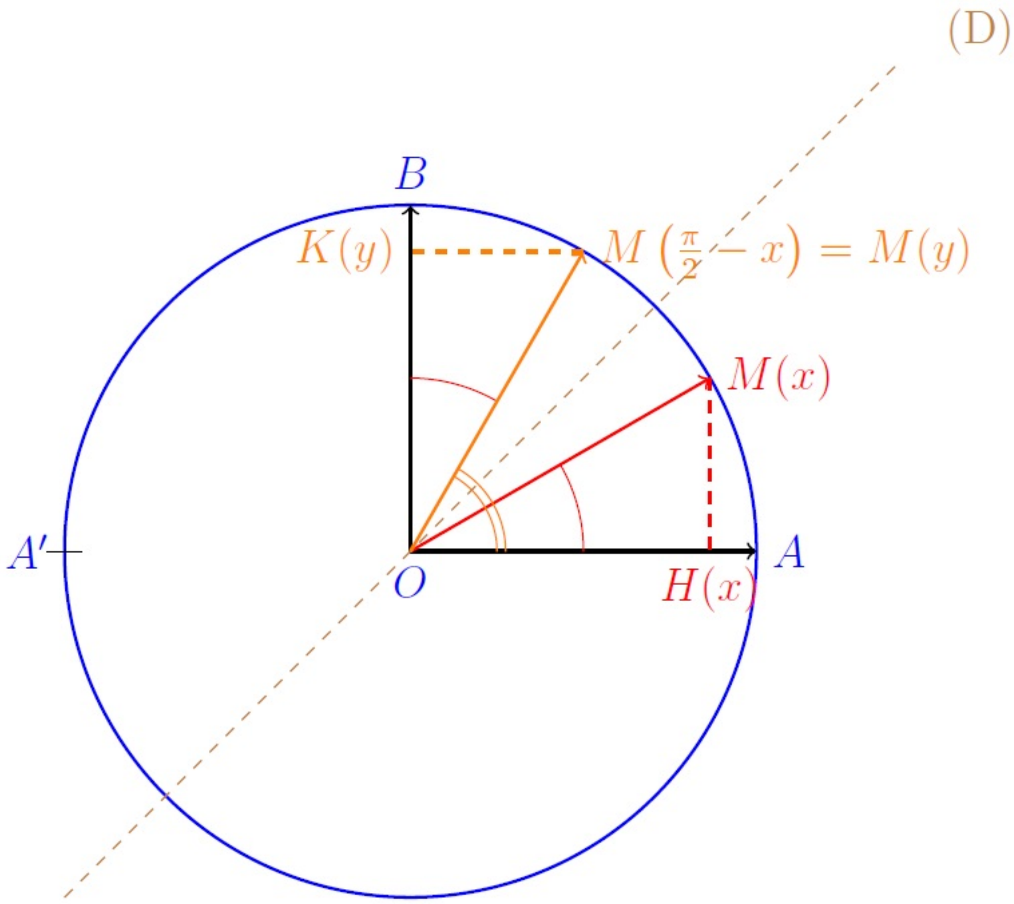
Bases indispensables des Mathématiques

Julian Tugaut
FISE 1
Version du 10 avril 2025



1 Rudiments

1.1 Vocabulaire usuel

Définition 1.1 (Axiome)**.** *Un axiome est un énoncé supposé vrai* a priori *et que l'on ne cherche pas à démontrer.*

Définition 1.2 (Proposition)**.** *Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux.*

Remarque 1.3. *On parle aussi d'assertion ou d'affirmation.*

Le mot "proposition" est ici à comprendre au sens premier du terme : on propose quelque chose. Il reste ensuite à la démontrer. Et, c'est à la personne qui propose de prouver. On parle de "charge de la preuve".

Remarque 1.4. *Par abus de langage, une proposition est souvent entendue comme une proposition vraie correspondant à un résultat intermédiaire ou d'importance plus ou moins modérée.*

Définition 1.5 (Théorème)**.** *Un théorème est une assertion dont on a démontré qu'elle était vraie.*

Définition 1.6 (Corollaire)**.** *Un corollaire à un théorème est une conséquence dudit théorème.*

Définition 1.7 (Lemme)**.** *Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.*

Définition 1.8 (Conjecture)**.** *Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie sans pour autant disposer d'une démonstration pouvant en authentifier la véracité.*

Définition 1.9 (Définition)**.** *Une définition est un énoncé dans lequel on liste les particularités d'un objet.*

Remarque 1.10. *La définition d'un objet mathématique peut impliquer la non-existence de l'objet en question.*

1.2 Les quantificateurs

On considère un ensemble E et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité dépendent des éléments x de E.

Par exemple, considérons la proposition $P(x) :=$"$x^2 = 4$" et $E := \mathbb{R}$. On ne peut pas dire que la phrase $x^2 = 4$ est vraie ou fausse avant de savoir ce que vaut x.

Définition 1.11. *Une proposition dont les valeurs de vérité sont fonctions d'une ou plusieurs variable(s) s'appelle un prédicat.*

Définition 1.12 (Variable muette)**.** *La lettre apparaissant après un quantificateur peut être remplacée par toute lettre n'apparaissant pas dans le prédicat. Cette variable (ou lettre) est une* variable muette.

Une variable muette peut se comprendre comme une variable locale en informatique : elle n'intervient que pour réaliser les calculs et son nom importe peu puisqu'elle disparaît à la fin de l'exécution du programme.

Définition 1.13. *La proposition "Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit en abrégé comme suit : "$\forall x \in E, P(x)$".*

Définition 1.14. *La proposition "Il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit en abrégé comme suit : "$\exists x \in E, P(x)$".*

Définition 1.15. *La proposition "Il existe un unique élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie" s'écrit en abrégé comme suit : "$\exists! x \in E, P(x)$".*

Remarque 1.16. *$\forall$ s'appelle le quantificateur universel tandis que $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.*

Théorème 1.17. *Soit un ensemble E et un prédicat $P(x)$ dont les valeurs de vérité dépendent de $x \in E$. Alors :*
- $\mathrm{non}(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \mathrm{non}P(x))$.
- $\mathrm{non}(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \mathrm{non}P(x))$.

Théorème 1.18. *Pour prendre la négation d'une proposition écrite avec un nombre fini de quantificateurs et un prédicat, il suffit d'échanger,* en respectant les ordres*, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ et de les faire intervenir sur la négation du prédicat.*

Ce qu'il faut retenir : on peut permuter des quantificateurs *de même nature*. Il est naturel de se demander si l'on peut permuter $\forall$ et $\exists$. La réponse est *non*.

1.3 Les raisonnements classiques

1.3.1 Raisonnement déductif

Si P est une proposition vraie (donc un théorème) et si $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie (donc un théorème aussi), on peut affirmer que Q est une proposition vraie. Il s'agit du raisonnement de base à reproduire quasiment à chaque fois.

1.3.2 Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose alors sa négation $\mathrm{non}P$. Et, l'on montre que cela entraîne une proposition fausse Q. On en conclut alors que P est vraie. En effet, comme Q est fausse, l'implication $\mathrm{non}P \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\mathrm{non}P$ est fausse, c'est-à-dire si P est vraie.

1.3.3 Raisonnement par contraposition

Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il faut et il suffit de montrer que $\mathrm{non}Q \Rightarrow \mathrm{non}P$ est vraie.

1.3.4 Raisonnement par récurrence

On suppose que $P(n)$ est un prédicat dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer "$\forall n, P(n)$", on procède comme suit :

- Initialisation : on montre $P(0)$.
- Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour *un* $n \in \mathbb{N}$. On démontre alors que $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : on en déduit que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il existe des variantes à la récurrence : la récurrence finie, la récurrence complète, la récurrence descendante...

1.3.5 Raisonnement par contre-exemple

On cherche à infirmer une proposition de la forme $\forall x \in E, P(x)$. Il suffit alors d'exhiber un contre-exemple : on utilise alors tous les moyens mathématiquement rigoureux à notre disposition pour débusquer un élément x de E tel que non$P(x)$.

1.3.6 Raisonnement par Analyse-Synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est à utiliser pour déterminer les solutions d'un problème donné si le raisonnement avec des équivalences est impossible ou délicat. Dans la partie "analyse" (la première partie), on détermine les propriétés d'une éventuelle solution afin de limiter drastiquement les possibilités. Dans la seconde partie, la "synthèse", on s'intéresse aux solutions obtenues dans l'analyse et l'on vérifie lesquelles sont effectivement solutions du problème initial.

1.4 Erreurs classiques

- La première à laquelle nous pensons consiste à mal prendre la négation. Ainsi, le contraire de "ce chat est blanc" n'est pas "ce chat est noir" mais bien "ce chat n'est pas blanc". De même, le contraire de $x \leq 0$ n'est pas $x \geq 0$. C'est $x > 0$.
- Confondre l'implication et l'équivalence. Une équivalence est constituée de deux implications.
- Refuser la quantification. Par exemple, la phrase $\sin(x) \neq x$ est dépourvue de sens. Ou plutôt, elle n'a pas un sens précis. L'auteur voulait-il dire $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq x$ ou l'auteur voulait-il dire que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est différente de la fonction $x \mapsto x$ auquel cas il s'agit de $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq x$.
- Croire que l'on peut permuter les quantificateurs de nature différente.
- Utiliser des quantificateurs interdits comme $\not\forall$ et $\nexists$.
- Utiliser des résultats pour lesquels on ne dispose pas de preuve.

1.5 Quelques mots de liaison

On utilise la langue française pour exprimer les mathématiques. Néanmoins, certains mots sont plus importants que d'autres. Voyons ces mots en question.

- **Ainsi**. Signifie la conséquence.
- **D'après**. Sert à citer un résultat précédent.
- **Comme**. Introduit un argument.
- **Donc**. Exprime la conséquence ou la conclusion d'énoncés précédents.
- **D'où**. Exprime la conséquence ou la conclusion d'énoncés précédents.
- **Finalement**. Souligne le caractère conclusif.
- **Or**. Présente le fait qui explique ce qui suit.
- **Par conséquent**. Signifie la conséquence.
- **Conséquemment**. Signifie la conséquence.
- **Subséquemment**. Signifie la conséquence.
- **On en déduit**. Signifie la conséquence.
- **Il vient**. Signifie la conséquence.
- **Il s'ensuit**. Signifie la conséquence.

1.6 Rappels sur le calcul algébrique

Soient a et b deux réels ou deux complexes. Alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab\,,\\ (a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab\,,\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\,.\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. De même, si $a \neq 1$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$1+a+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\,, \tag{1}$$

et

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)\,. \tag{2}$$

1.7 Alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom français
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
ζ	Z	dzêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi (se prononce Ksi)
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
φ	Φ	phi
χ	X	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

À noter que le phi minuscule se note parfois ϕ au lieu de φ.

1.8 Le symbole Σ

Soient n nombres complexes $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors, la somme de tous les nombres complexes $a_1, \cdots, a_n$ est notée

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

De manière plus générale, on peut considérer

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \cdots + a_n \,,$$

si $m \in [\![1;n]\!]$. Il y a alors $n-m+1$ termes et non pas $n-m$. De même, si l'indice de la somme commence à 0, alors il y a bien un terme de plus.

1.8.1 Somme de termes constants

De manière générale, $\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$ et $\sum_{k=0}^{n} \lambda = (n+1)\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.8.2 Linéarité de la somme

Soient deux suites de nombres complexes $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k \,.$$

Il est important de bien comprendre que cette égalité n'a été présentée que pour des sommes **finies**.

1.8.3 Progression arithmétique

La formule $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se réécrit donc $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
De manière plus générale, on a $\sum_{k=0}^{n-1} (ak+b) = nb + a\frac{n(n-1)}{2}$.

1.8.4 Progression géométrique

On peut aussi réécrire la formule (1) pour $a \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \,.$$

1.8.5 Sommes télescopiques

On se donne une suite de complexes $(b_n)_n$. On introduit la suite de complexes $(a_n)_n$ avec $a_n := b_{n+1} - b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_0 \,,$$

vu que les termes $b_1, \cdots, b_n$ se simplifient.

1.9 Le symbole $\prod$

De la même manière que pour la somme de n termes, soient n nombres complexes $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors, le produit de tous les nombres complexes $a_1, \cdots, a_n$ est noté

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \,.$$

1.9.1 Produit de facteurs constants

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha \times \cdots \times \alpha}_{n \text{ fois}} = \alpha^n \,.$$

1.9.2 Produits télescopiques

On se donne une suite de complexes non nuls $(b_n)_n$. On introduit la suite de complexes $(a_n)_n$ avec $a_n := \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \frac{b_{n+1}}{b_0} \,, \tag{3}$$

1.10 Factorielle d'un entier naturel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, la factorielle de n est

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \,.$$

Quelques factorielles à connaître par cœur : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$. Mais aussi : $0! = 1$.

1.11 Congruences

Soit un nombre réel $r > 0$. Soient deux réels x et y. Le nombre x est dit congru à y modulo r si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kr$. On écrit alors $x \equiv y \pmod{r}$. Donnons quelques propriétés de la congruence.

- On peut additionner deux congruences de même module. Si $x \equiv y \pmod{a}$ et si $x' \equiv y' \pmod{a}$ alors $x + x' \equiv y + y' \pmod{a}$.
- On peut multiplier une congruence par un réel non nul **sans oublier de multiplier aussi le module**. Si $x \equiv y \pmod{a}$ alors $\alpha x \equiv \alpha y \pmod{\alpha a}$ si $\alpha \neq 0$.
- Une congruence modulo $a \neq 0$ implique une congruence modulo $\frac{a}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, si deux réels sont congrus modulo 4π, ils le sont aussi modulo 2π.

1.12 Inégalités et inéquations

Voici les deux règles essentielles :

- Si on multiplie une inégalité par un nombre réel strictement positif, on ne change pas le sens de l'inégalité.

- Si on multiplie une inégalité par un nombre réel strictement négatif, on change le sens de l'inégalité.

Une règle tacite consiste à factoriser l'expression pour étudier plus facilement son signe.

1.13 Trinôme réel du second degré

On se donne trois réels a, b, c avec $a \neq 0$. On introduit la fonction f définie par $f(x) := ax^2+bx+c$. Pour étudier son signe ainsi que son minimum (respectivement son maximum) si $a > 0$ (respectivement si $a < 0$), on utilise la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right),$$

où $\Delta := b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant.
Trois cas apparaissent naturellement :

- Si $\Delta = 0$, alors l'expression $f(x)$ est factorisée et la fonction n'admet ainsi qu'une seule racine : $-\frac{b}{2a}$. De plus, l'extremum (maximum si $a > 0$ et minimum si $a < 0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et vaut 0.
- Si $\Delta > 0$, alors en utilisant une identité remarquable, on a deux racines réelles distinctes : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus, l'extremum (maximum si $a > 0$ et minimum si $a < 0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et vaut $-\frac{\Delta}{4a}$.
- Si $\Delta < 0$, on peut à nouveau utiliser une identité remarquable mais l'on a cette fois deux racines complexes conjuguées : $\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$. De plus, l'extremum (maximum si $a > 0$ et minimum si $a < 0$) est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et vaut $-\frac{\Delta}{4a}$.

2 Ensembles, Applications et Relations

2.1 Ensembles

Définition 2.1 (Ensemble). *On appelle ensemble toute collection d'objets, ces objets étant appelés "éléments de l'ensemble". Ce qui caractérise le fait qu'une collection d'objets est un ensemble est que pour tout objet que l'on peut considérer, cet objet est ou n'est pas élément de l'ensemble.*

Cantor utilisait les lettres majuscules pour les ensembles et les lettres minuscules pour les éléments d'ensembles. Nous ferons comme lui. Remarquons que les éléments d'un ensemble peuvent eux-mêmes être des ensembles...

2.1.1 Vocabulaire, notations

Notation 2.2 (Appartenance). *Soit E un ensemble. Soit a un objet. Si a est élément de E, on note $a \in E$. Si a n'est pas un élément de E, on note $a \notin E$.*

Définition 2.3. *L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est noté $\emptyset$.*

Définition 2.4 (Ensemble des parties d'un ensemble). *Soit E un ensemble. Soit F un autre ensemble. On peut reconnaître si F est inclus dans E ou non. Si $F \subset E$, alors F est dit élément de $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E, ensemble des ensembles qui sont inclus dans E. On le note également 2^E.*

Définition 2.5 (Produit cartésien de deux ensembles). *Soient deux ensembles E et F. Leur produit cartésien, noté $E \times F$ est égal à $\{(x, y) \ : \ x \in E, \, y \in F\}$.*

2.1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 2.6. *On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments communs à A et à B. L'intersection de deux ensembles A et B est notée $A \cap B$.*

Définition 2.7 (Ensembles disjoints)**.** *On dit que deux ensembles A et B sont disjoints lorsque leur intersection est vide.*

Proposition 2.8. *Soient trois ensembles A, B et C. Alors $A \cap B = B \cap A$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C$.*

Définition 2.9. *On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A ou (au sens inclusif) qui sont dans B. La réunion de deux ensembles A et B est notée $A \cup B$.*

Proposition 2.10. *Soient trois ensembles A, B et C. Alors $A \cup B = B \cup A$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C$.*

Proposition 2.11. *L'intersection est distributive par rapport à la réunion :*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .$$

Définition 2.12. *Soit un ensemble Ω (comme l'univers des évènements en probabilités). Soit A un sous-ensemble de Ω. On appelle complémentaire de A dans Ω l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A est noté $\overline{A}$ ou A^c.*

Proposition 2.13. *Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω. Alors, $\overline{\overline{A}} = A$. De plus, $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.*

Proposition 2.14. *Soit un ensemble Ω. Alors, $\overline{\Omega} = \emptyset$. De même, on a $\overline{\emptyset} = \Omega$.*

Théorème 2.15 (Lois de Morgan)**.** *Soit un ensemble Ω et soient A et B deux sous-ensembles de Ω. Alors, on a :*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} .$$

Définition 2.16. *Soit Ω un ensemble. Soient n sous-ensembles : $A_1, \cdots, A_n$. On dit qu'ils forment une partition de Ω s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est égale à Ω.*

2.2 Applications

Notation 2.17. *L'ensemble des applications de l'ensemble E vers l'ensemble F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.*

Définition 2.18. *Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Alors, on définit l'application $g \circ f$ comme suit. $g \circ f$ admet E pour ensemble de départ, G pour ensemble d'arrivée et $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ pour tout $x \in E$.*

Définition 2.19 (Injectivité)**.** *Soient deux ensembles E et F et f une application de E vers F. On dira que f est injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent par f. En d'autres termes, en notant $\#E$ le nombre d'éléments de l'ensemble E si celui-ci est fini :*

$$\forall y \in F, \# \{x \in E \ : \ f(x) = y\} \leq 1\,.$$

Définition 2.20 (Surjectivité)**.** *Soient deux ensembles E et F et f une application de E vers F. On dira que f est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f. En d'autres termes :*

$$\forall y \in F, \{x \in E \ : \ f(x) = y\} \neq \emptyset\,.$$

Définition 2.21 (Bijectivité)**.** *Soient deux ensembles E et F et f une application de E vers F. On dira que f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent par f. En d'autres termes :*

$$\forall y \in F, \# \{x \in E \ : \ f(x) = y\} = 1\,.$$

Théorème 2.22. *Soit $f \in F^E$ où E et F sont deux ensembles. Si f est bijective, alors il existe une unique application g de F vers E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ où l'on a pour tout $x \in E$: $\mathrm{Id}_E(x) = x$ et pour tout $y \in F$: $\mathrm{Id}_F(y) = y$. Cette unique application g est appelée l'application réciproque de f et on la note f^{-1}.*

Remarque 2.23. *On a : $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Définition 2.24 (Image directe)**.** *Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E vers F. Soit $A \subset E$. On pose alors*

$$f(A) := \{y \in F \ : \ \exists x \in E\,, f(x) = y\}\ .$$

Définition 2.25 (Image réciproque)**.** *Soit $B \subset F$. Alors, on pose*

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \ : \ \exists y \in B\,, f(x) = y\}\ .$$

Ici, f^{-1} n'est pas l'application réciproque de f.

Définition 2.26 (Fonction indicatrice)**.** *Soit Ω un ensemble. Soit $A \subset \Omega$. On considère alors l'application $\mathbb{1}_A$ qui va de Ω dans $\{0; 1\}$ et qui est définie par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}\ .$$

$\mathbb{1}_A$ est appelée fonction indicatrice de A.

2.3 Relations d'équivalence sur un ensemble E

Définition 2.27 (Relation binaire)**.** *Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers lui-même est définie par la donnée de son graphe $G_{\mathcal{R}}$ (sous-ensemble de E^2). On définit alors :*

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in G_{\mathcal{R}}\,.$$

Remarque 2.28. *On peut représenter une relation binaire par un tableau dans le cas où les ensembles E et F sont finis.*

Définition 2.29 (Réflexivité). *$\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.*

Définition 2.30 (Symétrie). *$\mathcal{R}$ est symétrique si*

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\,.$$

Définition 2.31 (Transitivité). *$\mathcal{R}$ est transitive si*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((x\mathcal{R}y) \;\; et \;\; (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow x\mathcal{R}z\,.$$

Définition 2.32 (Relation d'équivalence). *Une relation d'équivalence d'un ensemble E est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*

Théorème 2.33. *Définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E revient à la donnée d'une partition de E.*

Remarque 2.34. *La notion de relation d'équivalence sert en arithmétique. Également, elle est à la base de la construction de l'intégrale au sens de Lebesgue.*

Remarque 2.35. *Soient E et F deux ensembles. On dit que ces ensembles sont équipotents si et seulement s'il existe une bijection φ de E dans F. On définit ainsi une relation d'équivalence qui généralise la notion intuitive de cardinal aux ensembles non finis.*

Définition 2.36. *On dit qu'un ensemble E est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments. Ce nombre, appelé cardinal de E, est noté $\#E$.*

Définition 2.37. *Un ensemble qui n'est pas de cardinal fini est dit infini.*

Définition 2.38. *On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.*

Exemple 2.39. *L'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, est dénombrable.*

Contre-exemple 2.40. *L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable.*

Proposition 2.41. *Une réunion fini ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.*

3 Trigonométrie et nombres complexes

3.1 Trigonométrie

3.1.1 Fonctions circulaires

Rappel 3.1. *On se donne un cercle de centre O et de rayon 1. Le choix de l'orientation des axes perpendiculaires en O détermine l'orientation du plan. Deux orientations sont possibles : le sens des aiguilles d'une montre et le sens contraire.*

Rappel 3.2. *Soit M un point du cercle trigonométrique avec $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct du plan : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$. Alors, l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est défini. De plus, l'application $M \mapsto (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ définit une bijection du cercle trigonométrique sur l'ensemble des angles de vecteurs non nuls.*

Proposition 3.3. *Il existe une surjection de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique. Notons-la φ.*

Définition 3.4 (π)**.** *Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle trigonométrique. π est le plus petit élément réel positif x tel que $\varphi(x) = A'$.*

Remarque 3.5. *Alors : $\varphi(x) = \varphi(y)$ est équivalent à $y \equiv x(2\pi)$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $M(x) := \varphi(x)$ est un point du cercle trigonométrique.

Définition 3.6 (Cosinus de x)**.** *On appelle cosinus du réel x l'abscisse dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du point $M(x)$. Le cosinus de x est noté* $\cos(x)$*.*

Définition 3.7 (Sinus de x)**.** *On appelle sinus du réel x l'ordonnée du point $M(x)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le sinus de x est noté* $\sin(x)$*.*

Proposition 3.8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\cos(x) \in [-1;1]$ *et* $\sin(x) \in [-1;1]$*. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) = (\cos(x), \sin(x))$.*

Proposition 3.9 (Théorème de Pythagore)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$*.*

Définition 3.10 (Tangente de x)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle $N(x)$ l'intersection entre la droite $(OM(x))$ et la droite parallèle à la droite (OB) passant par A. Ce point $N(x)$ existe dès que $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. La tangente de x est définie comme étant l'ordonnée du point $N(x)$. On la note* $\tan(x)$*.*

Proposition 3.11 (Théorème de Thalès)**.** *Si $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$*.*

3.1.2 Formules de trigonométrie

Proposition 3.12 (Formule de relèvement)**.** *Soient deux réels a et b tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.*

Proposition 3.13 (Parité et imparité)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\cos(-x) = \cos(x)$ *et* $\sin(-x) = -\sin(x)$*.*

Proposition 3.14 (Périodicité)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$*. Au contraire,* $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ *et* $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$*.*

Proposition 3.15. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin(x)$*.*

Proposition 3.16 (Échange entre cosinus et sinus)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$*.*

Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\,, \tag{4}$$

$$\text{et} \quad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\,. \tag{5}$$

On en déduit immédiatement $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

Formules de duplication

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Proposition 3.17. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad et \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Valeurs particulières (à connaître par cœur)

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Cotangente	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Proposition 3.18 (Formules essentielles pour l'intégration)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a*

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad et \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},$$

Proposition 3.19. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, $\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$ et $\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.*

3.1.3 Quelques propriétés des fonctions trigonométriques

Fonctions sinus et arcsinus La fonction sinus est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus 2π-périodique. On se restreint donc à l'intervalle $[-\pi;\pi]$. Puis, l'imparité nous permet de nous restreindre à $[0;\pi]$. Enfin, comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on sait que la droite verticale d'équation $(x = \frac{\pi}{2})$ dans le plan est axe de symétrie. On se restreint alors à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, on note que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$. Sa réciproque est appelée arcsinus et est notée arcsin. La fonction arcsinus est définie, continue, dérivable de $[-1;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 3.20. *Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.*

Théorème 3.21. *On a la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{6}$$

Fonctions cosinus et arccosinus La fonction cosinus est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus 2π-périodique. On se restreint donc à l'intervalle $[-\pi;\pi]$. Puis, la parité nous permet de nous restreindre à $[0;\pi]$. Enfin, comme $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, on sait que le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ dans le plan est centre de symétrie. On se restreint alors à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, on note que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$. Sa réciproque est appelée arccosinus et est notée arccos. La fonction arccosinus est définie, continue, dérivable de $[-1;1]$ dans $[0;\pi]$.

Proposition 3.22. *Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.*

Fonctions tangente et arctangente La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est de plus π-périodique. On se restreint donc à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Puis, l'imparité nous permet de nous restreindre à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Par ailleurs, on note que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque est appelée arctangente et est notée arctan. La fonction arctan est définie, continue, dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

3.2 Nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{R}$, quand il est muni de l'addition et du produit est ce que l'on appelle un corps. Ce corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ est commutatif mais il a un défaut : il existe des équations réelles qui n'ont pas de solution. On veut donc étendre le corps des réels.

On procède par Analyse-Synthèse. Comme on veut que le corps des complexes étende le corps des réels, il faut que pour tout $a \in \mathbb{R}$, a soit un complexe. Soit maintenant i **une** solution de l'équation $x^2+1=0$ dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est un corps, $a+b\mathrm{i}$ est un complexe pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{R}^2$. On pose $z := a+\mathrm{i}b$ et $z' := a'+\mathrm{i}b'$. Par définition, on a $z+z' \in \mathbb{C}$ et $zz' \in \mathbb{C}$. On cherche à calculer ces deux complexes :

$$z+z' = (a+\mathrm{i}b)+(a'+\mathrm{i}b') = (a+a')+\mathrm{i}(b+b')\,,$$

en utilisant la commutativité de la somme et du produit dans le corps des complexes. À nouveau, $z+z'$ est de la forme $\lambda+\mathrm{i}\mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De même :

$$zz' = (a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b') = (aa'-bb')+\mathrm{i}\,(ab'+a'b)\ ,$$

en utilisant la commutativité de la somme et du produit dans le corps des complexes. Ainsi, zz' peut aussi se mettre sous la forme $\alpha+\mathrm{i}\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On considère alors $\mathbb{C} := \{a+\mathrm{i}b \ :\ a, b \in \mathbb{R}\}$. On vérifie aisément que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif dans lequel l'équation $x^2+1=0$ admet une solution.

3.2.1 Calculs de base dans $\mathbb{C}$

Définition 3.23. *Soit un complexe $z = x+\mathrm{i}y$. On appelle son conjugué, et l'on note $\overline{z}$, le complexe*

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y\,.$$

Remarque 3.24. *Le conjugué de z est parfois noté z^*.*

Proposition 3.25. *Soient deux complexes z_1 et z_2. Alors $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$. De plus : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.*

Définition 3.26. *Soit $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Le réel x est la partie réelle de z : $x = \Re(z) = \mathrm{Re}(z)$. Le réel y est la partie imaginaire de z : $y = \Im(z) = \mathrm{Im}(z)$.*

- Pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = x^2+y^2 \in \mathbb{R}_+$.
- Pour tout $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2}$.

Proposition 3.27. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda.z := \lambda \times z$. Alors, $(\mathbb{C}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Et, sa dimension est deux. Une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ est $(1, \mathrm{i})$. Cela signifie que si deux complexes sont égaux : $x_1+\mathrm{i}y_1 = x_2+\mathrm{i}y_2$ alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.*

On rapporte le plan à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tout point du plan est alors défini par le couple (x, y) de ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À chacun de ces points du plan, on peut donc associer un couple de réels et conséquemment un complexe $z = x + \mathrm{i}y$. Tout point M du plan est donc défini par un unique nombre complexe z, appelé affixe du point M.

On peut interpréter la conjugaison d'un complexe comme la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Si z est réel, alors le point $M(z)$ associé est sur l'axe des abscisses. Si z est un imaginaire pur (c'est-à-dire si sa partie réelle est nulle), le point associé est sur l'axe des ordonnées.

Définition 3.28 (Module)**.** *Soit un complexe $z = x+\mathrm{i}y$. On appelle module de z la quantité $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.*

Proposition 3.29. *Pour tous les complexes z_1, z_2, on a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.*

Proposition 3.30. *Soit un complexe z. Alors $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$*

3.2.2 Nombres complexes de module 1

Notation 3.31. *L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$:*

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} \ .$$

Groupe $(\mathbb{U}, \times)$ Muni de la multiplication, $\mathbb{U}$ est ce que l'on appelle un groupe commutatif.

Proposition 3.32. *Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.*

Définition 3.33. *L'angle θ est appelé l'argument du complexe $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$. On note $\theta = \arg(z)$. Pour simplifier l'écriture, on écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} := \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.*

Proposition 3.34. *Pour tous les réels θ_1, θ_2, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$.*

Proposition 3.35 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \ .$$

Forme trigonométrique d'un complexe non nul Soit un nombre complexe non nul z quelconque. On a alors $z = |z|\frac{z}{|z|}$. Or, le module de $\frac{z}{|z|}$ est 1 donc il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ d'où

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right) \ .$$

Définition 3.36. *Soit un complexe non nul quelconque z. On suppose que l'on peut écrire $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. Alors, ρ est le module de z et θ est son argument. On le note $\theta = \arg(z)$.*

Remarque 3.37. *On observe que l'on a $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$ donc l'argument d'un complexe n'est pas unique. Il est défini modulo 2π.*

Proposition 3.38. *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$*

4 Polynômes

Dans cette section, on considère des polynômes sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. Ainsi, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à une indéterminée X une expression de la forme*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n \,,$$

où n est un entier et où les coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Notation 4.2. *On pose $X^0 := 1$. On a ainsi $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.*

Définition 4.3. *Si le polynôme P est différent de 0 (c'est-à-dire s'il y a au moins un coefficient non nul), on appelle degré de P le plus grand n tel que $a_n \neq 0$; ce a_n étant alors le coefficient dominant. Le degré de P se note* $\deg(P)$*. Par convention,* $\deg(0) := -\infty$*.*

Notation 4.4. *L'ensemble des polynômes à une indéterminée X dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes à une indéterminée X dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.*

Définition 4.5. *On procède à la somme de deux polynômes, au produit par un scalaire d'un polynôme et au produit de deux polynômes comme s'il s'agissait d'expressions algébriques classiques.*

Définition 4.6 (Dérivation formelle)**.** *On pose $(X^n)' := nX^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Et, $(X^0)' = 0$. On étend ensuite par linéarité en posant*

$$P'(X) := \sum_{n \geq 1} n a_n X^{n-1} \,,$$

si $P(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ où seuls un nombre fini de coefficients a_n sont non nuls.

Proposition 4.7. *Soient P et Q deux élements de $\mathbb{K}[X]$. Alors : $(PQ)' = P'Q + PQ'$.*

Théorème 4.8 (Formule de Taylor)**.** *Soient $x_0 \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ avec* $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$*. On a alors :*

$$P(X + x_0) = P(x_0) + P'(x_0)X + \frac{P''(x_0)}{2!} X^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} X^n \,.$$

Définition 4.9. *Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On, dit que Q divise P s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$.*

Remarque 4.10. *On ne note pas $R = \frac{P}{Q}$ vu que ce n'est pas forcément un polynôme.*

Définition 4.11. *On dit que deux polynômes P et Q sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseurs communs de degré supérieur ou égal à 1.*

Théorème 4.12 (Division euclidienne)**.** *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe deux polynômes Q et R tels que*

- $A = BQ + R$.
- $\deg(R) < \deg(B)$.

De plus, ainsi définis, les polynômes Q et R sont uniques. Le polynôme Q est le quotient de la division de A par B et le polynôme R s'appelle le reste de la division de A par B.

Définition 4.13 (racine)**.** *Soient* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$*. Alors* a *est une racine de* P *si* $P(a) = 0$*.*

Proposition 4.14. *Soient* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$*. Alors* $X - a$ *divise* P *si et seulement si* a *est une racine de* P*.*

Définition 4.15. *Si* a *est une racine de* P*, on appelle multiplicité de* a *le plus grand entier* $n \geq 1$ *tel que* $(X-a)^n$ *divise* P*. On dit alors que* a *est une racine d'ordre* n *de* P*.*

Théorème 4.16. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$*. Alors* $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ *sont les racines de* P *d'ordres respectifs supérieurs à* $m_1, m_2, \cdots, m_r$ *si et seulement si*

$$(X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2}\cdots(X-a_r)^{m_r}$$

divise P*.*

Corollaire 4.17. *Si* P *est un polynôme non constant de* $\mathbb{R}[X]$*, on peut écrire :*

$$P(X) = \lambda\left(\prod_{k=1}^{r}(X-x_k)^{\alpha_k}\right)\times\left(\prod_{\ell=1}^{s}\left(X - 2\mathrm{Re}(z_\ell) + |z_\ell|^2\right)^{\beta_\ell}\right),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $x_1, \cdots, x_r \in \mathbb{R}$*,* $z_1, \cdots, z_s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*,* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ *et* $\beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathbb{N}^*$*.*

5 Fractions rationnelles

Définition 5.1. *Une fraction rationnelle* F *sur* $\mathbb{K}$ *s'écrit* $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ *où* P *et* Q *sont deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *avec* $Q \neq 0$*.*

Définition 5.2. *L'ensemble des fractions rationnelles se note* $\mathbb{K}(X)$*.*

Définition 5.3. *Si* $F = \frac{P}{Q}$*, alors* $\frac{P}{Q}$ *est appelé* **un** *représentant de* F*.*

Définition 5.4. *Si* $F \in \mathbb{K}(X)$ *est telle que* $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ *où* $Q \neq 0$ *et où* P *est premier avec* Q*, alors le couple* (P, Q) *est unique à une constante (dans* $\mathbb{K}$*) multiplicative non nulle près. Dans ce cas, on dit que* $\frac{P}{Q}$ *est un représentant irréductible de* F*.*

Définition 5.5. *Soient* $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ *et* $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ *deux éléments dans* $\mathbb{K}(X)$*. On pose*

$$F_1 + F_2 := \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2},$$

et

$$F_1 \times F_2 := \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

Enfin, si $\lambda \in \mathbb{K}$*, alors* $\lambda F_1 := \frac{\lambda P_1}{Q_1}$*.*

Définition 5.6. *Soit une fraction rationnelle* $F(X) := \frac{P(X)}{Q(X)}$*. Si* $F \neq 0$*, on appelle degré de* F *le nombre entier défini par*

$$\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q).$$

Et, si $F = 0$*, on pose* $\deg(F) := -\infty$*.*

Définition 5.7 (Zéro)**.** *Soit* $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$*. On suppose que* $\frac{P}{Q}$ *est un représentant* irréductible. *Alors toute racine du numérateur* P *est un zéro.*

Définition 5.8 (Pôle)**.** *Soit* $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$*. On suppose que* $\frac{P}{Q}$ *est un représentant* irréductible. *Alors toute racine du dénominateur* Q *est un pôle.*

Théorème 5.9 (Formule générale de la décomposition en éléments simples)**.** *Soit* $F \in \mathbb{R}(X)$ *et* $x_1, \cdots, x_r$ *les pôles réels de* F *d'ordres respectifs* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$*. Soient* $z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s}$ *les pôles* complexes non réels *de* F *d'ordres respectifs* $\beta_1, \cdots, \beta_s$*.* F *s'écrit alors de manière unique*

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{\ell=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_\ell} \frac{B_{\ell,j} X + C_{\ell,j}}{(X^2 - 2\mathrm{deg}(z_\ell) X + |z_\ell|^2)^j} \right) ,$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ *est la partie entière de* F*,* $A_{k,j} \in \mathbb{R}$ *pour tout* $k \in [\![1; r]\!]$ *et* $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$*,* $B_{\ell,j}, C_{\ell,j} \in \mathbb{R}$ *pour tout* $\ell \in [\![1; s]\!]$ *et* $j \in [\![1; \beta_\ell]\!]$*.*

En pratique, on regarde d'abord les pôles simples réels. On suppose que $Q(X) = (X - x_1)\widetilde{Q}(X)$ où x_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que x_1 est racine simple de Q. Alors :

$$F(X) = \frac{A}{X - x_1} + \xi(X) ,$$

où ξ est une fraction rationnelle qui n'admet pas de pôle en x_1. Puis, en multipliant par $X - x_1$, il vient

$$A = \lim_{x \to x_1} \frac{P(x_1)}{\widetilde{Q}(x_1)} .$$

On fait de même dans le cas des pôles simples complexes. On suppose que $Q(X) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2)\, \widetilde{Q}(X)$ où z_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que z_1 et $\overline{z_1}$ sont des racines simples de Q. On a alors :

$$B z_1 + C = \lim_{z \to z_1} \frac{P(z_1)}{\widetilde{Q}(z_1)} .$$

Comme $(1, z_1)$ est une base de $\mathbb{C}$, on en déduit B et C.

Dans le cas des pôles multiples réels, on utilise la même méthode avec le degré le plus élevé. Puis on retranche ensuite $\frac{A_{\alpha_1}}{(X - x_1)^{\alpha_1}}$ à $F(X)$, on retrouve une fraction rationnelle sous forme irréductible puis on recommence jusqu'à avoir épuisé entièrement la multiplicité de x_1. On fait de même avec les pôles complexes.

Pour gagner du temps, on peut aussi utiliser l'infini. Ainsi, si le degré de F est négatif strictement, on multiplie par X, on fait tendre X vers l'infini puis l'on en déduit

$$\sum_{k=1}^{r} A_{k,1} + \sum_{\ell=1}^{s} B_{\ell,1} = \lim_{x \to \infty} x F(x) .$$

6 Matrices

6.1 Définitions

Une matrice est un tableau de nombres dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 6.1. *Soient n et p deux entiers strictement positifs. Un tableau rectangulaire ayant n lignes et p colonnes et constitué d'éléments de $\mathbb{K}$ est appelé une matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Notation 6.2. *On utilisera les notations suivantes :*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad ou \quad (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad ou \quad (a_{i,j})_{i,j} \, .$$

Les $a_{i,j}$ s'appellent les coefficients de la matrice. Étant donné un coefficient, le premier indice est celui de la ligne tandis que le second est celui de la colonne. Ainsi, le coefficient $a_{k,\ell}$ se trouve à l'intersection de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne.

Définition 6.3. *L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Définition 6.4. *Une matrice telle que $n = p$ est appelée une matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées se note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Définition 6.5. *Les coefficients $a_{i,i}$ d'une matrice carrée s'appellent les coefficients diagonaux.*

Définition 6.6. *Une matrice carrée dont les coefficients non diagonaux sont nuls est appelée une matrice diagonale.*

Définition 6.7. *Une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée une matrice ligne tandis qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée une matrice colonne.*

Définition 6.8. *La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée* matrice nulle. *On la note $0_{\mathcal{M}_{n,p}}$, voire 0 s'il n'y a pas de confusion.*

Définition 6.9. *La matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée* matrice identité. *La matrice identité de taille n est notée I_n.*

6.2 Règles de calcul

D'abord, la somme de deux matrices se fait terme à terme ; ce qui suppose qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Le produit de $\lambda \in \mathbb{K}$ et de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $B := \lambda A$ où $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ pour tout i, j.

Définition 6.10 (Produit de deux matrices)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le produit de A par B, que l'on note AB est défini comme étant la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que $c_{i,j} := \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$, $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; q]\!]$.*

6.3 Inverse d'une matrice

Définition 6.11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. L'inverse B est unique et on le note A^{-1}.*

Proposition 6.12. *Pour toute matrice inversible A, on a $(A^{-1})^{-1} = A$. Si A et B sont deux matrices inversibles et de même taille n, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Proposition 6.13. *Soit D une matrice diagonale de taille n. On suppose que chacun des coefficients diagonaux $d_{i,i}$ est non nul. Alors D est inversible et son inverse est D^{-1} la matrice diagonale dont le i-ème coefficient diagonal est $\frac{1}{d_{i,i}}$.*

6.4 Transposée d'une matrice

Définition 6.14. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, on appelle transposée de A et on note A^T la matrice définie comme suit*

$$A^T = (a_{j,i})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq i\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) .$$

Proposition 6.15. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $(A^T)^T = A$.*

Proposition 6.16. *Soient deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $(A + B)^T = A^T + B^T$ et $(\alpha A)^T = \alpha A^T$. Soient aussi $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(CD)^T = D^T C^T$. De fait, on a $(C^T)^{-1} = (C^{-1})^T$.*

7 Étude de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Un élément de $\mathbb{R}^n$ est appelé vecteur de $\mathbb{R}^n$. Quand un ensemble a une structure, on regarde les sous-ensembles avec des structures similaires.

7.1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition 7.1. *Un sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que*

- *Pour tout $u, v \in \mathbb{E}$, on a $u + v \in \mathbb{E}$.*
- *Pour tout $u \in \mathbb{E}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha u \in \mathbb{E}$.*
- *Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ est un élément de $\mathbb{E}$.*

En d'autres termes, l'ensemble $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ s'il est stable par l'addition, par la multiplication par tout réel et s'il contient le vecteur nul.

Définition 7.2. *Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$, alors on dit aussi que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.*

7.2 Combinaison linéaire

Définition 7.3. *Soient $v_1, \cdots, v_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire des v_i, $i \in [\![1;k]\!]$ tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ s'écrivant $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1;k]\!]$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $\{v_1, \cdots, v_k\}$ est noté* $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)$. *Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 7.4. *La famille de vecteurs* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est dite liée (ou linéairement dépendante) s'il existe des réels* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ *non tous nuls tels que* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$. *Une famille qui n'est pas liée est dite libre c'est-à-dire que* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est libre si l'égalité* $\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ *implique* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

7.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Proposition 7.5. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$. *Alors* $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ *est aussi un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Il est **essentiel** de bien comprendre que ce qui est vrai pour l'intersection ne l'est pas pour la réunion.

Définition 7.6. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$. *On définit la somme de* $\mathbb{E}$ *et de* $\mathbb{F}$ *comme étant* $\mathbb{E} + \mathbb{F} := \{e + f \ : \ e \in \mathbb{E}, f \in \mathbb{F}\}$. *Cet ensemble* $\mathbb{E} + \mathbb{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Définition 7.7 (Produit cartésien). *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$. *On définit le produit de* $\mathbb{E}$ *et de* $\mathbb{F}$ *comme étant* $\mathbb{E} \times \mathbb{F} := \{(e, f) \ : \ e \in \mathbb{E}, f \in \mathbb{F}\}$. *C'est alors un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{2n}$

7.4 Supplémentaire

Définition 7.8. *Soit* $\mathbb{F}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *Soient* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{E}$. *On dit que* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{E}$ *si tout vecteur de* $\mathbb{E}$ *s'écrit de manière unique comme étant la somme d'un vecteur de* $\mathbb{F}$ *et d'un vecteur de* $\mathbb{G}$. *On écrit alors* $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

Proposition 7.9. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{E}$. *Alors,* $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ *si et seulement si*

- $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{G}$.
- $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Remarque 7.10. *Il n'y a pas unicité du supplémentaire.*

7.5 Bases, dimension

Définition 7.11. *Soit* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *une famille de* k *vecteurs de* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *On dit que* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est génératrice de* $\mathbb{E}$ *si l'on a* $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\,(v_1, \cdots, v_k)$.

Définition 7.12. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *Alors, on dit que la famille* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *est une base de* $\mathbb{E}$ *si elle est libre* **et** *si elle est génératrice de* $\mathbb{E}$.

Proposition 7.13. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $\{v_1, \cdots, v_k\}$ *une base de* $\mathbb{E}$. *Tout vecteur* $v \in \mathbb{E}$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base* $\{v_1, \cdots, v_k\}$.

Théorème 7.14. *Toutes les bases d'un même sous-espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la dimension de* $\mathbb{E}$. *La dimension de* $\mathbb{E}$ *est notée* $\dim \mathbb{E}$ *et par convention, on pose* $\dim \{0_{\mathbb{R}^n}\} = 0$.

Proposition 7.15. *Soit* $\mathbb{E}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* k*. on dispose des deux propriétés admises suivantes :*

- *Si les vecteurs* $e_1, \cdots, e_\ell$ *forment une famille libre, alors* $\ell \leq k$*. Si de plus* $\ell = k$*, ils forment une base.*
- *Si les vecteurs* $f_1, \cdots, f_p$ *forment une famille génératrice de* $\mathbb{E}$*, alors* $p \geq k$*. Si de plus* $p = k$*, ils forment une base.*

Corollaire 7.16. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$*. Si* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$*, alors* $\mathbb{E} = \mathbb{F}$*.*

Proposition 7.17. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$*. Alors :*

$$\dim \mathbb{E} + \mathbb{F} = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F} - \dim \mathbb{E} \cap \mathbb{F}\,.$$

Notamment, si $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont supplémentaires,* $\dim \mathbb{E} \oplus \mathbb{F} = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F}$*.*

8 Espaces vectoriels

Définition 8.1. *Un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel est un ensemble* $\mathbb{E}$ *muni de deux opérations :*

$$\begin{array}{ccc} + & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \\ . & : & \mathbb{R} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- *Pour tous* $x, y, z \in \mathbb{E}$ *:* $x + y = y + x$ *et* $x + (y + z) = (x + y) + z$*.*
- *Il existe* $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ *tel que* $x + 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}} + x = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{E}$*.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{E}$*, il existe* $y \in \mathbb{E}$ *tel que* $x + y = y + x = 0_{\mathbb{E}}$*.*
- *Pour tous les éléments* x *et* y *de* $\mathbb{E}$ *et pour tous les scalaires* α *et* β *de* $\mathbb{R}$*, on dispose de* $1.x = x$*,* $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$*,* $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ *et* $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$*.*

Définition 8.2. *Les éléments de* $\mathbb{E}$ *sont appelés des vecteurs.*

Notation 8.3. *On écrit* $\alpha.x =: \alpha x$ *pour simplifier et s'il n'y a pas d'ambiguïté, on posera* $0 := 0_{\mathbb{E}}$*. De plus, si* x *et* y *sont deux vecteurs tels que* $x + y = 0$*, on notera* $-x := y$*.*

8.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Tout ce qui a été vu dans la section précédente s'étend aux espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire aux espaces vectoriels admettant une base de cardinal fini.

Ainsi, bien que les vecteurs d'un espace vectoriel abstrait de dimension finie ne soient pas des éléments dans lesquels les calculs sont *a priori* simples, dès que l'on connaît une base, tout se passe comme si l'on était dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

On fait les calculs avec les coordonnées des vecteurs en les mettant dans des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$.

8.2 Espaces vectoriels de dimension infinie

Remarque 8.4. *On peut étendre à peu près toutes les notions vues précédemment mais il convient de noter qu'une combinaison linéaire d'une famille* $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *est un vecteur de la forme* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ *où seuls un* **nombre fini** *de coefficients* α_i *sont non nuls.*

Définition 8.5. *On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de* $\mathbb{E}$*. Si tel n'est pas le cas, on dit que* $\mathbb{E}$ *est de dimension infinie.*

Théorème 8.6. *Tout espace vectoriel admet une base.*

9 Applications linéaires

Nous avons vu que les éléments des espaces vectoriels pouvaient être additionnés entre eux ainsi que multipliés par des éléments de $\mathbb{R}$. Il est ainsi logique de s'intéresser à des applications qui sont compatibles avec ces opérations.

Définition 9.1. *Soient deux espaces vectoriels :* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$*. Soit une application* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$*. On dit que* f *est linéaire si pour tous les éléments* x *et* y *de* $\mathbb{E}$ *et si pour tous les éléments* α *et* β *de* $\mathbb{R}$*, on a* $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$*.*

Remarque 9.2. *Si* f *est une application linéaire d'un espace vectoriel* $\mathbb{E}$ *dans un espace vectoriel* $\mathbb{F}$*, alors* $f(0_{\mathbb{E}})=0_{\mathbb{F}}$*.*

Proposition 9.3. *Soit* A *une matrice* $m\times n$ *à coefficients réels. Alors, l'application* T_A *définie par*

$$\begin{aligned} T_A \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & x \mapsto T_A(x) := Ax\,, \end{aligned}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$*.*

Théorème 9.4. *Soient* $m,n\in\mathbb{N}^*$*. Soit* f *une application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$*. Alors, il existe* $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que* $f=T_A$*.*

Remarque 9.5. *Comme il y a une correspondance bijective entre tout espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathbb{R}^n$*, et de même entre tout espace vectoriel de dimension* m *et* $\mathbb{R}^m$*, le théorème précédent s'étend aux applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie quelconque dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque.*

9.1 Quelques exemples d'applications linéaires

9.1.1 L'identité

On se donne la matrice I_n. Alors l'application T_{I_n} de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application linéaire. D'ailleurs, on a même $T_{I_n}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ avec $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x):=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

9.1.2 Les homothéties

On se donne $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, l'application $T_{\lambda I_n}$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application linéaire. Il s'agit de $\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

9.1.3 Les projections

Soit un espace vectoriel $\mathbb{E}$. Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

On introduit la projection ρ de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$ comme étant l'application qui à $x = f + g$ (où $f \in \mathbb{F}$ et $g \in \mathbb{G}$ sont uniques) associe f. Alors, la projection est une application linéaire et on remarque $\rho(\rho(x)) = \rho(x)$ (ou $\rho^2 = \rho$).

Remarque 9.6. *La notion de projection intervient naturellement dans les probabilités. Ainsi, l'application qui à une variable aléatoire réelle X associe son espérance est une application linéaire de type projection. En effet, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$.*

9.1.4 Les symétries

Avec les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent, on pose $\sigma(f + g) = f - g$. Alors, la symétrie est une application linéaire. On remarque par ailleurs $\sigma(\sigma(x)) = x$.

9.2 Vocabulaire

Définition 9.7. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels (non nécessairement de dimensions finies). L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

Définition 9.8. *Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ est un endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{E}$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.*

Définition 9.9. *Une application linéaire bijective de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est appelée un isomorphisme.*

Définition 9.10 (Noyau et Image)**.** *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels. Soit une application linéaire f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. On définit le noyau de f comme étant l'ensemble des éléments de $x \in \mathbb{E}$ tels que $f(x) = 0_{\mathbb{F}}$. Le noyau est noté $\mathrm{Ker}(f)$. On définit l'image de f comme étant l'ensemble des éléments $f(x) \in \mathbb{F}$ où $x \in \mathbb{E}$. L'image est notés $\mathrm{Im}(f)$.*

Remarque 9.11. *On peut prouver facilement que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ tandis que $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.*

Définition 9.12. *On définit le rang d'une application linéaire comme étant la dimension de son image : $\mathrm{rg}(f) := \dim \mathrm{Im}(f)$. Et, on définit le rang d'une matrice A comme étant le rang de l'endomorphisme associé T_A.*

9.3 Propriétés des applications linéaires

Proposition 9.13. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels. Soit une application linéaire f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Alors f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.*

Proposition 9.14. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels. Soit une application linéaire f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Si $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_p\}$ est une base de $\mathbb{E}$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \cdots, f(e_p))$.*

Corollaire 9.15. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels. Soit une application linéaire f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Si $\dim \mathbb{E} < \infty$, alors $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathbb{E} < \infty$.*

Théorème 9.16 (Théorème du rang). *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *Alors, si* $\dim \mathbb{E} < \infty$, *nous avons l'égalité*

$$\dim \mathbb{E} = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)\,.$$

Définition 9.17. *On dit que deux espaces vectoriels* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *sont isomorphes s'il existe un isomorphisme* φ *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$.

Corollaire 9.18. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors, ils sont isomorphes si et seulement si* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$.

Proposition 9.19. *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces vectoriels. Soit une application linéaire* f *de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{F}$. *On suppose* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F} < \infty$. *Alors* f *est un isomorphisme si et seulement si la matrice* A *qui lui est associée relativement à une base* $\mathcal{B}_{\mathbb{E}}$ *de* $\mathbb{E}$ *et à une base* $\mathcal{B}_{\mathbb{F}}$ *de* $\mathbb{F}$ *est inversible. De plus, l'application réciproque* f^{-1} *est linéaire de matrice associée* A^{-1}, *pour les mêmes bases.*

9.4 Formes linéaires

Définition 9.20. *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace vectoriel. Si* f *est une application linéaire de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on dit que* f *est une forme linéaire sur* $\mathbb{E}$.

Cette notion est cruciale en théorie des distributions, une distribution n'étant rien d'autre qu'une forme linéaire continue sur un espace vectoriel particulier.

Proposition 9.21. *L'espace des formes linéaires sur* $\mathbb{E}$ *est isomorphe à* $\mathbb{E}$ *lorsque* $\mathbb{E}$ *est de dimension finie.*

Dans les cours de traitement du signal en école d'ingénieurs, vous étudierez le dual de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Vous aurez également l'occasion de travailler sur le dual des fonctions à décroissance rapide.

9.5 Espaces affines

Un espace affine est un ensemble $\mathcal{S}$ tel qu'il existe un espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ qui vérifie $x - y \in \mathcal{S}_0$ pour tout $x, y \in \mathcal{S}$. On le notera par exemple $x_0 + \mathcal{S}_0$ où x_0 est n'importe quel élément de $\mathcal{S}$.

10 Déterminant

10.1 Point de vue théorique

Notation 10.1. *Le déterminant d'une matrice* A *est noté* $\mathrm{Dét}(A)$.

On admet $\mathrm{Dét}(A) = \mathrm{Dét}(A^T)$.

Théorème 10.2. *Soient deux matrices* A *et* B *de taille* $n \times n$. *Alors :*

$$\mathrm{Dét}(AB) = \mathrm{Dét}(BA) = \mathrm{Dét}(A)\mathrm{Dét}(B)\,.$$

Théorème 10.3. *La matrice* A *est inversible si et seulement si* $\mathrm{Dét}(A) \neq 0$.

Définition 10.4. *Deux matrices A et A' de taille $n \times n$ sont semblables s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et telle que $A' = PAP^{-1}$.*

Remarque 10.5. *Deux matrices semblables ont même déterminant.*

Proposition 10.6. *Soit un endomorphisme f de $\mathbb{E}$ avec $\dim \mathbb{E} = n$. Alors, si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et si A' est celle de f dans une autre base $\mathcal{B}'$, on en déduit que A et A' sont semblables. Alors le déterminant de la matrice associée ne dépend pas de la base choisie. Ce déterminant commun sera appelé le déterminant de l'endomorphisme.*

Comment calculer un déterminant ?

$$\text{Dét}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \,. \tag{7}$$

Cette formule a un intérêt particulier : elle montre qu'il y a une somme de $n!$ termes pour obtenir le déterminant. En effet, le cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments, $\mathcal{S}_n$, est $n!$. Ici, $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

10.2 Point de vue pratique

La formule calculatoire (7) n'est pas pratique à mettre en œuvre. On procède donc autrement en situation réelle.

Soit $a \in \mathbb{K}$. On pose $A := (a)$ la matrice de taille 1×1. Alors, $\text{Dét}\, A = a$.

Notation 10.7. *En dimension supérieure ou égale à 2, on écrit*

$$\text{Dét} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{vmatrix} .$$

Soient a, b, c, d quatre éléments de $\mathbb{K}$. On a alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

La méthode de Sarrus permet de calculer simplement et à coup sûr le déterminant d'une matrice de taille 3×3.

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} .$

On réécrit les lignes L_1 et L_2 en dessous de la ligne L_3. Puis on somme les trois diagonales qui ont la forme \ avant de retrancher les trois diagonales qui ont la forme /.

Remarque 10.8. *Il est important de préciser que la méthode de Sarrus ne fonctionne qu'en dimension trois et jamais en dimension supérieure ou égale à 4.*

10.3 Calcul pour une matrice de taille quelconque

10.3.1 Si la matrice est diagonale ou triangulaire

Le déterminant d'une matrice diagonale (ou triangulaire) est le produit de ses éléments diagonaux.

10.3.2 Opérations élémentaires sur les lignes

On se sert ici du caractère alterné du déterminant ainsi que de sa linéarité.

En effet, si on prend i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$ ainsi que n vecteurs $V_1 \cdots V_n$ de $\mathbb{R}^n$, alors quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}&\text{Dét}\,(V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_i} + \lambda \mathbf{V_j}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_j}, V_{j+1}, \cdots, V_n) \\ &= \text{Dét}\,(V_1, \cdots, V_{i-1}, \mathbf{V_i}, V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}, \mathbf{V_j}, V_{j+1}, \cdots, V_n)\,.\end{aligned}$$

Les recommandations faites pour les opérations sur les lignes et les colonnes sont les mêmes que celles faites pour le pivot de Gauss, voir la page 28.

On peut également permuter les lignes et les colonnes mais en n'oubliant pas de multiplier par -1 à chaque fois qu'on échange deux lignes (ou deux colonnes). Grâce à la linéarité du déterminant sur chacun des n vecteurs, on peut aussi factoriser.

Remarque 10.9. *Il est important de ne pas oublier que l'on a* $\text{Dét}\,(\lambda \times A) = \lambda^n \text{Dét}\,(A)$.

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice permettent avant tout de simplifier. C'est pourquoi son utilisation se doit d'être judicieuse. De manière générale, le but est d'avoir le plus de 0 possible.

10.3.3 Développement par rapport à une ligne

Soit une matrice A de taille $n \geq 2$ dont les coefficients sont $a_{i,j}$ (ligne i et colonne j). Définissons maintenant la matrice $\tilde{A}^{i,j}$ comme étant la matrice obtenue si l'on retire la ligne i et la colonne j. Alors, on dispose de la formule :

$$\text{Dét}\,(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \text{Dét}\,(\tilde{A}^{i,j})\,.$$

Cette méthode fonctionne en toute dimension.

11 Systèmes linéaires

Le problème est le suivant. On se donne une matrice A à n lignes et à p colonnes ainsi qu'une matrice B à n lignes et à une colonne et l'on cherche à résoudre l'équation linéaire

$$AX = B\,,$$

où X est un vecteur colonne à p lignes de la forme $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix}^T$.

On cherche tous les vecteurs colonnes qui satisfont l'égalité $AX = B$. En d'autres termes, on considère un système de n équations à p inconnues et chaque équation est linéaire en chacune des p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Ce système est linéaire car chaque équation est de la forme $ax + by + cz + dt = e$ (si $p = 4$). En particulier, il ne figure ni produit, ni puissance des inconnues.

On va ici décrire une méthode systématique et rapide de résolution de ce type de systèmes : le pivot de Gauss. En effet, il faut éviter la méthode de la substitution dès que le nombre d'équations et d'inconnues dépasse trois.

11.1 Approche de la méthode du pivot

Pour appréhender la méthode, on va l'illustrer avec l'exemple $(\mathcal{S}_0)$:

$$(\mathcal{S}_0)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 4 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & 8 \end{array}\right. .$$

On commence par numéroter les équations de 1 à 4 et pour améliorer le confort de la lecture, on présente comme suit. On forme le tableau des coefficients du système, en séparant les coefficients du second membre par une ligne verticale :

$$\begin{array}{cccc|cl} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (E_1) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & (E_2) \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 4 & (E_3) \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 8 & (E_4) \end{array}$$

On choisit le premier élément de la première ligne (qu'on encadre), appelé *premier pivot*. On conserve la ligne correspondante (ici, la première) et on soustrait à chacune des autres le multiple adéquat de la première de manière à annuler le coefficient dans la première colonne. Ainsi, on obtient le tableau

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & (E_1') := (E_1) \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & (E_2') := (E_2) - (E_1) \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 4 & (E_3') := (E_3) - (E_1) \\ 0 & 7 & 26 & 63 & 8 & (E_4') := (E_4) - (E_1) \end{array}$$

On choisit alors un deuxième pivot, à savoir l'élément à la deuxième colonne et à la deuxième ligne, qu'on encadre. Puis, on élimine les coefficients de cette colonne dans les trois autres lignes, comme précédemment. Pour ne pas oublier qu'on a déjà utilisé un pivot dans la première ligne, on laisse l'encadrement autour du premier élément de la première ligne. On obtient alors

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -2 & (E_1'') := (E_1') - (E_2') \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 2 & (E_2'') := (E_2') \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 & (E_3'') := (E_3') - 3 \times (E_2') \\ 0 & 0 & 12 & 42 & -6 & (E_4'') := (E_4') - 7 \times (E_2') \end{array}$$

On choisit maintenant le troisième élément de la troisième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -3 & (E_1''') := (E_1'') + \frac{1}{2}(E_3'') \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 4 & (E_2''') := (E_2'') - (E_3'') \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 6 & -2 & (E_3''') := (E_3'') \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & (E_4''') := (E_4'') - 6 \times (E_3'') \end{array}$$

Enfin, on choisit le quatrième élément de la quatrième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -4 & (E_1'''') := (E_1''') - \frac{1}{6}(E_4''') \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 7 & (E_2'''') := (E_2''') + \frac{1}{2}(E_4''') \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -8 & (E_3'''') := (E_3''') - (E_4''') \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 6 & (E_4'''') := (E_4''') \end{array}$$

La réduction du tableau est achevée (on ne peut plus choisir de nouveau pivot). On peut alors réécrire le système transformé correspondant :

$$(\mathcal{S}_4)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccl} x & & & & = & -4 & (E_1'''') \\ & y & & & = & 7 & (E_2'''') \\ & & 2z & & = & -8 & (E_3'''') \\ & & & 6t & = & 6 & (E_4'''') \end{array}\right. ,$$

et l'on termine facilement la résolution du système.

Remarque 11.1. *Dans cet exemple, on a pris tous les pivots sur la diagonale et dans l'ordre. Ce n'est pas toujours le cas.*

11.2 Règles de choix des pivots

Règle un : Ils sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical dans le tableau.
Règle deux : Un pivot maximum par ligne et par colonne.
Règle trois : Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

Dans le respect de ces règles, tous les choix sont possibles, et il y a donc de multiples variantes suivant le choix des pivots. Si l'on cherche une résolution exacte (comme c'est le cas ici, on choisit généralement les pivots les plus simples possibles). Au contraire, en analyse numérique où les calculs sont approchés, on prend les pivots les plus grands possibles (en valeur absolue). La réduction du tableau des coefficients est terminée lorsqu'on ne peut plus choisir un nouveau pivot en respectant les règles ci-dessus.

11.3 Remarques finales

Les équations correspondant aux lignes où figure un pivot sont appelées "équations principales". Les autres, celles correspondant aux lignes où ne figure pas de pivot sont appelées "équations auxiliaires". Symétriquement, les inconnues correspondant aux colonnes où figure un pivot sont appelées "inconnues principales" et les autres sont appelées "inconnues auxiliaires".

Ce sont les équations auxiliaires qui servent pour discuter de l'existence de solutions. Ces équations n'ont que des 0 dans la partie gauche du tableau. Si le terme de droite est nul dans une équation auxiliaire, l'équation peut être supprimée.

Si le terme est non nul, le système n'admet tout simplement pas de solution.

11.4 Comment inverser une matrice ?

On peut aussi utiliser le pivot de Gauss pour inverser les matrices carrées quand elles sont inversibles. Pour ce faire, on utilise la même méthode mais, à droite du trait vertical, on met la matrice identité. Ensuite, on fait subir à la matrice à droite du trait vertical les mêmes transformations que celles que l'on applique à la matrice à gauche. Quand la matrice à gauche est devenue l'identité alors la matrice de droite est l'inverse de la matrice initiale.

12 Formes quadratiques

On se place sur $\mathbb{R}$.

12.1 Définitions

Définition 12.1 (Forme bilinéaire symétrique)**.** *Une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est une application de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- *B est symétrique : $B(x,y) = B(y,x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{E}$.*
- *B est linéaire à droite : $B(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda B(x, y_1) + B(x, y_2)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $y_1, y_2, x \in \mathbb{E}$.*
- *B est linéaire à gauche : $B(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + B(x_2, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $x_1, x_2, y \in \mathbb{E}$.*

Définition 12.2 (Formes quadratiques)**.** *À toute forme bilinéaire symétrique B, on peut associer une forme quadratique q de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q(x) := B(x,x)$.*

Remarque 12.3. *La forme bilinéaire symétrique B dont la forme quadratique q est issue est unique. Si q est une forme quadratique issue de B, on dit que B est la forme polaire de q.*

Définition 12.4. *Soit B une forme bilinéaire symétrique B sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$. On dit que B est positive si pour tout $x \in \mathbb{E}$, $q(x) = B(x,x) \geq 0$.*

Proposition 12.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si B est une forme bilinéaire symétrique positive, alors pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, on a*

$$B(x,y)^2 \leq q(x)q(y)\,.$$

Définition 12.6. *On dit que la forme bilinéaire symétrique B sur $\mathbb{E}$ associée à la forme quadratique q est définie positive si $B(x,x) = q(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{E}$ avec $x \neq 0$.*

Remarque 12.7. *La covariance (sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$) n'est pas définie positive mais elle est positive.*

12.2 Espaces Euclidiens

Définition 12.8. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $\mathbb{E}$ toute application φ de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ avec $\varphi(x,y) = \langle x; y\rangle$ telle que*

- *φ est symétrique : $\langle x; y\rangle = \langle y; x\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{E}$.*
- *φ est bilinéaire : $\langle \lambda x_1 + x_2; y\rangle = \lambda \langle x_1; y\rangle + \langle x_2; y\rangle$ et $\langle x; \lambda y_1 + y_2\rangle = \lambda \langle x; y_1\rangle + \langle x; y_2\rangle$ pour tous $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *φ est définie positive : $\langle x; x\rangle \geq 0$. De plus, $\langle x; x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Ainsi, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 12.9. *On note $||x|| := \sqrt{\langle x; x\rangle}$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.*

Définition 12.10. *L'espace vectoriel $\mathbb{E}$ muni du produit scalaire φ est appelé un espace préhilbertien réel.*

On peut remarquer que l'application $x \mapsto ||x||$ est bien une norme sur $\mathbb{E}$. Enfin, la norme se déduit du produit scalaire et réciproquement :

$$\langle x; y\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)\,.$$

Définition 12.11. *Un vecteur x de $\mathbb{E}$ est dit unitaire si $||x|| = 1$. Deux vecteurs x et y de $\mathbb{E}$ sont orthogonaux si $\langle x; y\rangle = 0$. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $\mathbb{E}$ est dite orthogonale si pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a $\langle x_i; x_j\rangle = 0$*

Proposition 12.12. *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Proposition 12.13. *Pour toute famille orthogonale $(x_i)_{i\in I}$, on a la relation de Pythagore :*

$$\left|\left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_p}\right|\right|^2 = \left|\left|x_{i_1}\right|\right|^2 + \cdots + \left|\left|x_{i_p}\right|\right|^2 \ .$$

Définition 12.14. *La famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires.*

Remarque 12.15. *Toute famille orthonormale est libre. Mais, elle n'est pas forcément une base.*

Définition 12.16. *Deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ de l'espace préhilbertien réel $\mathbb{E}$ sont dits orthogonaux si pour tout $(x, y) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G}$, $\langle x; y\rangle = 0$.*

Remarque 12.17. *Si les espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont orthogonaux, $\mathbb{F} \bigcap \mathbb{G} = \{0\}$.*

Définition 12.18. *Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. L'orthogonal de $\mathbb{F}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ défini par $\mathbb{F}^\perp := \{y \in \mathbb{E} \ : \ \forall x \in \mathbb{F}\,, \langle x; y\rangle = 0\}$.*

Remarque 12.19. *En dimension infinie, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\perp$ ne sont pas forcément supplémentaires.*

Définition 12.20. *Deux sous-espaces vectoriel $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont dits supplémentaires orthogonaux si $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ et $\mathbb{G} = \mathbb{F}^\perp$.*

Définition 12.21. *Un espace euclidien est un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension finie.*

Théorème 12.22. *Soit un espace euclidien $\mathbb{E}$. Alors, toute forme linéaire f sur $\mathbb{E}$ peut être représentée de manière unique comme suit :*

$$f(x) = \langle x; a\rangle \ ,$$

où $a \in \mathbb{E}$.

Remarque 12.23. *On en déduit qu'il existe un isomorphisme canonique entre $\mathbb{E}$ et son dual (le dual de $\mathbb{E}$ étant l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{E}$).*

Théorème 12.24. *Soit $\mathbb{E}$ un espace préhilbertien réel de dimension finie ou infinie. Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension* finie. *Alors, l'orthogonal de $\mathbb{F}$, noté $\mathbb{F}^\perp$ est un supplémentaire de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$. On en déduit que tout élément x de $\mathbb{E}$ admet un projeté orthogonal $p_\mathbb{F}(x)$ sur $\mathbb{F}$. Et, si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{F}$, alors $p_\mathbb{F}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x; e_i\rangle\, e_i$.*

Il convient de comprendre que ceci est à la base des séries de Fourier (dans le cas d'une décomposition à l'aide de sinus et de cosinus).

12.3 Espaces Hermitiens

Ici, le corps de base est $\mathbb{C}$. Tout est similaire au cas réel à la différence que la linéarité à droite devient une semi-linéarité : $B(x, \lambda y) = \lambda^* B(x, y)$. On peut ici penser à la fonction d'auto-corrélation pour des signaux complexes, voir le cours de Signaux Discrets et Aléatoires. On parlera ici d'espaces préhilbertiens complexes, lesquels deviennent des espaces vectoriels hermitiens s'ils sont de dimension finie.

13 Suites numériques

Nous commençons par quelques rappels fondamentaux. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, celui des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et celui des rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Enfin, l'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque 13.1. *On a* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On parlera aussi brièvement des suites de nombres complexes donc on rappelle que l'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$ et que $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mais $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$, où $\mathrm{i}^2 = -1$.

Définition 13.2. *Soit x un nombre réel. Alors, la valeur absolue de x, que l'on note $|x|$ est définie comme étant x si $x \geq 0$ et $-x$ si $x \leq 0$.*

Proposition 13.3. *D'abord, $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ensuite, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$. De plus, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $|xy| = |x||y|$.*

Remarque 13.4. *Soit $a > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a\,.$$

Définition 13.5. *La partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$ et c'est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

Remarque 13.6 (Attention aux nombres négatifs)**.** *La partie entière de -2.5 n'est pas -2. On a en effet $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.*

13.1 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 13.7. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leq M$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si elle admet un majorant.*

Définition 13.8. *On dit que m est un minorant de $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $a \in A$, $m \leq a$. On dit qu'une partie est minorée lorsqu'elle admet un minorant.*

Définition 13.9. *Une partie à la fois majorée et minorée est dite bornée.*

Remarque 13.10. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a \in A$, on a $|a| \leq R$.*

Définition 13.11. *On dit que M est le plus grand élément de A si $M \in A$ et si M est un majorant de A. On le note alors* $\max A$.

Définition 13.12. *On dit que m est le plus petit élément de A si $m \in A$ et si m est un minorant de A. On le note alors* $\min A$.

Définition 13.13 (Borne supérieure)**.** *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{M}_A$ l'ensemble de ses majorants. On appelle borne supérieure de A le plus petit élément de $\mathcal{M}_A$. La borne supérieure de A est notée* $\sup A$.

Remarque 13.14. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Définition 13.15 (Borne inférieure)**.** *Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$ et soit m_A l'ensemble de ses minorants. On appelle borne inférieure de A le plus grand élément de m_A. La borne inférieure de A est notée* $\inf A$.

Remarque 13.16. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Proposition 13.17. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $M = \sup A$ si et seulement si*

- *M est un majorant de A : pour tout $a \in A$, $a \leq M$.*
- *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $M - \epsilon < a_\epsilon$.*

Il faut se familiariser avec la tournure $\forall \epsilon > 0\ \exists$. Elle revient sans cesse en analyse.

Proposition 13.18. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $m = \inf A$ si et seulement si*

- *M est un minorant de A : pour tout $a \in A$, $m \leq a$.*
- *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $a_\epsilon < m + \epsilon$.*

13.2 Suites de nombres réels

Définition 13.19. *Une suite dans $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 13.20. *Une suite peut éventuellement ne pas commencer à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$ quelconque. On parlera quand même de suite.*

Définition 13.21. *Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$. Alors, u_{n_0} est le premier terme de la suite et on dira que u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.*

Définition 13.22. *Une suite $(u_n)_n$ est dite majorée si l'ensemble*

$$A_u := \{u_n \ : \ n \geq n_0\}$$

est majoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

De même, la suite de terme général u_n est minorée si A_u est minoré.

Définition 13.23. *Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée. Cela signifie qu'il existe $R \geq 0$ tel que $|u_n| \leq R$ pour tout $n \geq n_0$.*

Définition 13.24. *Une suite u est dite croissante si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$. Si l'inégalité est stricte, la suite est strictement croissante.*

Définition 13.25. *Une suite u est dite décroissante si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n+1}$. Si l'inégalité est stricte, la suite est strictement décroissante.*

Définition 13.26. *On dit que la suite u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ qui satisfait*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N_\epsilon \,, \text{on a } |u_n - \ell| < \epsilon \,. \tag{8}$$

Définition 13.27. *Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

Proposition 13.28. *Si la suite u est convergente vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

On a donc bien l'unicité de la limite ℓ si elle existe. Ainsi, on notera

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \,.$$

Proposition 13.29. *Toute suite convergente est bornée.*

Théorème 13.30. *Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles. On suppose que l'on a*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell_2 \,.$$

Alors, on dispose des convergences suivantes.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.
- *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n = a\ell_1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1\ell_2$.
- *Si de plus* $v_n \neq 0$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et si* $\ell_2 \neq 0$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

Définition 13.31. *On dit que la suite u diverge vers $+\infty$ si*

$$\forall H > 0 \quad \exists N_H \geq n_0 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N_H\,, \textit{on a } u_n > H\,. \tag{9}$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Par abus de langage, on dira parfois que u converge vers $+\infty$.

Définition 13.32. *On dit que la suite u diverge vers $-\infty$ si*

$$\forall H > 0 \quad \exists N_H \geq n_0 \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N_H\,, \textit{on a } u_n < -H\,. \tag{10}$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Par abus de langage, on dira parfois que u converge vers $-\infty$.

Théorème 13.33. *Soit u une suite réelle croissante et majorée. Alors, u_n converge vers* $\sup\limits_{n\geq n_0} u_n =: \sup\{u_n \ : \ n \geq n_0\}$.

Remarque 13.34. *Soit u une suite croissante non majorée. Alors elle diverge vers $+\infty$. De même, une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Proposition 13.35. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors, $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \in A$ et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$. De même, $m = \inf A$ si et seulement si m est un minorant de A et s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ telle que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \in A$ et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = m$.*

Théorème 13.36 (Principe des gendarmes)**.** *Soient trois suites réelles u, v et w définies à partir du rang n_0. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$. Alors, v converge vers ℓ.*

Proposition 13.37. *Soient trois suites réelles u, v et w définies à partir du rang n_0. On suppose que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Si au contraire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Proposition 13.38. *Soient deux suites réelles u et v définies à partir du rang n_0. On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Également, on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$. Alors $\ell_1 \leq \ell_2$.*

13.3 Suites particulières

On présente ici quelques familles particulières de suites ; auxquelles on s'adosse autant que possible.

13.3.1 Suites arithmétiques

La suite u est arithmétique de raison $a \neq 0$ si l'on a $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout $n \geq 0$. Alors, on a $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)\left(u_0 + a\frac{n}{2}\right)$. Si $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et si $a < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

13.3.2 Suites géométriques

La suite u est géométrique de raison $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors, on a $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $u_0 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Si $|q| < 1$, $|u_n| \longrightarrow 0$. Si $|q| > 1$, $|u_n| \longrightarrow +\infty$.

13.3.3 Suites puissances

Une suite puissance a un terme général de la forme $u_n = n^\alpha$ pour $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La suite converge vers 0 si $\alpha < 0$. Si $\alpha > 0$, elle tend vers $+\infty$.

13.3.4 Suites arithmético-géométrique

Définition 13.39. *Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$. Une suite telle que $u_{n+1} = au_n + b$ est dite arithmético-géométrique.*

Proposition 13.40. *Soit une suite u arithmético-géométrique de paramètres a et b. Alors : $u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$ pour tout $n \geq 0$.*

13.4 Suites complexes

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, on dit que u est convergente si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$.

14 Fonctions de la variable réelle : limites et continuité

Les fonctions que l'on considère ici sont définies sur une partie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. Cette partie, appelée le domaine de définition, est généralement un intervalle. On suppose également que les fonctions sont à valeurs réelles. L'extension au cas où les fonctions sont à valeurs complexes est immédiate en considérant partie réelle et partie imaginaire.

14.1 Limites d'une fonction

Définition 14.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a; b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On dit que f converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, on a :*

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0 + \delta(\epsilon)[\setminus \{x_0\} \ : \ |f(x) - \ell| < \epsilon \, .$$

Cet unique réel ℓ est appelé limite de f en x_0. On le note $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Proposition 14.2. *La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(y_n)_n$ de points de $\mathcal{I} \setminus \{x_0\}$ satisfaisant $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.*

Proposition 14.3. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a;b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On suppose $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$. Alors :*

- $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.
- $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$.
- $\lim_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \ell_1$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- *Si de plus* $\ell_2 \neq 0$ *et* $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{I} \setminus \{x_0\}$, $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Proposition 14.4. *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a;b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On suppose $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$. On suppose également que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Alors :*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell\,.$$

Proposition 14.5. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a;b[$. Soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On suppose $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$. On suppose également que pour tout $x \in \mathcal{I}$, on a $f(x) \leq g(x)$. On en déduit $\ell_1 \leq \ell_2$.*

Définition 14.6. *On dit que f converge à gauche vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0[\ :\ |f(x) - \ell| < \epsilon\,.$$

Le réel ℓ est appelé limite à gauche de f en x_0. On le note $\ell := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $f(x_0^-)$.

On a de même pour la limite à droite.

Définition 14.7. *On dit que f converge à droite vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0; x_0 + \delta(\epsilon)[\ :\ |f(x) - \ell| < \epsilon\,.$$

Le réel ℓ est appelé limite à droite de f en x_0. On le note $\ell := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $f(x_0^+)$.

Définition 14.8. *Une fonction est dite càdlàg sur $\mathbb{R}$ si en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0^-)$ existe et si $f(x_0^+) = f(x_0)$.*

La notion "càdlàg" est essentielle en vue de l'étude des fonctions de répartition.
On peut parfois tendre vers $\pm\infty$.

Définition 14.9. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si pour tout $H > 0$,*

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus \{x_0\}\ :\ f(x) > H\,.$$

Définition 14.10. *On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on notera alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si pour tout $H > 0$,*

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus \{x_0\}\ :\ f(x) < -H\,.$$

On suppose maintenant que l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ est de la forme $]a;+\infty[$.

Définition 14.11. *Soit f une fonction de $]a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ si*

$$\forall\epsilon>0\ \exists H(\epsilon)>0 \text{ tel que } \forall x>H(\epsilon)\ :\ |f(x)-\ell|<\epsilon\,.$$

On suppose maintenant que l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ est de la forme $]-\infty;a[$.

Définition 14.12. *Soit f une fonction de $]-\infty;a[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ si*

$$\forall\epsilon>0\ \exists H(\epsilon)>0 \text{ tel que } \forall x<-H(\epsilon)\ :\ |f(x)-\ell|<\epsilon\,.$$

Remarque 14.13. *Il va de soi que la limite en $+\infty$ peut être égale à $+\infty$ ou à $-\infty$. Il en est de même en $-\infty$.*

14.2 Quelques limites classiques

Les limites suivantes sont *a priori* indéterminées mais en négociant bien les calculs, on peut les obtenir. Elles sont à connaître par cœur.

- $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.
- $\lim_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$.
- $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.
- $\lim_{x\to0} x\log(x)=0$.
- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(x)}{x}=0$.
- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

14.3 Fonctions continues

Ici, $\mathcal{I}=]a;b[$ où $a<b$ sont des réels ou sont infinis mais $a<+\infty$ et $b>-\infty$. En d'autres termes, $\mathcal{I}\neq\emptyset$.

Définition 14.14. *La fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.*

Proposition 14.15. *Si f et g sont continues en x_0, il en est de même pour $f+g$, fg et αf. Si de plus $g(x)\neq0$ pour tout $x\in\mathcal{I}$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 également.*

Théorème 14.16. *Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g\circ f$ définie par $(g\circ f)(x):=g(f(x))$ est continue en x_0.*

Définition 14.17. *On dit qu'une fonction f est continue sur l'intervalle $\mathcal{I}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{I}$.*

Théorème 14.18 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de l'intervalle tels que $a<b$ et $f(a)<f(b)$. Alors, pour tout $y\in\,]f(a);f(b)[$, il existe $c\in]a;b[$ tel que $f(c)=y$.*

Corollaire 14.19. *Soit f une fonction continue de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de l'intervalle tels que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Alors, il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Théorème 14.20. *Soit f une fonction continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Alors, on a :*

- *f est bijective de $\mathcal{I}$ sur $f(\mathcal{I})$, qui est un intervalle. On notera f^{-1} la bijection réciproque.*
- *f^{-1} est continue sur $f(\mathcal{I})$.*
- *f^{-1} est strictement monotone. De plus, si f est strictement croissante (respectivement décroissante), il en est de même pour f^{-1}.*

15 Fonctions de la variable réelle : dérivation

On considère des intervalles de la forme $]a;b[$ avec $a < +\infty$ et $b > -\infty$.

Définition 15.1. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel ℓ tel que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell\,.$$

Cette limite ℓ est appelée la dérivée de f en a. On la note $f'(a)$.

Proposition 15.2. *Soit f une fonction de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On suppose que f est dérivable en a. Alors f est continue en a.*

La dérivation étant construite par une limite, on peut montrer facilement qu'elle est robuste vis à vis des opérations algébriques usuelles.

Théorème 15.3. *Soient deux fonctions f et g de l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{I}$. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors :*

- *$f + g$ est dérivable en a et de plus $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
- *fg est dérivable en a et de plus $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction αf définie par $x \mapsto \alpha f(x)$ est dérivable en a et de plus $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.*
- *Si de plus $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{g}$ définie par $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est dérivable en a et on a $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$.*
- *Si de plus $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable en a et on a $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*

Théorème 15.4. *Soit f une fonction de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{R}$ où $\mathcal{J}$ (comme $\mathcal{I}$) est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{I}$ tel que $f(a) \in \mathcal{J}$. On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ définie par $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ est dérivable en a et de plus :*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))\,. \tag{11}$$

Théorème 15.5. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. On pose $\mathcal{J} := f(\mathcal{I})$. On suppose que f est dérivable en $a \in \mathcal{I}$ et $f'(a) \neq 0$. Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable au point $f(a)$ et de plus*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} . \tag{12}$$

15.1 Quelques dérivées usuelles

Voici quelques dérivées à connaître par cœur :

- Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
- Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
- Si $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors $f'(x) = \mathrm{e}^x$.
- Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
- Si $f(x) = \tan(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- Si $f(x) = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
- Si $f(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
- Si $f(x) = \arcsin(x)$, pour $x \in]-1;1[$, alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Si $f(x) = \arccos(x)$, pour $x \in]-1;1[$, alors $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Si $f(x) = \arctan(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Définition 15.6. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Si f est dérivable en tout point $a \in \mathcal{I}$, alors la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.*

Définition 15.7. *Si f est dérivable sur $\mathcal{I}$ et si f' est continue sur $\mathcal{I}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.*

15.2 Dérivées d'ordre supérieur

On peut dériver les fonctions dérivées, si elles sont dérivables.

Notation 15.8. *La dérivée de la fonction f' est notée f''. On dit que f'' est la dérivée d'ordre 2 de f. La dérivée d'ordre 3 de f est la dérivée de f'' et on la note $f^{(3)}$. Pour tout $n \geq 4$, la dérivée d'ordre n de f est la dérivée de $f^{(n-1)}$ et on la note $f^{(n)}$.*

Proposition 15.9. *Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre n en un point x_0. Alors la fonction fg est dérivable à l'ordre n en x_0 et de plus*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) , \tag{13}$$

où $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

15.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 15.10 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 15.11 (Formule des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Corollaire 15.12 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. On suppose que f' est bornée sur $]a;b[$ par une constante $M > 0$. Alors, pour tous $x, y \in [a;b]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.*

On peut appliquer la formule des accroissements finis pour obtenir de la monotonie.

Proposition 15.13. *Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Alors :*

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, f est strictement croissante sur $\mathcal{I}$.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, f est strictement décroissante sur $\mathcal{I}$.*
- *La fonction f est constante sur $\mathcal{I}$ si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.*

On peut généraliser la formule des accroissements finis à n'importe quel ordre.

Théorème 15.14 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I} \supset [a;b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $f^{(k)}$ est définie et continue sur $[a;b]$. On suppose également que $f^{(n+1)}$ est définie pour tout $x \in]a;b[$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \sum_{k=2}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{14}$$

15.4 Dérivabilité en dimension supérieure

On peut être amené à considérer des fonctions qui dépendent de plusieurs paramètres. Exemple : $f(x,u) = \frac{x}{1+u^2}$. La dérivée partielle par rapport à x consiste à dériver la fonction en x en considérant que u est une constante. Cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial}{\partial x} f(x,u)$. Dans le cas présent, $\frac{\partial}{\partial x} f(x,u) = \frac{1}{1+u^2}$. Et, de même : $\frac{\partial}{\partial u} f(x,u) = -2\frac{xu}{(1+u^2)^2}$.

La dérivée dans $\mathbb{C}$ est très différente de la dérivée dans $\mathbb{R}$. Elle relève de l'analyse complexe et nous ne l'aborderons pas.

16 Développements limités

Définition 16.1. *On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a s'il existe une fonction ρ de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \rho(x) = 0$ et $f(x) = \rho(x)g(x)$ pour $x \in \mathcal{J}_a$. Si $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a, on écrit $f(x) = o_a(g(x))$ ou $f = o_a(g)$.*

Définition 16.2. *On dit que f est équivalente à g en a si $f(x) - g(x) = o_a(g(x))$ et alors on écrit $f \sim_a g$.*

On peut ensuite faire des opérations simples.

Proposition 16.3. *Soient f, g, h et k quatre fonctions de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

- *L'équivalence est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).*
- *Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$ alors $fh \sim_a gk$.*
- *Si $f \sim_a g$ alors $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$.*
- *Si $f = o_a(g)$ et $g \sim_a h$ alors $f = o_a(h)$.*
- *Si u est une fonction telle que $\lim_{x \to b} u(x) = a$, alors $f \sim_a g$ implique*

$$f \circ u \sim_b g \circ u\,.$$

Le développement limité consiste à aller encore plus loin dans l'approximation.

Notation 16.4. *Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathcal{J}_a$. On écrit $f(x) = g(x) + o_a(h(x))$ si $f(x) - g(x) = o_a(h(x))$.*

Définition 16.5. *Soit f de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n s'il existe des réels $a_0, \cdots, a_n$ tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right)\,.$$

La fonction polynomiale $x \mapsto P_n(x) := a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$ s'appelle la partie régulière (unique) du développement limité.

Remarque 16.6. *La fonction f admet un développement limité en a à l'ordre n si et seulement si la fonction g définie par $g(x) := f(x+a)$ en admet un en 0 à l'ordre n.*

En particulier, on aime à se ramener au cas du DL en 0 pour simplifier.

Théorème 16.7 (Formule de Taylor-Young)**.** *On suppose que la fonction f de $\mathcal{J}_a$ dans $\mathbb{R}$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathcal{J}_a$. Alors, f admet un développement limité en a d'ordre n et l'on a de plus :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right)\,. \tag{15}$$

La somme de deux DL s'obtient en prenant la somme des parties régulières. Le produit de deux DL s'obtient en prenant le produit des deux parties régulières et en supprimant tous les coefficients d'ordre supérieurs ou égaux à $n+1$. La composition est similaire : on compose les deux parties régulières puis l'on supprime les coefficients associés à des degrés trop élevés. Si f admet un DL d'ordre n en a de partie régulière P_n **et** si f' admet un DL d'ordre $n-1$ en a de partie régulière Q_{n-1}, alors $Q_{n-1}(x) = P_n'(x)$. Si f admet un DL d'ordre n en a de partie régulière P_n alors la primitive de f qui s'annule en a c'est-à-dire la fonction $F(t) := \int_a^t f(s)\mathrm{d}s$ admet un DL à l'ordre $n+1$ en a de partie régulière Q_{n+1} telle que $Q_{n+1}(x) = \int_a^x P_n(y)\mathrm{d}y$.

Définition 16.8. *Soit f une fonction définie sur $[R; +\infty[$ avec $R > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f admet un DL à l'ordre n en $+\infty$ si la fonction g définie par $g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL à l'ordre n en 0.*

Voici quelques développements limités usuels en 0 :

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.

2. $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$.
3. $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
4. $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$.
5. $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
6. $\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
7. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$.
8. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.
9. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.
10. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.
11. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\prod_{p=0}^{n-1}(\alpha-p)}{n!}x^n$.

17 Calcul intégral

17.1 Intégration sur un segment

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On s'intéresse à l'intégration sur le segment $[a;b]$.

On passe la construction de l'intégrale de Riemann sous silence ; et il en est de même avec l'intégrale au sens de Lebesgue. Nous dirons que si f est positive sur $[a;b]$, son intégrale sur ledit segment est l'aire délimitée par les droites d'équations $(x=a)$, $(y=0)$, $(x=b)$ et par la courbe d'équation $(y=f(x))$. Si f est négative, son intégrale est l'opposé de cette aire. Si f est tantôt positive et tantôt négative, son intégrale est la somme des aires quand f est positive moins la somme des aires quand f est négative. L'intégrale est notée $\int_{[a;b]} f$.

Proposition 17.1. **1.** *L'intégrale $\int_{[a;b]} f$ est un réel indépendant des valeurs prises par f en un nombre fini de points de $[a;b]$.*
2. *La fonction $f \mapsto \int_{[a;b]} f$ est une application linéaire.*
3. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$. Si $f \leq g$ alors $\int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$.*

Proposition 17.2 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[a;b]$. Alors, on a*

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f| \,.$$

Proposition 17.3 (Relation de Chasles)**.** *Soient a, b, c trois réels vérifiant $a < b < c$. Soit f une fonction définie, continue par morceaux sur $[a;c]$. Alors, on a*

$$\int_{[a;c]} f = \int_{[a;b]} f + \int_{[b;c]} f \,.$$

Proposition 17.4 (Inégalité de la moyenne)**.** *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, alors la fonction fg est continue par morceaux sur $[a;b]$. De plus, on a*

$$\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leq \sup_{[a;b]} |f| \int_{[a;b]} |g|$$

En prenant $g = \mathbb{1}_{[a;b]}$, on obtient

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq (b-a)\sup_{[a;b]}|f|\,. \tag{16}$$

Théorème 17.5 (Théorème fondamental)**.** *Soit une fonction f continue à valeurs réelles positives sur $[a;b]$. Cette fonction est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.*

Proposition 17.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient f et g deux fonctions définies, continues sur le segment $I = [a;b]$. Alors :*

$$\left|\int_I fg\right| \leq \sqrt{\int_I f^2}\sqrt{\int_I g^2}\,.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si les deux fonctions sont colinéaires.

On donne maintenant une extension de la notion d'intégrale. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie, continue par morceaux sur I, à valeurs réelles. Pour tout $(a;b) \in I^2$, si $a \leq b$, on pose $\int_a^b f := \int_{[a;b]} f$. Si $a > b$, on pose $\int_a^b f := -\int_{[a;b]} f$. Toutes les propriétés précédentes sont encore vraies.

Théorème 17.7. *On a la convergence suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} f\,.$$

17.2 Intégration et dérivation

Définition 17.8. *Une fonction F définie sur $[a;b]$ est une primitive de f sur $[a;b]$ si et seulement si F est dérivable sur $[a;b]$ et telle que $F' = f$.*

Théorème 17.9. *Étant donnés une fonction f définie, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et un élément a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.*

On peut utiliser ce résultat pour calculer une intégrale :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: [F(t)]_a^b$$

17.2.1 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$. On sait que l'on a $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Conséquemment, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$. On en déduit

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t\,.$$

Le problème est le suivant : lorsqu'on doit effectuer le calcul de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, il faut identifier les fonctions u et v telles que $f = uv'$ et telles que l'intégrale de $u'v$ soit plus facile à calculer que celle de f.

En général on privilégie la primitivation pour les fonctions trigonométriques, puis les exponentielles puis les fonctions polynomiales puis les logarithmes et enfin les réciproques des fonctions trigonométriques.

17.2.2 Changement de variable

Étant données une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction φ à valeurs dans I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha;\beta]$ et telle que φ' ne s'annule pas, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

17.2.3 Règles de Bioche

Les règles de Bioche sont utilisées lorsque l'on cherche à intégrer une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques (cosinus, sinus, tangente). L'idée est de faire un changement de variable adéquat.

Proposition 17.10. *Soit f une fonction de la forme $f(t) = G(\cos(t), \sin(t))$ où G est une fraction rationnelle à deux variables. On pose*

$$\mathrm{d}\omega(t) := f(t)\mathrm{d}t\,.$$

$\mathrm{d}\omega$ *est ce que l'on appelle une forme différentielle.*
- *Si $\mathrm{d}\omega(-t) = \mathrm{d}\omega(t)$, on applique le changement de variable $y := \cos(t)$.*
- *Si $\mathrm{d}\omega(\pi - t) = \mathrm{d}\omega(t)$, on applique le changement de variable $y := \sin(t)$.*
- *Si $\mathrm{d}\omega(\pi + t) = \mathrm{d}\omega(t)$, on applique le changement de variable $y := \tan(t)$.*
- *Sinon, on applique le changement de variable $y := \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.*

Il est important de ne pas oublier que $\mathrm{d}(-t) = -\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}(\pi - t) = -\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}(\pi + t) = \mathrm{d}t$. Afin de réussir le quatrième changement de variable, on rappelle

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$$

où $u := \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

17.3 Intégrales généralisées

On s'intéresse à ce qu'il se passe en $\pm\infty$ ou au voisinage d'un point où la fonction que l'on cherche à intégrer est non bornée.

Définition 17.11.

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\mathrm{d}x$$

Et, si f est non bornée en a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Si ces limites existent, on dit que l'intégrale correspondante converge (ou est convergente), sinon elle diverge (ou est divergente).

Par extension, on définit (définition au **sens standard**)
- Pour c borné quelconque

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R'\to\infty}\int_{-R'}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)\mathrm{d}x\,,$$

- et, si f non bornée en $x = c \in \,]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon'\to 0}\int_{c+\epsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On utilise souvent une définition alternative de ces intégrales généralisées dite au sens de la valeur principale de Cauchy :

$$\text{v.p.}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$$

et, si f non bornée en $x = c \in \,]a,b[$

$$\text{v.p.}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_a^{c-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

Si l'intégrale converge au sens standard, elle converge aussi en partie principale et les deux définitions donnent la même valeur de l'intégrale. Une intégrale peut converger au sens de la valeur principale de Cauchy sans converger au sens standard.

17.4 Espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ des fonctions sommables (intégrables)

Définition 17.12. *On appelle espace* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*, l'espace des fonctions* f *dites sommables (ou intégrables au sens de Lebesgue) telles que :*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Théorème 17.13. *Pour toute fonction dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*, on pose*

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

C'est une norme sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*.*

Définition 17.14. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0.$$

On parle aussi de convergence en moyenne :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

17.5 Espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$ des fonctions de module au carré sommable

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$ contient de nombreuses fonctions permettant de modéliser les signaux d'énergie finie ou encore les fonctions d'ondes de la mécanique quantique.

Définition 17.15. *On appelle* $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel des fonctions dont le carré du module est intégrable :*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Théorème 17.16. *Pour tous f et g dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$, on pose $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)^*\mathrm{d}x$. C'est un produit hermitien. La norme associée est :*

$$||f||_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Définition 17.17. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$ si et seulement si :*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_2 = 0.$$

On parle aussi de convergence en moyenne quadratique :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Théorème 17.18. $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$ *est ce que l'on appelle un espace de Hilbert.*

18 Séries numériques

18.1 Généralités

Soit une suite de réels ou de complexes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 18.1. *On définit $(S_n)_{n\geq 0}$, la suite des sommes partielles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_n$ converge.*

Notation 18.2. *La série de terme générale u_n est aussi notée $(\sum u_n)$.*

Définition 18.3. *La limite de la série est S définie par*

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k =: \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,.$$

Remarque 18.4. *Si on change un nombre* fini *de termes de la série $(\sum u_n)$, on ne change pas sa nature (convergente ou divergente). Bien sûr, on en change la limite éventuelle.*

Remarque 18.5. *Pour que la série $(\sum u_n)$ soit convergente, il est nécessaire que la suite $(u_n)_n$ tende vers 0. En effet, si la série $(\sum u_n)$ converge, cela signifie que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers une limite S. Puis, comme $u_n = S_n - S_{n-1}$, on en déduit que u_n converge vers $S - S = 0$. Cette condition n'est toutefois pas suffisante.*

18.2 Séries alternées

Définition 18.6. *Une série réelle $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ est dite alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.*

Théorème 18.7. *Soit une série réelle alternée, $(\sum u_n)$. On se donne les deux hypothèses suivantes :*

- *Le terme général u_n tend vers 0.*
- *La suite $(|u_n|)_n$ est décroissante.*

Alors, la série $(\sum u_n)$ converge.

18.3 Séries à termes réels positifs

Proposition 18.8. *Soit une série* $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ *à termes réels positifs. Cette série converge si et seulement si la suite* $(S_n)_n$ *des sommes partielles est majorée. Alors, cette série a pour somme :* $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Notation 18.9. *Soient deux suites à termes positifs* u *et* v. *Alors, s'il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $u_n \leq M v_n$, *on écrira* $u_n = O(v_n)$.

Il est important de comprendre que la notation O est différente de la notation o que l'on a déjà vue à la Notation 16.4.

Proposition 18.10. *Soient deux séries à termes réels positifs* $\sum u_n$ *et* $\sum \alpha_n$. *On suppose* $\alpha_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_n = O(\alpha_n)$. *Alors, si* $\sum \alpha_n$ *converge, la série de terme général* u_n *converge aussi.*

Proposition 18.11. *Soient deux séries à termes réels positifs* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$. *On suppose* $u_n \sim v_n$. *Alors,* $\sum v_n$ *converge si et seulement si* $\sum u_n$ *converge aussi.*

Donnons-nous quelques séries de référence.

18.3.1 Séries géométriques

Ici, le terme général correspond à une suite géométrique :

$$u_n = q^n\,,\ q \geq 0\,.$$

La suite des sommes partielles est

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,,$$

Théorème 18.12. *La série géométrique* $\left(\sum_{n\geq 0} q^n\right)$ *avec* $q \geq 0$ *converge si et seulement si* $0 \leq q < 1$ *et alors sa somme est* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

18.3.2 Séries de Riemann

Théorème 18.13. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

18.3.3 Comparaison logarithmique

On utilise souvent les deux tests suivants.

Théorème 18.14 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série dont le terme général* u_n *est un réel positif strictement. On suppose qu'il existe*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell\,.$$

Alors, si $\ell < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge. Et, si* $\ell > 1$, *la série diverge. Si* $\ell = 1$, *on ne peut pas conclure.*

Théorème 18.15 (Critère de Cauchy)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série dont le terme général* u_n *est un réel positif strictement. On suppose qu'il existe*

$$\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell\,.$$

Alors, si $\ell < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge. Et, si* $\ell > 1$, *la série diverge. Si* $\ell = 1$, *on ne peut pas conclure.*

18.4 Séries à termes réels ou complexes

On va s'adosser autant que faire se peut aux séries à termes réels strictement positifs.

Définition 18.16. *Soit $\sum u_n$ une série à terme général réel ou complexe. On dit que la série est absolument convergente si la série des modules $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 18.17. *Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente. De plus, on dispose de l'inégalité triangulaire*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \,.$$

Définition 18.18. *Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Théorème 18.19. *Soit une série $\sum u_n$ à valeurs réelles. On suppose qu'elle est semi-convergente. Alors, pour tout $A \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty; +\infty\}$, il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \longrightarrow A$. On ne peut donc pas écrire $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

18.5 Comparaison entre une série et une intégrale

On dit souvent que l'intégration est une sommation.

Théorème 18.20 (Cas des séries à termes réels positifs)**.** *Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue par morceaux, positive et décroissante. Alors, la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge avec $w_n := \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0; +\infty[$.*

19 Familles sommables

Cette section a un grand intérêt pour les probabilités en ce qui concerne la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

19.1 Suites simples

Définition 19.1. *Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est dite sommable s'il existe une constante positive M telle que pour toute partie finie $\mathcal{J}$ de $\mathbb{N}$, la somme partielle $S_{\mathcal{J}}(u) := \sum_{i\in\mathcal{J}} u_i$ est majorée par M : $S_{\mathcal{J}}(u) \leq M$.*

Définition 19.2. *Si u est une suite sommable de réels positifs, on appelle somme de la suite u le réel positif $S(u)$ défini par*

$$S(u) := \sup_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}}(u)\,,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. La somme de u est aussi notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Théorème 19.3. *Soit u une suite de réels positifs. La suite u est sommable si et seulement si la série $(\sum u_n)$ converge. De plus, on a $S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*

Définition 19.4. *Une suite u de réels ou de complexes est dite sommable si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable c'est-à-dire si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Et alors :*

$$S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \,.$$

Certaines suites ne sont pas sommables comme celle de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Théorème 19.5 (Théorème de réarrangement de Riemann)**.** *En réorganisant les termes d'une série réelle semi-convergente, on peut obtenir n'importe quelle somme donnée au départ ou même une série divergente.*

Remarque 19.6. *Au contraire, avec une suite sommable, la somme est commutativement convergente.*

19.2 Suites doubles

Théorème 19.7. *Un ensemble $\mathcal{I}$ est infini dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathcal{I}$ dont la réunion est égale à $\mathcal{I}$.*

On montre ainsi facilement que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ou même $\mathbb{Z}^2$ sont dénombrables.
Ici, on s'intéresse à des familles indexées par un ensemble infini dénombrable non nécessairement égal à $\mathbb{N}$.

Définition 19.8. *Soit $u = (u_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de réels positifs, indexée par un ensemble infini dénombrable $\mathcal{I}$. On dit que la famille u est sommable s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, on a $S_{\mathcal{J}}(u) = \sum_{i\in\mathcal{J}} u_i \leq M$. Alors, la famille a pour somme :*

$$S(u) = \sum_{i\in\mathcal{I}} u_i = \sup_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}}(u) \,,$$

où $\mathcal{J}$ décrit l'ensemble des parties finies de $\mathcal{I}$.

On peut à nouveau généraliser au cas des familles de réels ou de complexes.

Définition 19.9. *La famille $u = (u_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de réels ou de complexes, indexée par un ensemble infini dénombrable $\mathcal{I}$ est dite sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in\mathcal{I}}$ est sommable.*

Théorème 19.10. *Soit une suite double $u = (u_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs. Alors la famille u est sommable si et seulement si*

- *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum_q u_{p,q}\right)$ converge vers une limite $\ell_p \in \mathbb{R}_+$.*
- *De plus : la série $\left(\sum_p \ell_p\right)$ converge.*

Alors, on a également :

$$S(u) = \sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \,.$$

On étend à nouveau :

Théorème 19.11. *Soit une suite double $u = (u_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ de réels ou de complexes. Alors la famille u est sommable si et seulement si*

- *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série* $\left(\sum_q |u_{p,q}|\right)$ *converge vers une limite $\ell_p \in \mathbb{R}_+$.*
- *De plus : la série* $\left(\sum_p \ell_p\right)$ *converge.*

Alors, on a également :

$$\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\,.$$

19.3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 19.12. *Soient deux séries $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ de réels ou de complexes. On définit une troisième série appelée produit de Cauchy des deux précédentes : $\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right)$, où* $w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,:\,p+q=n} u_p v_q$.

Remarque 19.13. *Ceci correspond peu ou prou au produit de convolution de deux distributions causales de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \delta_k$.*

Théorème 19.14. *Si les deux séries $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ sont absolument convergentes, alors la série $\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right)$ est également absolument convergente et de plus* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.

Exemple 19.15. *On définit l'exponentielle de $z \in \mathbb{C}$ par $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Alors, on a bien*

$$\exp(z+z') = \exp(z)\times\exp(z')\,. \tag{17}$$

20 Suites et séries de fonctions

Dans cette section, on considère des suites (ou des séries) dont le terme général est lui-même une fonction.

Définition 20.1 (Convergence simple)**.** *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f de A dans $\mathbb{C}$ si*

$$\forall x \in A\,, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Mais encore, cela signifie :

$$\forall x \in A\,, \forall \epsilon > 0, \exists p_x \in \mathbb{N}\ \forall p \geq p_x \Rightarrow |f_p(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Ici, l'entier p_x dépend de x.

Définition 20.2 (Convergence uniforme)**.** *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si*

$$||f_n - f||_\infty := \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

quand n tend vers l'infini. Soit encore :

$$\forall \epsilon > 0, \exists p_A \in \mathbb{N}\ \forall p \geq p_A \Rightarrow \forall x \in A\,, |f_p(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Ici, l'entier p_A est le même pour tous les éléments de A.

Remarque 20.3. *La convergence uniforme d'une suite de fonctions entraîne sa convergence simple mais la réciproque est fausse.*

Définition 20.4. *On dit que la série de fonctions $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ converge simplement vers f sur A si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge simplement vers f sur A.*

Définition 20.5. *On dit que la série de fonctions $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ converge uniformément vers f sur A si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur A.*

Remarque 20.6. *La convergence uniforme d'une série de fonctions entraîne sa convergence simple mais la réciproque est fausse.*

Définition 20.7. *Ici, $\mathcal{B}(A)$ désigne l'espace des fonctions bornées de A dans $\mathbb{C}$.*

Définition 20.8. *On le munit de la norme uniforme. On d'autres termes, on pose*

$$||f||_\infty := \sup_{x\in A} |f(x)|$$

Proposition 20.9. *Si une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{B}(A)$ converge uniformément sur A vers f, alors f est également un élément de $\mathcal{B}(A)$.*

Théorème 20.10. *Soit une suite de fonctions $(f_n)_n$ de A dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in A$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A et que l'on a*

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n\,.$$

Alors, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n\,.$$

D'où la formule d'interversion des limites

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)\,,$$

l'existence de ces deux limites étant assurée par les hypothèses.

Corollaire 20.11. *Soit une série de fonctions $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ de A dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in A$. On suppose que la série de fonctions $(\sum_{n\geq 0} f_n)$ converge uniformément vers S sur A et que l'on a*

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n\,.$$

Alors, on a

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,.$$

D'où la formule d'interversion des limites

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)\,,$$

l'existence de ces deux limites étant assurée par les hypothèses.

Théorème 20.12. *On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A. De plus, chaque fonction f_n est continue au point a. Alors f est continue en a.*

Corollaire 20.13. *On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A. De plus, chaque fonction f_n est continue sur A. Alors f est continue sur A.*

On dispose des mêmes résultats sur les séries de fonctions. On présente maintenant un autre type de convergence pour les séries de fonctions. Ce type de convergence est parfois appelé “convergence normale” pour faire référence au mot “norme”. On va parler ici de convergence absolue, pour faire le lien avec les séries d'éléments d'un espace vectoriel normé.

Définition 20.14. *Soit une série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ où f_n est bornée de A dans $\mathbb{C}$. On pose donc $||f_n||_\infty := \sup_{x\in A} |f_n(x)|$. On dit que la série de fonctions converge absolument pour la norme infinie sur A si la série numérique $\left(\sum_{n\geq 0} ||f_n||_\infty\right)$ converge.*

Théorème 20.15. *Soit une série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ où f_n est bornée de A dans $\mathbb{C}$. On suppose que cette série est absolument convergente pour la norme infinie. Alors, la série converge uniformément sur A.*

21 Séries entières

Dans cette section, nous allons au-delà des développements limités.

21.1 Rayon de convergence

Définition 21.1. *On appelle “série entière” toute série de fonctions qui est de la forme $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ où z est une variable complexe et chaque coefficient a_n est indépendant de z.*

Définition 21.2. *Soit $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ une série entière. On définit son rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$ de la façon suivante :*

$$R := \sup\left\{\rho > 0 \ : \ \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|\rho^n\right) \ \textit{converge.}\right\} \tag{18}$$

Proposition 21.3. *Soit $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ une série entière de rayon de convergence R_1. On définit les deux quantités suivantes :*

$$R_2 := \sup\left\{\rho > 0 \ : \ \lim_{n\to\infty} |a_n|\rho^n = 0\right\} \tag{19}$$

et

$$R_3 := \sup\left\{\rho > 0 \ : \ (|a_n|\rho^n)_n \ \textit{est bornée.}\right\} \tag{20}$$

Alors, $R = R_2 = R_3$. On peut donc aussi bien définir le rayon de convergence d'une série entière par (18), par (19) ou par (20).

Pour en faire le calcul pratique dans certains cas, on applique la règle de d'Alembert.

Théorème 21.4. *Soit* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)_n$ *une série entière telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. *Supposons qu'il existe* $L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Alors,* $R = \frac{1}{L}$.

Définition 21.5. *Soit* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *une série entière complexe de rayon de convergence* R. *On appelle "disque de convergence" de cette série le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* R : $D(0; R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$.

Théorème 21.6. *Pour tout complexe* z *tel que l'on ait* $|z| > R$, *la série* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ *diverge. Pour tout complexe* z *tel que l'on ait* $|z| < R$, *la série* $\left(\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n\right)$ *converge et de plus la somme de la série entière,* $S(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *est continue sur* $D(0; R)$.

Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$ deux séries entières de rayons respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$. Alors, la série entière $\left(\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, z^n\right)$ a un rayon de convergence $R \geq \min\{R_1; R_2\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tous les complexes λ et μ, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)\, z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\,,$$

si $|z| < \min\{R_1; R_2\}$.

Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$ deux séries entières de rayons respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$. On définit une nouvelle série entière : $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ avec

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Alors, $\left(\sum_{n\geq 0} c_n z^n\right)$ a un rayon de convergence R tel que $R \geq \min\{R_1; R_2\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_1; R_2\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

21.2 Série entière d'une variable réelle

On se restreint ici à la variable réelle.

Définition 21.7. *Soit* $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ *une série entière réelle :* $a_n \in \mathbb{R}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* R *son rayon de convergence. L'intervalle de convergence de la série est* $]-R; R[$.

Proposition 21.8. *Soit* $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ *une série entière réelle. Soit* R *son rayon de convergence. Alors pour tout* $x \in]-R; R[$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\ |x|^n$ *converge.*

Théorème 21.9. *Soit* $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ *une série entière réelle. Soit* R *son rayon de convergence. Alors, on peut intégrer terme à terme la somme de cette série entière sur l'intervalle de convergence* $]-R; R[$. *En d'autres termes, pour tout* $x \in]-R; R[$, *on a*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Théorème 21.10. *Soit* $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ *une série entière réelle. Soit* R *son rayon de convergence. Alors, on peut dériver terme à terme la somme de cette série entière sur l'intervalle de convergence* $]-R;R[$. *En d'autres termes, pour tout* $x \in]-R;R[$, *on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Corollaire 21.11. *Soit* $f : x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors,* f *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $]-R;R[$ *avec de plus :*

$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in]-R;R[\ \ f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1)) a_n x^{n-p}\,.$$

En particulier, on a

$$a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)\,.$$

Définition 21.12 (Fonctions développables en série entière)**.** *Une fonction* f *à valeurs réelles, définie au voisinage de* 0 *est dite développable en série entière au voisinage de* 0 *s'il existe* $R > 0$ *et une série entière* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$ *tels que pour tout* $x \in]-R;R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Il est crucial de bien comprendre qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ n'est pas nécessairement développable en série entière.

21.3 Développements classiques

On présente ici les développements en série entière classiques.

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.

- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n$ pour tout $x \in]-1;1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On connaît le développement de la fonction $f(x) := \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ pour tout $x \in]-1;1[$. Puis, on intègre et sur le même intervalle, on obtient

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

22 Équations différentielles linéaires

Définition 22.1 (Équation différentielle)**.** *Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre la variable t et les dérivées d'ordre $0, 1\cdots, n$ d'une fonction x de t. On l'écrit symboliquement :*

$$F\left(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\right) = 0\,. \tag{21}$$

Définition 22.2 (Résolution)**.** *Résoudre cette équation, c'est à la fois donner un intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et une fonction x sur $\mathcal{I}$ telle que* (21) *soit vérifiée pour tout $t \in \mathcal{I}$.*

Définition 22.3 (Rappel)**.** *Une fonction F est lipschitzienne si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x-y|$.*

Théorème 22.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *On considère l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = F(t, x(t))$. On demande également une condition au bord : $x(t_0) = x_0$. On suppose que la fonction F est continue et lipschitzienne pour la deuxième variable. Alors, cette équation différentielle admet une unique solution.*

Remarque 22.5 (Phénomène de Peano)**.** *Il faut bien vérifier que la fonction est lipschitzienne sinon un phénomène dit de Peano peut apparaître : la non-unicité de la solution.*

Définition 22.6. *Une équation différentielle linéaire est une équation différentielle telle que la fonction sous-jacente est linéaire (donc lipschitzienne) pour chacune des coordonnées $x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)$. En d'autres termes, c'est une équation différentielle de la forme :*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = s(t)\,.$$

Notation 22.7. *Les fonctions $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont les coefficients de l'équation. La fonction s est le second membre de l'équation.*

Définition 22.8. *L'équation homogène associée à cette équation différentielle est*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0\,.$$

On a simplement enlevé le second membre.

Théorème 22.9. *Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et $\mathcal{S}$ celui des solutions de l'équation avec second membre. Alors $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel (voir page 22) de dimension n. Et, pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$, on a $x_1 - x_2 \in \mathcal{S}_0$. Ainsi, il* suffit *de résoudre l'équation homogène et de trouver une solution particulière x_p et l'on a $\mathcal{S} = x_p + \mathcal{S}_0$. On dit que $\mathcal{S}$ est un espace affine (voir page 25).*

22.1 Premier ordre à coefficients constants

Définition 22.10. *On considère ici une équation de la forme*

$$x'(t) + ax(t) = s(t)\,,$$

où $a \in \mathbb{R}$ et s est une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 22.11 (Espace affine)**.** *On sait que l'espace des solutions est un espace affine de dimension* 1*. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.*

Résolution de l'équation homogène L'équation homogène est ici $x'(t) + ax(t) = 0$.

Théorème 22.12. *Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.*

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)\mathrm{e}^{-at}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda(t)\mathrm{e}^{-at}\right) + a\lambda(t)\mathrm{e}^{-at} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)\mathrm{e}^{at}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = \mathrm{e}^{-at}\int_0^t s(u)\mathrm{e}^{au}\mathrm{d}u\,.$$

La solution générale de l'équation initiale est donc

$$x(t) = \left(C + \int_0^t s(u)\mathrm{e}^{au}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-at}\,,$$

où C est une constante.

Astuce pour trouver la bonne sortie

L'idée à retenir est que l'entrée et la sortie ne diffèrent que peu. Ainsi, si l'entrée est une fonction polynomiale, l'entrée est aussi une fonction polynomiale. Si l'on a un logarithme en entrée, on a du logarithme en sortie. Idem avec les fonctions trigonométriques, les exponentielles. Et, si l'entrée est une fraction rationnelle, la sortie contient des fractions rationnelles et/ou des logarithmes et/ou des arctangentes.

22.2 Premier ordre à coefficients non constants

On considère ici une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = s(t)\,.$$

La fonction a ne doit pas être oubliée.

Remarque 22.13. *L'espace des solutions n'est pas forcément affine. Il y a en effet des soucis si a s'annule. On se place donc sur un intervalle où a ne s'annule pas et l'on se ramène alors à une équation de la forme*

$$x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

Théorème 22.14. *L'équation homogène est ici $x'(t) + c(t)x(t) = 0$. Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-C(t)}$ où C est une primitive de c.*

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)\mathrm{e}^{-C(t)}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\left(\lambda(t)\mathrm{e}^{-C(t)}\right)' + a\lambda(t)\mathrm{e}^{-C(t)} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait $\lambda'(t) = s(t)\mathrm{e}^{C(t)}$. Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi comme solution particulière $x_p(t) = \mathrm{e}^{-C(t)} \int_0^t s(u)\mathrm{e}^{C(u)}\mathrm{d}u$. La solution générale de l'équation initiale est donc

$$x(t) = \left(\mu + \int_0^t s(u)\mathrm{e}^{C(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-C(t)}\,,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$.

22.3 Deuxième ordre à coefficients constants

Définition 22.15. *On considère ici une équation de la forme*

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = s(t)\,.$$

Proposition 22.16 (Espace affine)**.** *On sait que l'espace des solutions est un espace affine de dimension 2. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.*

L'équation homogène est ici $x''(t)+ax'(t)+bx(t) = 0$. L'équation caractéristique associée est $X^2 + aX + b = 0$. On note $\Delta := a^2 - 4b$.

Théorème 22.17.

- *Si $\Delta > 0$, il y a deux solution réelles r_1 et r_2 et l'espace vectoriel associé à l'équation homogène est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}\,;\, t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t})$.*
- *Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution réelle r_0 et l'espace vectoriel associé à l'équation homogène est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto t\mathrm{e}^{r_0 t}\,;\, t \mapsto \mathrm{e}^{r_0 t})$.*
- *Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes $r + \mathrm{i}s$ et $r - \mathrm{i}s$ et l'espace vectoriel associé à l'équation homogène est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \cos(st)\,\mathrm{e}^{rt}\,;\, t \mapsto \sin(st)\,\mathrm{e}^{rt})$.*

Il convient de noter que dans chacun des trois cas, les deux vecteurs forment une base.

Notation 22.18. *On note $(e_1\,;\,e_2)$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$.*

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda_1(t)e_1(t) + \lambda_2(t)e_2(t)$ où les deux fonctions λ_1 et λ_2 doivent vérifier

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)e_1'(t) + \lambda_2'(t)e_2'(t) = s(t) \\ \lambda_1'(t)e_1(t) + \lambda_2'(t)e_2(t) = 0 \end{cases}.$$

On obtient alors $\lambda_1'(t) = \frac{e_2(t)s(t)}{e_1'(t)e_2(t)-e_1(t)e_2'(t)}$ et $\lambda_2'(t) = -\frac{e_1(t)s(t)}{e_1'(t)e_2(t)-e_1(t)e_2'(t)}$.

22.4 Deuxième ordre à coefficients non constants

Définition 22.19. *Une équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients non constants est une équation de la forme*

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

Théorème 22.20 (Méthode générale de résolution de ces équations)**.** *Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations et il n'y en aura jamais.*

Le théorème est admis. Voir la dernière page du livre "Théorie de Galois" d'Yvan Gozard.