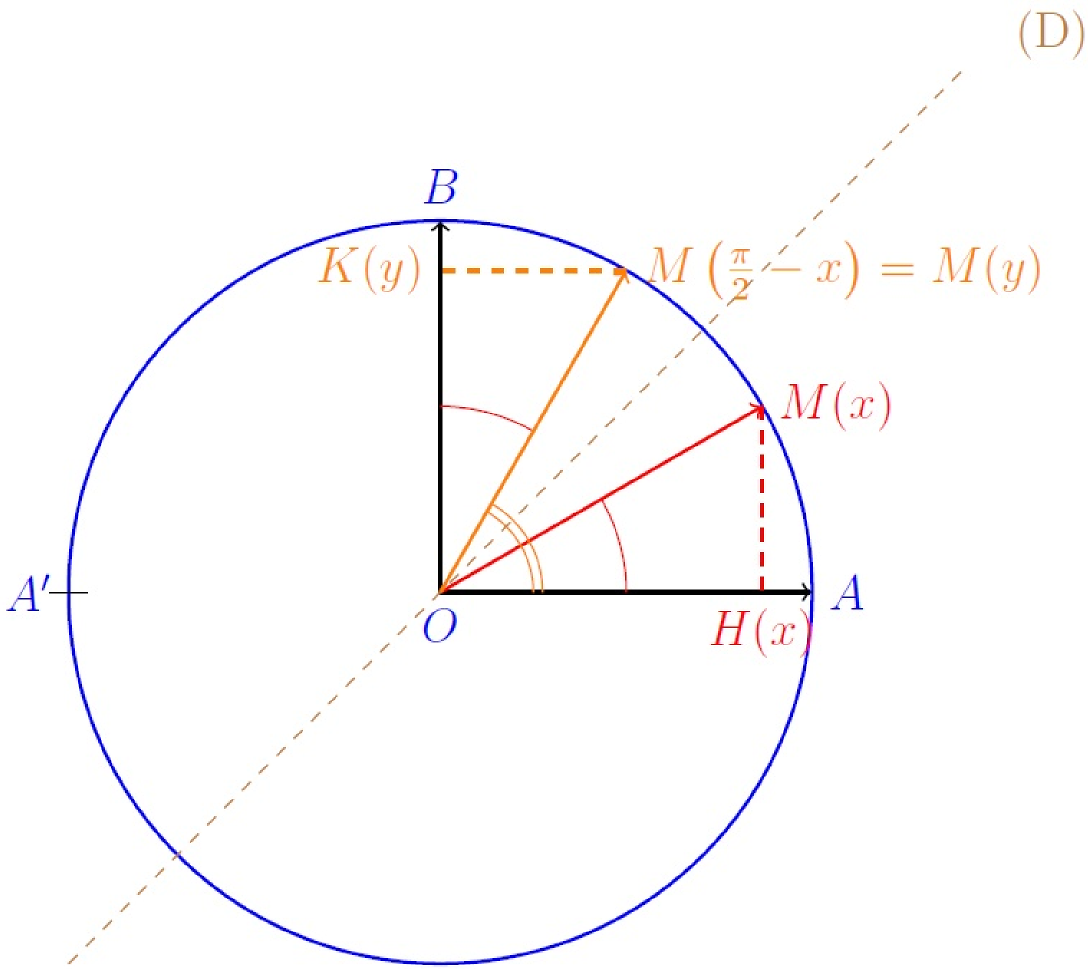
Bases indispensables des Mathématiques - Énoncé des TDs

Julian Tugaut

FISE 1

Version du 15 juin 2024



Trigonométrie et nombres complexes

Exercice 1

En dessinant un cercle trignométrique, justifier géométriquement les formules suivantes pour tout x réel : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, $\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$, $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi-x)=\sin(x)$, $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$.

Exercice 2

Calculer : $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{84\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{33\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right)$.

Exercice 3

Parmi les cinq expressions suivantes, une seule est différente de $-\sin(x)$. Laquelle ?

1. $-\cos(x-\frac{\pi}{2})$.
2. $\cos(\frac{5\pi}{2}+x)$.
3. $\sin(x-\pi)$.
4. $\cos(-x+\frac{\pi}{2})$.
5. $\sin(x+3\pi)$.

Exercice 4

Soient x et y deux réels appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos(x)=\frac{3}{5}$ et $\cos(y)=\frac{1}{3}$. Calculer $\sin(2x-y)$.

Exercice 5

Donner les modules et les arguments de chacun des nombres complexes suivants : $-1+i\sqrt{3}$, $3-3i$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, $(-1+i)^5$, $(\sqrt{3}-i)^4$, $\frac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i}$, $\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)^6$, $\left(\sin(\frac{\pi}{6})+i\cos(\frac{\pi}{6})\right)^6$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0\,.$$

Exercice 7

Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1 et distinct de 1, le nombre $i\frac{1+z}{1-z}$ est réel.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $x^2=y$, $y^2=z$ et $z^2=x$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2z+1)^4=(z-1)^4$.

Intégration

Exercice 10

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_1(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}.$$

Exercice 11

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}.$$

Exercice 12

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := 4x^3 - 5x^2 + x - 1$.
2. $f_2(x) := 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.
3. $f_3(x) := (x^2+1)(x^3-2x)$.
4. $f_4(x) := \frac{2x^2-3}{x^2+7}$.
5. $f_5(x) := \frac{2x-1}{x+1}$.
6. $f_6(x) := -x + 2 + \frac{2}{3x}$.
7. $f_7(x) := \frac{1}{x+x^2}$.
8. $f_8(x) := (2x+1)^2$.
9. $f_9(x) := \sqrt{x}(5x-3)$.
10. $f_{10}(x) := \log(\cos(2x))$.
11. $f_{11}(x) := \frac{x}{\sin(x)}$.
12. $f_{12}(x) := \log(x - \sqrt{x^2-1})$.
13. $f_{13}(x) := \log(\log(x))$.
14. $f_{14}(x) := \log(\log(\log(x)))$.

Exercice 13

Étudier en fonction de α la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$.

Exercice 14

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := \cos(3x) + 2\sin(5x)$.
2. $f_2(x) := 6e^{-4x}$.
3. $f_3(x) := e^x e^{e^x}$.
4. $f_4(x) := \frac{\log(x)^\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 15

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) := x\sin(2x)$.
2) $f_2(x) := x^\alpha \log(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
3) $f_3(x) := \cos(x)\log(1+\cos(x))$.
4) $f_4(x) := \sin(\log(x))$.
5) $f_5(x) := \frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5}$.
6) $f_6(x) := \sin(3x)\cos(5x)$.
7) $f_7(x) := \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.
8) $f_8(x) := x^3\exp(x+1)$.
9) $f_9(x) := \sin(x)\cosh(x)$.

Exercice 16

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}$.
2) $I_2 := \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$.
3) $I_3 := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
4) $I_4 := \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.
5) $I_5 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$.
6) $I_6 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)dx$.
7) $I_7 := \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}$.
8) $I_8 := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx$.

Exercice 17

Calculer, en passant en coordonnées polaires, les intégrales :

1) $I := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dxdy$. En déduire la valeur de $A := \int_0^\infty \exp\{-x^2\}\,dx$.
2) $J := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} x^2y^2\exp\{-(x^2+y^2)\}\,dxdy$. En déduire la valeur de $B := \int_0^\infty x^2\exp\{-x^2\}\,dx$.

Équations différentielles

Exercice 18

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1) $x'(t) - 3x(t) = 2$.
2) $x'(t) + 2x(t) = e^{2t}$.
3) $x'(t) + x(t) = \log(t)$.
4) $x'(t) - 5x(t) = e^{5t}$.
5) $x'(t) + 3t^2x(t) = t^2$.
6) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$.
7) $(1+t^2)x'(t) - tx(t) = 1+t+t^2$.

Exercice 19

Résoudre ces différentes équations différentielles du second ordre :

1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}$.

2) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}$.

3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t)$.

Suites numériques et suites de fonctions

Exercice 20

Étudier la convergence des suites u dont le terme général est :

1. $u_n := \frac{2n-4}{3n+5}$.
2. $u_n := n^3 - 2n^2$.
3. $u_n := \frac{\log(n)}{n}$.
4. $u_n := n^2 - n\log(n)$.
5. $u_n := n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. $u_n := n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
7. $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
8. $u_n := \frac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geq 2$.
9. $u_n := (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.
10. $u_n := \sqrt[n]{n}$.
11. $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
12. $u_n := \frac{2^n}{n^2}$.
13. $u_n := \frac{n!}{2^n}$.
14. $u_n := \frac{n!}{n^n}$.
15. $u_n := \frac{n}{2^n}$.

Exercice 21

Étudier la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 3$ et $3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$.

Exercice 22

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions suivante :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) := \frac{x^n+1}{x^2+1} \end{array}.$$

Séries numériques et séries de fonctions

Exercice 23

Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

1. $u_n := \frac{n}{3n-1}$.
2. $u_n := \frac{1}{2^n-3}$.
3. $u_n := \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
4. $u_n := \frac{2^n}{n^{10}}$.
5. $u_n := \frac{1}{n\log(n)}$ pour $n \geq 2$.
6. $u_n := (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 24

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 25

Donner le rayon de convergence R et la fonction somme des séries entières de terme général u_n et étudier le cas où $x = \pm R$:

1. $u_n(x) := \frac{x^n}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$.
2. $u_n(x) := \frac{x^n}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 26

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge.