Cette propriété s'illustre bien comme suit :

FIGURE 39.1 – Topologie séparée



Tous les espaces topologiques que nous allons considérer sont séparés. Cette notion est en effet un pré-requis à bon nombre de résultats intuitifs.

Définition 39.1.10. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{E}$. On appelle fermeture de $\mathcal{A}$ l'ensemble $\overline{\mathcal{A}}$ qui est l'intersection de tous les fermés contenant $\mathcal{A}$.*

Définition 39.1.11. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{E}$. On appelle intérieur de $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathring{\mathcal{A}}$ qui est la réunion de tous les ouverts inclus dans $\mathcal{A}$.*

Définition 39.1.12 (Convergence d'une suite)**.** *Soit x une suite d'éléments de $\mathbb{E}$. On dit que la suite x tend vers x_∞ pour la topologie $\mathcal{T}$ si pour tout voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, alors $x_n \in \mathcal{O}$.*

Proposition 39.1.13. *Tout fermé $\mathcal{F}$ est séquentiellement fermé. En d'autres termes, si on considère une suite $x = (x_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$ et si $x_n \longrightarrow x_\infty$ alors $x_\infty \in \mathcal{F}$.*

Démonstration. Soit une telle suite convergente x. Supposons $x_\infty \in \mathcal{F}^c$, qui est ouvert. Alors, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x tel que $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^c$. Or, la convergence de x_n vers x_∞ implique l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \in \mathcal{U} \subset \mathcal{F}^c$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $x_n \in \mathcal{F}$. $\square$

Définition 39.1.14 (Valeur d'adhérence d'une suite)**.** *Soit $x = (x_n)_n$ une suite de points de $\mathbb{E}$. On dit que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x, il existe $i \geq n$ tel que $x_i \in \mathcal{V}$.*

Remarque 39.1.15. *Notons $\mathcal{A}_n := \{x_i \ : \ i \geq n\}$. Alors a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement si $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{A}_n}$.*

Remarque 39.1.16. *On parle aussi de point d'accumulation.*

Définition 39.1.17 (Continuité en un point)**.** *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces topologiques et f une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Soit $x_0 \in \mathbb{E}$. On dit que l'application f est continue en x_0 si pour tout voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $f(x_0)$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x_0 tel que $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$.*

Cette définition est mimée par la suite pour définir la notion de fonctions mesurables.

Définition 39.1.18. *Une application d'un espace topologique dans un autre espace topologique est dite continue si elle est continue en tout point.*

Proposition 39.1.19. *f est continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert par f est un ouvert.*

On admet la proposition.

Définition 39.1.20. *On dit qu'une fonction f est séquentiellement continue si pour toute suite $x = (x_n)_n$ telle que $x_n \longrightarrow x_\infty$ alors $f(x_n)$ converge vers $f(x_\infty)$.*

Proposition 39.1.21. *Si une application f est continue, alors elle est séquentiellement continue.*

Démonstration. Soit une suite $x = (x_n)_n$ tendant vers x_∞ pour la topologie $\mathcal{T}$. Fixons $\mathcal{U}$ un ouvert de la topologie de l'espace d'arrivée tel que $f(x_\infty) \in \mathcal{U}$ et montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $f(x_n) \in \mathcal{U}$. Or, f est continue donc $\mathcal{V} := f^{-1}(\mathcal{U})$ est un voisinage de x donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, on a $x_n \in \mathcal{V}$ d'où $f(x_n) \in \mathcal{U}$. □

Remarque 39.1.22. *La continuité séquentielle est celle qui entre en jeu dans la notion de distribution.*

Nous allons maintenant rappeler un résultat que l'on a déjà vu, dans le cadre des espaces métriques.

Proposition 39.1.23. *Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces métriques, alors f est continue de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ si et seulement si f est séquentiellement continue.*

Il convient de noter que l'on ne peut pas étendre ce résultat aux espaces non métrisables, c'est-à-dire dont les ouverts sont tels qu'aucune métrique ne les génère.

39.1.1 Compacité

Définition 39.1.24 (Compact)**.** *Soit $(\mathbb{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. On dit que $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ est compact si de tout recouvrement ouvert de $\mathcal{K}$, on peut extraire un recouvrement fini.*

Proposition 39.1.25. *Si la topologie $\mathcal{T}$ est métrisable, tout compact est séquentiellement compact, c'est-à-dire que $\mathcal{K}$ est compact si et seulement si toute suite $x = (x_n)_n$ contenue dans $\mathcal{K}$ a un point d'accumulation dans $\mathcal{K}$.*

Proposition 39.1.26. *L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.*

On admet la proposition.

39.1.2 Topologie la moins fine

Définition 39.1.27 (Topologie la moins fine)**.** *On appelle topologie sur $\mathbb{E}$ la moins fine vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ la topologie ayant cette propriété $\mathcal{P}$ et qui a le moins d'ouverts possibles.*

Proposition 39.1.28. *On obtient cette topologie la moins fine en prenant l'intersection de toutes celles qui vérifient $\mathcal{P}$.*

Exercice 39.1.29. *Vérifier qu'une intersection de topologies est une topologie.*

Proposition 39.1.30. *Soient $(\mathbb{E}_j, \mathcal{T}_j)_{j \in \mathcal{J}}$ une famille d'espaces topologiques et soit pour chaque $j \in \mathcal{J}$ une application φ_j de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}_j$ où $\mathbb{E}$ est un ensemble. Alors, les ouverts de la topologie la moins fine sur $\mathbb{E}$ rendant les applications φ_j continues sont tous de la forme*

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \bigcap_{j \in \mathcal{F}_i} \varphi_j^{-1}(\mathcal{V}_j) \ ,$$

où $\mathcal{V}_j$ désigne un ouvert quelconque de $\mathbb{E}_j$, $\mathcal{F}_i$ est un sous-ensemble **fini** *quelconque de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$ est un ensemble quelconque d'indices.*

On admet cette proposition.

Remarque 39.1.31. *En conséquence, on dispose de la base de voisinages de $\mathbb{E}$:*

$$\bigcap_{j \in \mathcal{F}} \varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_j) \ ,$$

où $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ est fini et $\mathcal{U}_j$ appartient à une base de voisinages des $\mathbb{E}_j$.

Définition 39.1.32 (Topologie produit)**.** *Soient des espaces topologiques $(\mathbb{E}_i, \mathcal{T}_i)$. L'espace topologique produit $\mathbb{E} := \prod_i \mathbb{E}_i$ peut être muni de la topologie produit. Il s'agit de la topologie la moins fine rendant les projections de $\mathbb{E}$ sur chaque $\mathbb{E}_i$ continues.*

39.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Lemme 39.2.1 (Lemme de Baire)**.** *Soit $\mathbb{E}$ un espace métrique complet. Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une suite de fermés d'intérieur vide. Alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ est aussi d'intérieur vide.*

Remarque 39.2.2. *De manière équivalente, une intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense dans $\mathbb{E}$.*

Démonstration du Lemme 39.2.1. Soit $\mathcal{O}_n$ une suite d'ouverts denses et soit $\mathcal{G} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$. Montrons que $\mathcal{G}$ rencontre un ouvert arbitraire $\mathcal{O}$. Pour cela, on choisit une boule fermée $\mathcal{B}_0 := \overline{\mathbb{B}\,(x_0, r_0)} := \{x \in \mathbb{E} \ : \ \mathrm{d}(x, x_0) \leq r_0\} \subset \mathcal{O}$, où $x_0 \in \mathcal{O}$ et $r_0 > 0$ est assez petit.

Comme $\mathcal{O}_1$ est dense, on peut choisir $x_1 \in \mathcal{B}_0$ et $r_1 > 0$ tels que

$$\overline{\mathbb{B}\,(x_1, r_1)} \subset \overline{\mathbb{B}\,(x_0, r_0)} \bigcap \mathcal{O}_1 \,,$$

et $r_1 \leq \frac{r_0}{2}$. On construit alors par récurrence une suite $\left(\overline{\mathbb{B}\,(x_n, r_n)}\right)_n$ telle que

$$\overline{\mathbb{B}\,(x_n, r_n)} \subset \overline{\mathbb{B}\,(x_{n-1}, r_{n-1})} \quad \text{et } r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2} \,.$$

La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy car $\mathrm{d}\,(x_{n+p}, x_{n+q}) \leq \frac{r_0}{2^n}$ donc elle converge car $\mathbb{E}$ est complet. Soit $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$. Alors $x_\infty \in \mathcal{O} \bigcap \mathcal{G}$.

□

Remarque 39.2.3. *La structure d'espace vectoriel n'intervient pas.*

Définition 39.2.4. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés. L'espace vectoriel normé des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est noté $\mathcal{L}_c\,(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. On le munit de la norme*

$$||T||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})} := \sup_{x\in\mathbb{E}, ||x||\leq 1} ||T(x)|| \,.$$

Notation 39.2.5. *On note $\mathcal{L}_c\,(\mathbb{E}) := \mathcal{L}_c\,(\mathbb{E}, \mathbb{E})$.*

Définition 39.2.6. $\mathbb{E}' := \mathcal{L}_c\,(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ *est l'ensemble des formes linéaires continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$. On l'appelle le dual de $\mathbb{E}$.*

Théorème 39.2.7 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathcal{L}_c\,(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $\sup_{i\in\mathcal{I}} ||T_i(x)|| < +\infty$. Alors $\sup_{i\in\mathcal{I}} ||T_i||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})} < \infty$. En d'autres termes, il existe $c > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$ et pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a $||T_i(x)|| \leq c||x||$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\mathcal{F}_n := \{x \in \mathbb{E} \ : \ \forall i \in \mathcal{I}\,, \ ||T_i(x)|| \leq n\}$, en sorte que chaque $\mathcal{F}_n$ est une intersection de fermés et donc est un fermé. Par hypothèse, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n = \mathbb{E}$. Par conséquent, l'intérieur de la réunion des $\mathcal{F}_n$ est non vide. D'après le Lemme 39.2.1, l'un des $\mathcal{F}_n$ doit être d'intérieur non vide. On suppose $\mathring{\mathcal{F}}_{n_0} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ et $r > 0$ tels que $\overline{\mathbb{B}\left(x_0, r\right)} \subset \mathcal{F}_{n_0}$. Alors, pour tout $i \in \mathcal{I}$, pour tout $z \in \overline{\mathbb{B}(0,1)}$, $||T_i(x_0+rz)|| \leq n_0$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $z \in \overline{\mathbb{B}(0,1)}$:

$$r||T_i(z)|| \leq n_0 + ||T_i(x_0)|| \leq 2n_0\,,$$

d'où $||T_i||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})} \leq \frac{2n_0}{r} < \infty$.

□

Remarque 39.2.8. *Pour que le théorème de Banach-Steinhaus soit applicable, il suffit que l'espace de départ $\mathbb{E}$ soit complet. Et, l'espace d'arrivée $\mathbb{F}$ peut être simplement vectoriel normé.*

Corollaire 39.2.9. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires et continus de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{E}$, $T_n(x)$ converge quand n tend vers l'infini vers une limite $T(x)$. Alors,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})} < +\infty\,.$$

De plus, $T \in \mathcal{L}_c\left(\mathbb{E},\mathbb{F}\right)$ et $||T||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})} \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})}$.

Démonstration. La première relation est une conséquence du Théorème 39.2.7. On a donc l'existence de $c > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{E}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||T_n(x)|| \leq c||x||$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{E}$, $||T(x)|| \leq c||x||$ et donc que $T \in \mathcal{L}_c\left(\mathbb{E},\mathbb{F}\right)$. Et, comme $||T_n(x)|| \leq ||T_n||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})}||x||$, en prenant la limite inférieure, il vient $||T(x)|| \leq \lim_{n\to\infty} ||T_n||_{\mathcal{L}_c(\mathbb{E},\mathbb{F})}||x||$, ce qui donne bien la dernière relation annoncée. □

Bibliographie

[1] Mayeul Bacquelin. **Probabilités en prépas scientifiques.** Ellipses.

[2] Marcel Berger et Bernard Gostiaux. **Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.** Presses Universitaires Françaises.

[3] Vincent Blanlœil. **Une introduction moderne à l'algèbre linéaire.** Ellipses.

[4] Mohamed Boucetta. **Éléments d'analyse réelle.** Ellipses.

[5] René Deheuvels. **Formes quadratiques et groupes classiques.** Presses Universitaires de France.

[6] Michel Demazure. **Cours d'algèbre.** Cassini.

[7] Olivier Garet et Aline Kurtzmann **De l'intégration aux probabilités.** Ellipses.

[8] Claude Gasquet et Patrick Witomski. **Analyse de Fourier et applications.** Dunod.

[9] Xavier Gourdon. **Les maths en tête - Algèbre.** Ellipses.

[10] Xavier Gourdon. **Les maths en tête - Analyse.** Ellipses.

[11] Ivan Gozard. **Théorie de Galois.** Ellipses.

[12] Georges Gras et Marie-Nicole Gras. **Algèbre fondamentale, Arithmétique.** Ellipses.

[13] Sylvie Guerre-Delabrière. **Initiation aux suites, aux intégrales et à l'algèbre linéaire en L1.** Ellipses.

[14] Olivier Marchal. **Fondements des probabilités.** Ellipses.

[15] Abderrahmane Ouaqqa. **Analyse. Fonctions d'une à plusieurs variables réelles.** Ellipses.

[16] Xavier Picamoles. **Fondamentaux de mathématiques appliquées.** Ellipses.

[17] Patrick Royis. **Éléments de théorie des probabilités.** Ellipses.

[18] Walter Rudin. **Analyse réelle et complexe.** Dunod.

[19] Michelle Schatzman. **Analyse numérique - Une approche mathématique.** Dunod.