Correction des travaux dirigés - Bases Indispensables des Mathématiques

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 1

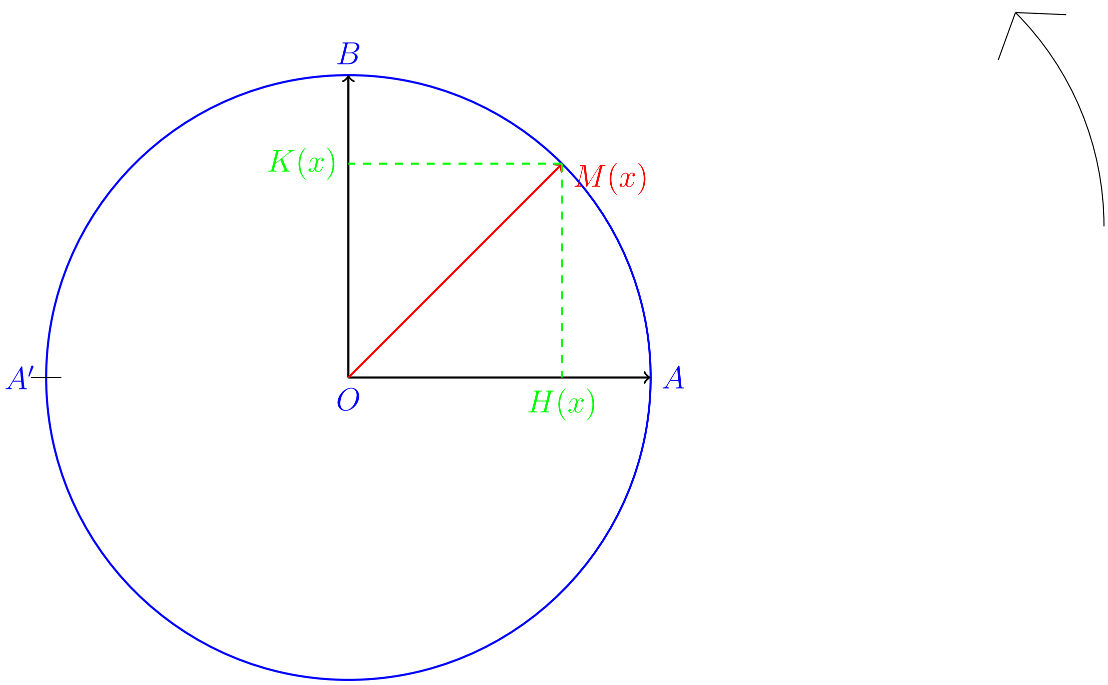
Énoncé

En dessinant un cercle trignométrique, justifier géométriquement les formules suivantes pour tout x réel : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Correction

On commence par illustrer avec la figure suivante :

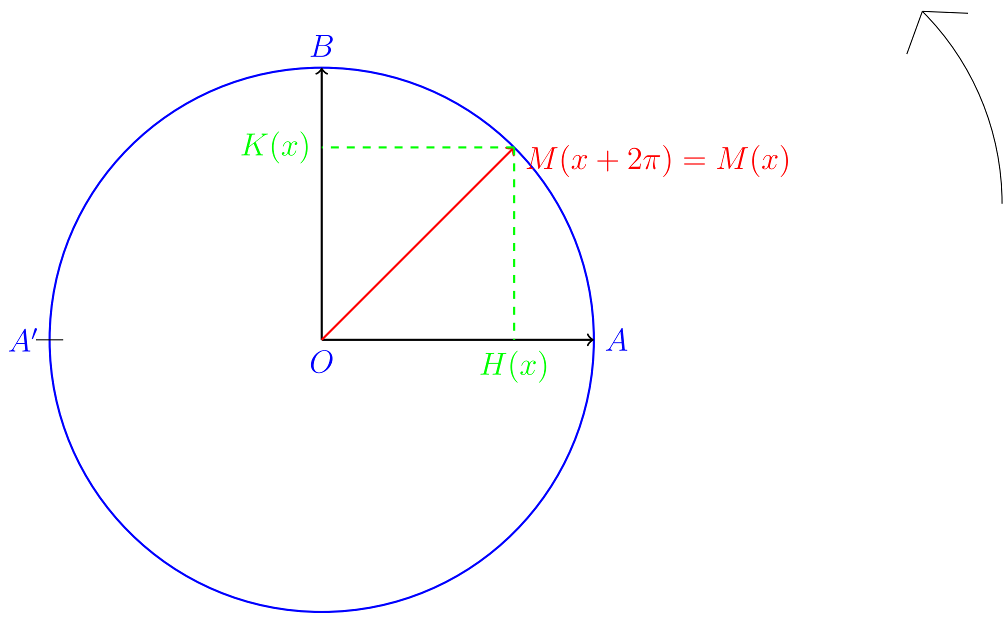
FIGURE 1 – Sinus, cosinus et Pythagore



La première formule correspond au théorème de Pythagore. En effet, le triangle $OM(x)H(x)$ est rectangle en $H(x)$ et l'on sait que $OH(x) = \cos(x)$ tandis que $H(x)M(x) = OK(x) = \sin(x)$. Or, par définition, le cercle est de rayon 1 donc $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

La 2π-périodicité est immédiate une fois que l'on a noté que $M(x+2\pi) = M(x)$:

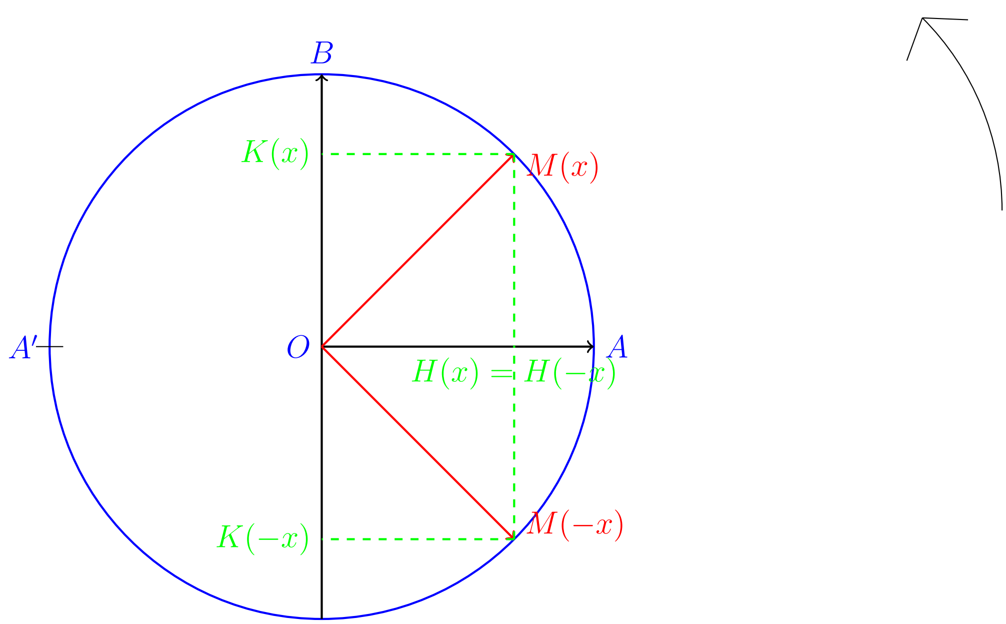
Figure 2 – Sinus, cosinus et périodicité



Ainsi, on a bien $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

Illustrons maintenant les deux formules suivantes :

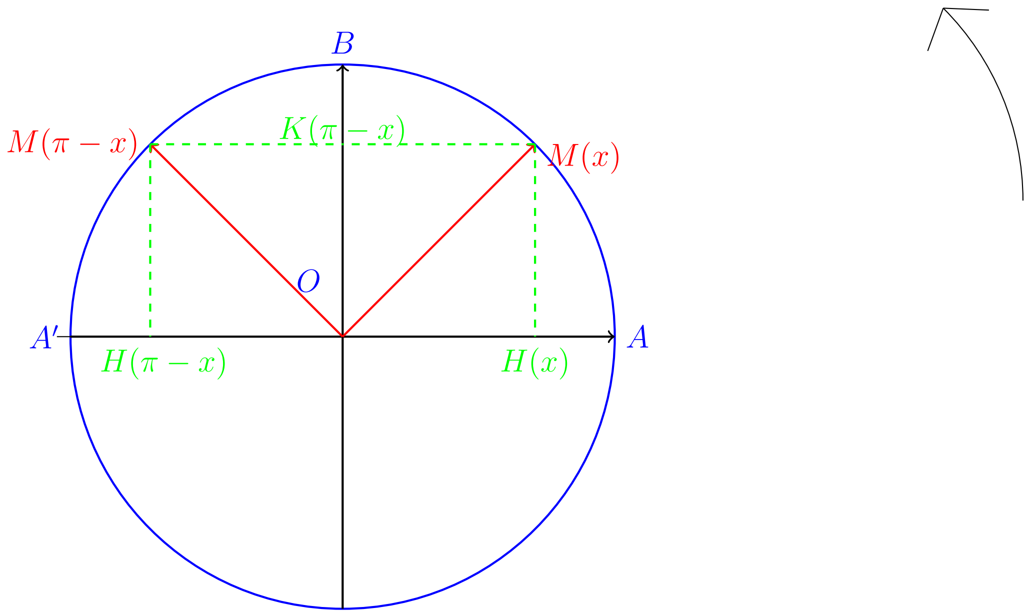
Figure 3 – Sinus, cosinus et parité



On constate en effet que $H(-x) = H(x)$ d'où $\cos(-x) = \cos(x)$. Au contraire, $OK(-x) = -OK(x)$ donc $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Traitons maintenant les deux formules suivantes.

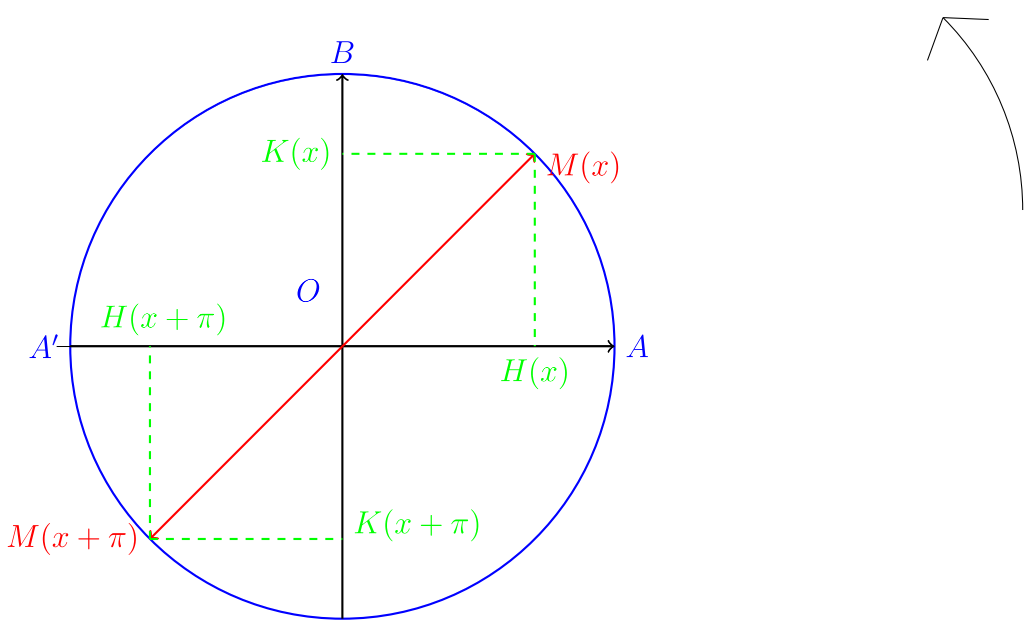
Figure 4 – Sinus, cosinus et symétrie axiale



Ici, $K(\pi - x) = K(x)$ et $OH(\pi - x) = -OH(x)$ donc on en déduit immédiatement $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

La symétrie centrale permet de conclure les deux dernières formules :

Figure 5 – Sinus, cosinus et symétrie centrale



En effet, ici, par symétrie centrale, on prend les opposés de l'abscisse et de l'ordonnée.

On pouvait aussi retrouver les deux dernières formules comme suit :

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= \cos(2\pi + x - \pi)\\ &= \cos(x - \pi)\\ &= \cos(\pi - x)\\ &= -\cos(x)\,,\end{aligned}$$

pour le cosinus et de même pour le sinus :

$$\begin{aligned}\sin(\pi + x) &= \sin(2\pi + x - \pi)\\ &= \sin(x - \pi)\\ &= -\sin(\pi - x)\\ &= -\sin(x)\,.\end{aligned}$$

Exercice 2

Énoncé

Calculer : $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{84\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{33\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right)$.

Correction

On trouve :

1. $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = \cos(-\frac{16\pi}{3} + 6\pi) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.
2. $\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right) = \sin(\frac{37\pi}{6} - 6\pi) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
3. $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{25\pi}{4} - 6\pi\right) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{19\pi}{3} + 6\pi\right) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right) = \sin(7\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
6. $\cos\left(\frac{84\pi}{3}\right) = \cos(28\pi) = \cos(0) = 1$.
7. $\sin\left(-\frac{33\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{33\pi}{2} + 16\pi\right) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$.
8. $\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{53\pi}{6} - 8\pi\right) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. $\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{22\pi}{4}\right) = -\sin(5\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Exercice 3

Énoncé

Parmi les cinq expressions suivantes, une seule est différente de $-\sin(x)$. Laquelle ?

1. $-\cos(x - \frac{\pi}{2})$.
2. $\cos(\frac{5\pi}{2} + x)$.
3. $\sin(x - \pi)$.
4. $\cos(-x + \frac{\pi}{2})$.
5. $\sin(x + 3\pi)$.

Correction

On vérifie chacune des cinq expressions :

1. $-\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x)$. ✓
2. $\cos(\frac{5\pi}{2} + x) = \cos(\frac{5\pi}{2} + x - 2\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x + \pi - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$. ✓
3. $\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin(x)$. ✓
4. $\cos(-x + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = +\sin(x)$. ◄
5. $\sin(x + 3\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$. ✓

Exercice 4

Énoncé

Soient x et y deux réels appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos(x) = \frac{3}{5}$ et $\cos(y) = \frac{1}{3}$. Calculer $\sin(2x - y)$.

Correction

Comme x et y sont dans $[0; \frac{\pi}{2}]$, les réels $\sin(x)$ et $\sin(y)$ sont tous les deux positifs. De fait :

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

et de même $\sin(y) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\sin(2x - y) &= \sin(2x)\cos(y) - \cos(2x)\sin(y) \\
&= 2\sin(x)\cos(x)\cos(y) - (2\cos^2(x) - 1)\sin(y) \\
&= 2\frac{4}{5}\frac{3}{5}\frac{1}{3} - \left(2\frac{9}{25} - 1\right)\frac{2\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{8}{25} + \frac{14\sqrt{2}}{75} \\
&= \frac{24 + 14\sqrt{2}}{75}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

Énoncé

Donner les modules et les arguments de chacun des nombres complexes suivants : $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $3-3\mathrm{i}$, $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$, $-\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$, $(-1+\mathrm{i})^5$, $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4$, $\frac{(\sqrt{2}-1)\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $\left(\cos(\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})\right)^6$, $\left(\sin(\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\cos(\frac{\pi}{6})\right)^6$.

Correction

On a

1. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Le module est $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Pour trouver l'argument, on cherche le réel $\theta\in]-\pi;\pi]$ tel que $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'argument est donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$.
2. $3-3\mathrm{i}$. Le module est $\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$. Pour trouver l'argument, on cherche le réel $\theta\in]-\pi;\pi]$ tel que $\cos(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'argument est donc $\theta=-\frac{\pi}{4}$.
3. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$. Le module est donc 1 et l'argument est $\theta=\frac{\pi}{2}$.
4. $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+i}$. Le module est $\frac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ et l'argument est $\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.
5. $-\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$. Le module est 1 et l'argument est $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.
6. $(-1+\mathrm{i})^5$. Le module est $\sqrt{2}^5=4\sqrt{2}$ et l'argument est $5\times\frac{3\pi}{4}=\frac{15\pi}{4}$ modulo 2π donc c'est $\theta=-\frac{\pi}{4}$.
7. $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4$. Le module est $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}^4=2^4=16$ et l'argument est $\theta=4\times-\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}$.
8. $\frac{(\sqrt{2}-1)\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. Le module est $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ et l'argument est $\theta=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$.
9. $\left(\cos(\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})\right)^6=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^6=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$. Le module est 1 et l'argument est $\theta=\pi$.
10. $\left(\sin(\frac{\pi}{6})+\mathrm{i}\cos(\frac{\pi}{6})\right)^6=\left(\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})+\mathrm{i}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})\right)^6=\left(\cos(\frac{\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3})\right)^6=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=1$. Le module est 1 et l'argument est $\theta=0$.

Exercice 6

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (2\mathrm{i} - 3)z + 5 - \mathrm{i} = 0\,. \tag{1}$$

Correction

En premier lieu, on calcule le discriminant :

$$\Delta := b^2 - 4ac = (2\mathrm{i} - 3)^2 - 4(5 - \mathrm{i}) = -15 - 8\mathrm{i}\,.$$

On cherche maintenant une racine complexe de $-15 - 8\mathrm{i}$. On sait qu'une telle racine existe. Soit $\delta := x + \mathrm{i}y$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Conséquemment :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \end{array} \right. .$$

On dispose en fait d'une troisième équation. En effet :

$$|\Delta| = \left|\delta^2\right| = |\delta|^2 = x^2 + y^2\,.$$

On calcule maintenant le module de Δ. Celui-ci vaut $|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$. On a donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{array} \right. .$$

On remarque

$$x = \pm\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-15 + 17}{2}} = \pm 1$$

et de même :

$$y = \pm\sqrt{-\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{15 + 17}{2}} = \pm 4$$

On choisit les signes tels que $2xy$ soit du signe de -8. Aussi, une racine possible de Δ est

$$\delta := 1 - 4\mathrm{i}\,.$$

L'équation initiale (1) a donc deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2} = \frac{3 - 2\mathrm{i} + 1 - 4\mathrm{i}}{2} = \frac{4 - 6\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

et

$$z_2 = \frac{-b - \delta}{2} = \frac{3 - 2\mathrm{i} - 1 + 4\mathrm{i}}{2} = \frac{2 + 2\mathrm{i}}{2} = 1 + \mathrm{i}\,.$$

Exercice 7

Énoncé

Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1 et distinct de 1, le nombre $\mathrm{i}\frac{1+z}{1-z}$ est réel.

Correction

Comme z est de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. D'où

$$\mathrm{i}\frac{1+z}{1-z} = \mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,.$$

On multiplie ensuite par la quantité conjuguée du dénominateur à savoir $1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. En effet, $(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = 1-2\cos(\theta)+1 = 2-2\cos(\theta)$.

Il vient ainsi :

$$\mathrm{i}\frac{1+z}{1-z} = \mathrm{i}\frac{(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{2-2\cos(\theta)} = \mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}\sin(\theta)}{2-2\cos(\theta)} = -\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} \in \mathbb{R}\,.$$

Autre correction

On factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$:

$$\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}} = -\mathrm{i}\frac{2\cos(\theta/2)}{2\mathrm{i}\sin(\theta/2)} = -\frac{1}{\tan(\theta/2)}\,.$$

Exercice 8

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $x^2 = y$, $y^2 = z$ et $z^2 = x$.

Correction

On a directement $x^8 = x$. $x = 0$ est une solution et elle implique $x = y = z = 0$. On suppose dorénavant que $x \neq 0$. Alors : x est une racine septième de l'unité d'où $x = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$ avec $n \in [\![0;6]\!]$. Ainsi, on a huit solutions au système :

1. $x = y = z = 0$.
2. $x = y = z = 1$.
3. $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{7}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{7}}$.
4. $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{7}}$, $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{7}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{16\pi}{7}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$.
5. $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{7}}$, $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{7}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{7}}$.
6. $x = e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{7}}$, $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{16\pi}{7}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{7}}$.
7. $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{7}}$, $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{7}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{7}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{7}}$.
8. $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{7}}$, $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{24\pi}{7}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{7}}$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{7}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{7}}$.

Exercice 9

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2z+1)^4 = (z-1)^4$.

Correction

On remarque que $z = 1$ n'est pas une solution donc on peut diviser par $(z-1)^4$ des deux côtés. Il vient

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1\,.$$

Ainsi, $\frac{2z+1}{z-1}$ est une racine quatrième de l'unité. En d'autres termes :

$$\frac{2z+1}{z-1} \in \{1; \mathrm{i}; -1; -\mathrm{i}\}\ .$$

On a ainsi quatre solutions :

1. $\frac{2z+1}{z-1} = 1$ d'où $z = -2$.
2. $\frac{2z+1}{z-1} = \mathrm{i}$ d'où $z = -\frac{1+3\mathrm{i}}{5}$.
3. $\frac{2z+1}{z-1} = -1$ d'où $z = 0$.
4. $\frac{2z+1}{z-1} = -\mathrm{i}$ d'où $z = \frac{-1+3\mathrm{i}}{5}$.

Exercice 10

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_1(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}\,.$$

Correction

On calcule d'abord le degré de F_1 : $\deg(F_1) = 3 - 4 = -1 < 0$. Il n'y a donc pas de partie entière. On remarque que 0 et 1 sont des racines du polynôme $X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X$. On a donc

$$X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X-1)(X^2 + 3X + 2) = X(X-1)(X+1)(X+2)\,.$$

Ainsi, il existe des constantes réelles A, B, C, D telles que

$$F_1(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{X+2}\,.$$

On calcule A en faisant tendre X vers 0 dans l'expression $XF_1(X)$. On obtient : $A = 1$. De même : $B = 2$, $C = 3$ et $D = -1$. Par conséquent :

$$F_2(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X} = \frac{1}{X} + \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+1} - \frac{1}{X+2}\,.$$

Exercice 11

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}\,.$$

Correction

On calcule d'abord le degré de F_2 : $\deg(F_2) = 2 - 3 = -1 < 0$. Il n'y a donc pas de partie entière.

Les pôles de F_2 sont 0 (pôle double) et -1. Ainsi, il existe des constantes réelles A, B, C telles que

$$F_2(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X+1}\,.$$

On calcule C en faisant tendre X vers -1 dans l'expression $(X+1)F_2(X)$. On obtient $C = 5$. De même, $B = 1$. Il reste à calculer A. On multiplie $F_2(X)$ par X puis l'on fait tendre X vers ∞. On aboutit à $3 = A + C$ d'où $A = -2$. Par conséquent :

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{5}{X+1}\,.$$

Exercice 12

Énoncé

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := 4x^3 - 5x^2 + x - 1$.
2. $f_2(x) := 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.
3. $f_3(x) := (x^2+1)(x^3-2x)$.
4. $f_4(x) := \frac{2x^2-3}{x^2+7}$.
5. $f_5(x) := \frac{2x-1}{x+1}$.
6. $f_6(x) := -x + 2 + \frac{2}{3x}$.
7. $f_7(x) := \frac{1}{x+x^2}$.
8. $f_8(x) := (2x+1)^2$.
9. $f_9(x) := \sqrt{x}(5x-3)$.
10. $f_{10}(x) := \log(\cos(2x))$.
11. $f_{11}(x) := \frac{x}{\sin(x)}$.
12. $f_{12}(x) := \log(x - \sqrt{x^2-1})$.
13. $f_{13}(x) := \log(\log(x))$.
14. $f_{14}(x) := \log(\log(\log(x)))$.

Correction

Correction du 1)

On a :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 4 \times 3 \times x^{3-1} - 5 \times 2 \times x^{2-1} + 1 \times x^{1-1} + 0 \\ &= 12x^2 - 10x + 1\,. \end{aligned}$$

Correction du 2)

On réécrit la fonction comme suit : $f_2(x) = 5x^3 - x^{-1} + 3x^{\frac{1}{2}}$. La dérivée est donc :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 5 \times 3 \times x^{3-1} - (-1) \times x^{-1-1} + 3 \times \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= 15x^2 + x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Correction du 3)

Ici, on dérive un produit. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(x^2+1)(x^3-2x)\right\} &= 2x\times(x^3-2x)+(x^2+1)\times(3x^2-2)\\ &= 2x^4-4x^2+3x^4+x^2-2\\ &= 5x^4-3x^2-2\,.\end{aligned}$$

À noter que l'on aurait pu calculer le produit avant de dériver : $f_3(x)=(x^2+1)(x^3-2x)=x^5-x^3-2x$ dont la dérivée donne bien $f_3'(x)=5x^4-3x^2-2$.

Correction du 4)

On dérive un quotient. On a donc :

$$\begin{aligned}f_4'(x) &= \frac{\overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^2-3\right)}^{=4x}\times(x^2+7)-(2x^2-3)\times\overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+7\right)}^{=2x}}{(x^2+7)^2}\\ &= \frac{4x^3+28x-(4x^3-6x)}{(x^2+7)^2}\\ &= \frac{34x}{(x^2+7)^2}\,.\end{aligned}$$

On aurait également pu commencer par décomposer en éléments simples :

$$\frac{2x^2-3}{x^2+7}=\frac{2X-3}{X+7}=A+\frac{B}{X+7}\,,$$

où $X=x^2$. En utilisant les techniques classiques, on trouvait $A=2$ et $B=-17$ d'où $f_4(x)=2-\frac{17}{x^2+7}$. La dérivée de cette fonction donne ensuite $f_4'(x)=0-17\times 2x\times\frac{-1}{(x^2+7)^2}=\frac{34x}{(x^2+7)^2}$.

Correction du 5)

Ici, on remarque $f_5(x)=2-3\times(x+1)^{-1}$. La dérivée est donc $f_5'(x)=(-3)\times(-1)\times(x+1)^{-2}=\frac{3}{(x+1)^2}$.

Correction du 6)

On réécrit la fonction comme suit $f_6(x)=-x+2+\frac{2}{3}x^{-1}$. On obtient alors la dérivée $f_6'(x)=-1-\frac{2}{3}x^{-2}=-1-\frac{2}{3x^2}$.

Correction du 7)

On pourrait décomposer en éléments simples pour obtenir $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ dont la dérivée est $f_7'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Utilisons plutôt la formule de dérivée d'un inverse :

$$f_7'(x)=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x+x^2\right)}{(x+x^2)^2}=-\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}\,.$$

Correction du 8)

On dérive un carré et il vient immédiatement $f_8'(x) = 2 \times (2x+1)^{2-1} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1) = 4(2x+1) = 8x+4$. On aurait aussi pu développer comme suit : $f_8(x) = 4x^2+4x+1$ dont la dérivée est bien $f_8'(x) = 8x+4$.

Correction du 9)

On va ici dériver le produit : $f_9'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-3) + 5\sqrt{x} = \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. On pourrait également développer comme suit : $f_9(x) = 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$. La dérivée est alors $f_9'(x) = \frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Correction du 10)

On dérive la composée de deux fonctions en posant $g(x) := \log(x)$ et $h(x) := \cos(2x)$: $f_{10}'(x) = h'(x) \times f'(g(x)) = -2\sin(2x) \times \frac{1}{\cos(2x)} = -\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x)$.

Correction du 11)

On dérive un quotient : $f_{11}'(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Correction du 12)

On dérive la composée de deux fonctions :

$$f_{12}'(x) = \frac{1 - \frac{1}{2} \times (2x) \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x - \sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,.$$

Correction du 13)

On dérive la composée de deux fonctions en posant $g(x) = h(x) := \log(x)$ d'où : $f_{13}'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\log(x)} = \frac{1}{x\log(x)}$.

Correction du 14)

On remarque $f_{14}(x) = \log(f_{13}(x))$ donc $f_{14}'(x) = \frac{f_{13}'(x)}{f_{13}(x)} = \frac{\frac{1}{x\log(x)}}{\log(\log(x))} = \frac{1}{x\log(x)\log(\log(x))}$.

Exercice 13

Énoncé

Étudier en fonction de α la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\mathrm{d}x$.

Correction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) := \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,.$$

La fonction est bien définie sur $]0;+\infty[$. Conséquemment, les difficultés quant à la convergence de l'intégrale sont en 0 et en $+\infty$. Or, la fonction est équivalente à $x^{\alpha-2}$ en l'infini. Elle est donc intégrable en l'infini si et seulement si $\alpha - 2 < -1$ c'est-à-dire si $\alpha < 1$.
Et, la fonction est équivalente à $x^{\alpha-1}$ en 0. Elle est donc intégrable en 0 si et seulement si $\alpha - 1 > -1$ c'est-à-dire si $\alpha > 0$.

En conclusion, l'intégrale est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

Exercice 14

Énoncé

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := \cos(3x) + 2\sin(5x)$.
2. $f_2(x) := 6\mathrm{e}^{-4x}$.
3. $f_3(x) := \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}$.
4. $f_4(x) := \frac{\log(x)^\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction

Correction du 1)

Les primitives de f_1 sont de la forme $F_1(x) := \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{2}{5}\cos(5x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Correction du 2)

Les primitives de f_2 sont de la forme $F_2(x) := -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-4x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Correction du 3)

En posant $u(x) := \mathrm{e}^x$, on remarque $f_3(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. Les primitives de f_3 sont donc de la forme $F_3(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Correction du 4)

En posant $u(x) := \log(x)$, on remarque $f_4(x) = u'(x) \times u(x)^\alpha$. Ainsi, si $\alpha \neq -1$, les primitives de f_4 sont de la forme $F_4(x) := \frac{1}{\alpha+1}\log(x)^{\alpha+1} + C$ où $C \in \mathbb{R}$; pour $x > 0$. Et, si $\alpha = -1$, les primitives de f_4 sont de la forme $F_4(x) := \log(|\log(x)|) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ et x varie dans $]0;1[$ ou dans $]1;+\infty[$.

Exercice 15

Énoncé

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) := x\sin(2x)$.
2) $f_2(x) := x^\alpha \log(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$; $x > 0$.
3) $f_3(x) := \cos(x)\log(1+\cos(x))$.
4) $f_4(x) := \sin(\log(x))$; $x > 0$.
5) $f_5(x) := \frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5}$.
6) $f_6(x) := \sin(3x)\cos(5x)$.
7) $f_7(x) := \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.
8) $f_8(x) := x^3\exp(x+1)$.
9) $f_9(x) := \sin(x)\cosh(x)$.

Correction

Correction du 1)

On utilise une intégration par parties avec $u(x) := x$ et $v'(x) := \sin(2x)$:

$$\int x\sin(2x)\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2}\cos(2x)\,.$$

Correction du 2)

On suppose d'abord $\alpha \neq -1$. On utilise une intégration par parties avec $u(x) := \log(x)$ et $v'(x) := x^\alpha$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\log(x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\log(x) - \int \frac{1}{\alpha+1}x^\alpha\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{\alpha+1}\log(x)}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Si $\alpha = -1$, on fait le changement de variables $u := \log(x)$ d'où $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. On a alors :

$$\int x^{-1}\log(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\left(\log(x)\right)^2\,.$$

Remarque

On peut montrer qu'il n'y a pas de réelle discontinuité autour de $\alpha = -1$ dans le résultat précédent. En effet, prenons $\alpha = -1+\epsilon$ et faisons ensuite tendre ϵ vers 0. On considère en particulier la primitive de $x^\alpha \log(x)$ qui s'annule en 1 :

$$\begin{aligned}\int_1^X x^\alpha \log(x)\mathrm{d}x &= \frac{X^{\alpha+1}\log(X)}{\alpha+1} - \frac{X^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}\\ &= \frac{X^\epsilon \log(X)}{\epsilon} - \frac{X^\epsilon - 1}{\epsilon^2}\\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\left\{\epsilon X^\epsilon \log(X) - X^\epsilon + 1\right\}\,.\end{aligned}$$

Procédons au développement limité de X^ϵ :

$$X^\epsilon = \exp\left\{\epsilon \log(X)\right\} = 1 + \epsilon\log(X) + \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\log(X)\right)^2 + o(\epsilon^2)\,.$$

Conséquemment, on a

$$\begin{aligned}&\int_1^X x^\alpha \log(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\left\{\epsilon + \epsilon^2\log(X) + o(\epsilon^2) - 1 - \epsilon\log(X) - \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\log(X)\right)^2 + o(\epsilon^2) + 1\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\log(X)\right)^2 + o(1)\,.\end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_1^X x^{-1+\epsilon}\log(x)\mathrm{d}x = \int_1^X x^{-1}\log(x)\mathrm{d}x\,.$$

Correction du 3)

On utilise une intégration par parties avec $u(x) := \log(1+\cos(x))$ et $v'(x) := \cos(x)$:

$$\begin{aligned}&\int \cos(x)\log\left(1+\cos(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) - \int \sin(x) \times \frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + \int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + \int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + \int \left(1-\cos(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + x - \sin(x)\,.\end{aligned}$$

Correction du 4)

On fait le changement de variables $u := \log(x)$. D'où $x = \mathrm{e}^u$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^u \mathrm{d}u$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\int \sin(\log(x))\,\mathrm{d}x &= \int \sin(u)\mathrm{e}^u \mathrm{d}u \\
&= \mathrm{Im}\left\{\int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})u}\mathrm{d}u\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})u}\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})u}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^u}{2}\mathrm{Im}\left\{\cos(u) + \mathrm{i}\sin(u) - \mathrm{i}\cos(u) + \sin(u)\right\} \\
&= \frac{\sin(u) - \cos(u)}{2}\mathrm{e}^u \\
&= \frac{\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))}{2}\mathrm{e}^{(\log(x))} \\
&= x\frac{\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))}{2}\,.
\end{aligned}$$

Autre méthode

On peut procéder directement à une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int \sin(\log(x))\,\mathrm{d}x &= \int 1 \times \sin(\log(x))\,\mathrm{d}x \\
&= x\sin(\log(x)) - \int x\frac{1}{x}\cos(\log(x))\mathrm{d}x \\
&= x\sin(\log(x)) - \int \cos(\log(x))\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

On procède à une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int \cos(\log(x))\,\mathrm{d}x &= \int 1 \times \cos(\log(x))\,\mathrm{d}x \\
&= x\cos(\log(x)) + \int x\frac{1}{x}\sin(\log(x))\mathrm{d}x \\
&= x\cos(\log(x)) + \int \sin(\log(x))\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\int \sin(\log(x))\,\mathrm{d}x &= x\sin(\log(x)) - \left(x\cos(\log(x)) + \int \sin(\log(x))\mathrm{d}x\right) \\
&= x\left(\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))\right) - \int \sin(\log(x))\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int \sin(\log(x))\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left(\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))\right)\,.$$

Correction du 5)

On doit d'abord décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On remarque que le degré du numérateur est 3 tandis que celui du dénominateur est 2. De plus, le dénominateur est irréductible dans $\mathbb{R}$. En effet, c'est une fonction polynômiale de degré 2 avec un discriminant égale à -64. Les pôles sont donc non réels. Conséquemment, on peut écrire

$$f_5(x) := \frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x+\delta}{4x^2-4x+5} .$$

On divise à gauche et à droite par x puis l'on fait tendre x vers l'infini. Il vient $1=\alpha$. On a donc :

$$\frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5} - x = \beta + \frac{\gamma x+\delta}{4x^2-4x+5}$$

ce qui donne

$$\frac{8x}{4x^2-4x+5} = \beta + \frac{\gamma x+\delta}{4x^2-4x+5} ,$$

ce qui signifie $\beta = 0$, $\gamma = 8$ et $\delta = 0$. En d'autres termes, la décomposition en éléments simples donne

$$\begin{aligned} f_5(x) := \frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5} &= x + \frac{8x}{4x^2-4x+5} \\ &= x + \frac{8x-4}{4x^2-4x+5} + \frac{4}{4x^2-4x+5} \\ &= x + \frac{8x-4}{4x^2-4x+5} + \frac{1}{x^2-x+\frac{5}{4}} \\ &= x + \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2-4x+5)}{4x^2-4x+5} + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1} \end{aligned}$$

Conséquemment :

$$\int f_5(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \log\left(4x^2-4x+5\right) + \arctan\left(x-\frac{1}{2}\right) .$$

Remarque : on ne met pas de valeurs absolues car $4x^2-4x+5>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Correction du 6)

On utilise ici les formules d'Euler pour linéariser :

$$\begin{aligned} f_6(x) &:= \sin(3x)\cos(5x) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\frac{\mathrm{e}^{5ix}+e^{-5ix}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{8ix}+e^{-2ix}-\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{-8ix}}{4\mathrm{i}} = \frac{\sin(8x)-\sin(2x)}{2} . \end{aligned}$$

Une primitive est donc $\int \sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x = \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(8x)}{16}$.

Remarque

On peut aussi appliquer directement la formule de linéarisation

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right] .$$

Autre méthode

On peut aussi procéder par des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
&\int \sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x = \sin(3x)\frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{5}\int 3\cos(3x)\sin(5x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) - \frac{3}{5}\int \cos(3x)\sin(5x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{5}\cos(3x)\cos(5x) - \int \frac{3}{5}\sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) + \frac{3}{25}\cos(3x)\cos(5x) + \frac{9}{25}\int \sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\left(1-\frac{9}{25}\right)\int \sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) + \frac{3}{25}\cos(3x)\cos(5x)\,,$$

d'où :

$$\int \sin(3x)\cos(5x)\mathrm{d}x = \frac{5}{16}\sin(3x)\sin(5x) + \frac{3}{16}\cos(3x)\cos(5x)\,.$$

On peut remarquer que le résultat est similaire au précédent. En effet :

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(8x)}{16} = \frac{1}{4}\cos(5x-3x) - \frac{1}{16}\cos(5x+3x) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos(3x)\cos(5x)+\sin(3x)\sin(5x)\right) - \frac{1}{16}\left(\cos(3x)\cos(5x)-\sin(3x)\sin(5x)\right) \\
&= \frac{3}{16}\cos(3x)\cos(5x) + \frac{5}{16}\sin(3x)\sin(5x)\,.
\end{aligned}$$

Correction du 7)

On a ici une fraction rationnelle. On regarde d'abord le dénominateur. Il s'agit du produit de deux fonctions polynômiales irréductibles dans $\mathbb{R}$ de degré 2. En effet, les discriminants sont -4 et -16. Donc, on peut écrire :

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+2x+2} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+2x+5}\,.$$

On multiplie par x^2+2x+2 des deux côtés et l'on obtient alors

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)+3} = \alpha x+\beta + (x^2+2x+2)\frac{\gamma x+\delta}{x^2+2x+5}\,.$$

Puis l'on fait tendre x vers z_0 une solution de l'équation x^2+2x+2. Ceci nous donne :

$$\frac{1}{3} = \alpha z_0 + \beta\,.$$

Or, $z_0 \notin \mathbb{R}$. Il vient immédiatement $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$. En procédant de même avec x^2+2x+5 et une de ses racines z_1, on obtient :

$$\frac{1}{-3} = \gamma z_1 + \delta\,,$$

ce qui implique $\gamma = 0$ et $\delta = -\frac{1}{3}$ car $z_1 \notin \mathbb{R}$. Ainsi, l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f_7(x) &:= \frac{1}{(x^2+2x+2)\,(x^2+2x+5)} \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+4}\right] \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{12}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{6}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de f_7 est

$$\begin{aligned}
\int f_7(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x^2+2x+2)\,(x^2+2x+5)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\arctan(x+1) - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Remarque

La décomposition en éléments simples aurait pu être faite plus rapidement. On pose $u := x^2+2x+2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} &= \frac{1}{u(u+3)} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+2x+5}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 8)

On peut procéder à des intégrations par parties. Toutefois, on va ici chercher directement une primitive de la forme $P(x)\mathrm{e}^{x+1}$ où P est une fonction polynômiale de même degré que $x \mapsto x^3$ à savoir une fonction polynômiale de la forme $P(x) := ax^3+bx^2+cx+d$. En d'autres termes, on résout l'équation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{x+1}\right) = x^3\mathrm{e}^{x+1}$, c'est-à-dire l'équation $P'(x)+P(x) = x^3$:

$$ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d) = x^3\,.$$

On a ici un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues. La matrice sous-jacente est triangulaire aussi la résolution est immédiate : $a = 1$, puis $b = -3$, puis $c = 6$ et $d = -6$. Une primitive de f_8 est donc

$$\int f_8(x)\mathrm{d}x := \int x^3\mathrm{e}^{x+1}\mathrm{d}x = \left(x^3-3x^2+6x-6\right)\mathrm{e}^{x+1}\,.$$

Correction du 9)

On utilise ici une intégration par parties avec $u'(x) = \cosh(x)$ et $v(x) := \sin(x)$. Rappelons par ailleurs $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ d'où $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$. On a ainsi :

$$\int f_9(x)\mathrm{d}x := \int \sin(x)\cosh(x)\mathrm{d}x = \sin(x)\sinh(x) - \int \cos(x)\sinh(x)\mathrm{d}x\,.$$

On refait une intégration par parties avec $u'(x) := \sinh(x)$ et $v(x) := \cos(x)$:

$$\begin{aligned}\int f_9(x)\mathrm{d}x &= \sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x) - \int \sin(x)\cosh(x)\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x) - \int f_9(x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Conséquemment, on en déduit :

$$\int \sin(x)\cosh(x)\mathrm{d}x = \frac{\sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x)}{2}\,.$$

Exercice 16

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.

2) $I_2 := \int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}$.

3) $I_3 := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

4) $I_4 := \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

5) $I_5 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$.

6) $I_6 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$.

7) $I_7 := \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

8) $I_8 := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\mathrm{d}x$.

Correction

Correction du 1)

La décomposition en éléments simples nous donne $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ dont une primitive sur l'intervalle $[1;3]$ est $\log(t) - \log(t+1)$. Il vient $I_1 = [\log(t) - \log(t+1)]_1^3 = \log\left(\frac{3}{2}\right)$.

Correction du 2)

On décompose en éléments simples et l'on obtient

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+2}\,.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left[\frac{1}{2}\log(t) - \log(t+1) + \frac{1}{2}\log(t+2)\right]_2^5 \\
&= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{t^2+2t}{t^2+2t+1}\right)\right]_2^5 \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{35}{36}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{8}{9}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{35}{36}\times\frac{9}{8}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{35}{32}\right)\,.
\end{aligned}$$

Correction du 3)

On peut calculer cette intégrale de deux manières. D'abord, on peut noter qu'il s'agit de l'aire d'un quart de disque donc immédiatement on a $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Sinon, on peut retrouver l'aire du quart de disque en utilisant le changement de variable $x = \sin(u)$ d'où $\mathrm{d}x = \cos(u)\mathrm{d}u$. Il vient donc

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2u))\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Correction du 4)

On procède ici à un changement de variable. Comme on a $\frac{1}{1+x^2}$ qui apparaît, on pense immédiatement à la fonction arctangente. Conséquemment, on pose $x =: \tan(u)$. D'où $\mathrm{d}x = \tan'(u)\mathrm{d}u = \frac{\sin'(u)\cos(u)-\sin(u)\cos'(u)}{\cos^2(u)}\mathrm{d}u = (1+\tan^2(u))\,\mathrm{d}u$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\tan^2(u)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Correction du 5)

On a une fraction rationnelle avec des fonctions trigonométriques. On pose $\mathrm{d}\omega(x) := \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$. Comme $\mathrm{d}\omega(\pi+x) \neq \mathrm{d}\omega(x)$, $\mathrm{d}\omega(-x) \neq \mathrm{d}\omega(x)$ et $\mathrm{d}\omega(\pi-x) \neq \mathrm{d}\omega(x)$, on fait le changement de variable $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Et, on a $x = 2\arctan(u)$ d'où $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$. Alors, on a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)+\sin(x)} = 2\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}} = \frac{2\mathrm{d}u}{1+2u-u^2}\,.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{2}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1-\sqrt{2})}$$

Une primitive de $\frac{2}{1+2u-u^2}$ est donc

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u &= \int \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1-\sqrt{2})}\right\}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{u-(1-\sqrt{2})}{u-(1+\sqrt{2})}\right| .\end{aligned}$$

Comme $\tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ et $\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)+\sin(x)} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{u-(1-\sqrt{2})}{u-(1+\sqrt{2})}\right|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\right) \\ &= \sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right) .\end{aligned}$$

Correction du 6)

On a une fraction rationnelle avec des fonctions trigonométriques. On pose $\mathrm{d}\omega(x) := \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$. On remarque $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$ donc on pose le changement de variable $u := \cos(x)$ d'où $\mathrm{d}u = -\sin(x)\mathrm{d}x$. Il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = -\int_1^0 u^2\mathrm{d}u = \int_0^1 u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3} .$$

Correction du 7)

Il s'agit ici de l'exemple du cours. On prend $u := \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ce qui donne $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$. Ainsi, on a $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\log|x| = d\log\left|\frac{1+u^2}{1-u^2}\right| = \mathrm{d}\log|1+u^2| - \mathrm{d}\log|1-u| - \mathrm{d}\log|1+u| = \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u + \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u - \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$. Conséquemment, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{2u^2}{1+u^2} + \frac{u}{1-u} - \frac{u}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\left[2-\frac{2}{1+u^2}\right] + \left[\frac{1}{1-u}-1\right] + \left[\frac{1}{1+u}-1\right]\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{2}{1+u^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\ &= -2\left[\arctan(x)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left[\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= -\frac{\pi}{3} + \log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right| \\ &= \log\left(\sqrt{3}+2\right) - \frac{\pi}{3} .\end{aligned}$$

Correction du 8)

La dernière intégrale se calcule comme suit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Exercice 17

Énoncé

Calculer, en passant en coordonnées polaires, les intégrales :
1) $I := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \exp\left\{-(x^2+y^2)\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En déduire la valeur de $A := \int_0^\infty \exp\left\{-x^2\right\} \mathrm{d}x$.
2) $J := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} x^2y^2 \exp\left\{-(x^2+y^2)\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En déduire la valeur de $B := \int_0^\infty x^2\exp\left\{-x^2\right\} \mathrm{d}x$.

Correction

Correction du 1)

En coordonnées polaires, on a $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ et le jacobien est le volume de la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant (volume) est égal à $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$. On a ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_{r=0}^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^\infty \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Puis, l'on a $A = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction du 2)

En coordonnées polaires, on a $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ et le jacobien est r. On a ainsi

$$\begin{aligned} J &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{r=0}^{+\infty} r^5\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right). \end{aligned}$$

Calculons d'abord l'intégrale en θ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

On calcule l'intégrale sur le rayon par intégration par parties. On pose $u'(r) := r\mathrm{e}^{-r^2}$ et $v(r) := r^4$. On a alors :

$$\int_{r=0}^{+\infty} r^5 e^{-r^2} \mathrm{d}r = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2} r^4\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2} \times 4r^3 \mathrm{d}r$$
$$= 2\int_0^{+\infty} r^3 \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r \,.$$

On procède à nouveau à une intégration par parties. On pose $u'(r) := 2r\mathrm{e}^{-r^2}$ et $v(r) := r^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{r=0}^{+\infty} r^5 \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^3 \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-r^2} r^2\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-r^2} \times 2r \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\infty} 2r\mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{\infty} \\
&= 1 \,.
\end{aligned}$$

D'où $J = \frac{\pi}{16}$. Puis, l'on en déduit la valeur de B. En effet, $B = \sqrt{J} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. On aurait en fait pu calculer B directement :

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} A \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \,.
\end{aligned}$$

Exercice 18

Énoncé

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1) $x'(t) - 3x(t) = 2$.
2) $x'(t) + 2x(t) = \mathrm{e}^{2t}$.
3) $x'(t) + x(t) = \log(t)$.
4) $x'(t) - 5x(t) = \mathrm{e}^{5t}$.
5) $x'(t) + 3t^2 x(t) = t^2$.
6) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$.
7) $(1+t^2)x'(t) - tx(t) = 1 + t + t^2$.

Correction

Correction du 1)

On réécrit :

$$x'(t) - 3x(t) = 2\,. \tag{2}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - 3x_0(t) = 0\,. \tag{3}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 - 3 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = 3$. Conséquemment, les solutions de l'équation (3) sont de la forme $x_0(t) = C\mathrm{e}^{3t}$ où C est une constante.
On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (2). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{3t}$. L'équation (2) devient alors

$$\lambda'(t)\mathrm{e}^{3t} + 3\lambda(t)\mathrm{e}^{3t} - 3\lambda(t)\mathrm{e}^{3t} = 2\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}\,,$$

dont $t \mapsto -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t} \times \mathrm{e}^{3t} = -\frac{2}{3}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients constants. Or, le second membre est une constante. Ainsi, on recherche une solution particulière sous la forme d'une constante $x_1(t) := \lambda$. Alors, on a $x_1'(t) = 0$. Ainsi, l'équation (2) devient

$$-3\lambda = 2\,,$$

d'où $x_1(t) := -\frac{2}{3}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{3t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := -\frac{2}{3}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (2) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto -\frac{2}{3} + C\mathrm{e}^{3t}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Correction du 2)

On réécrit :

$$x'(t) + 2x(t) = \mathrm{e}^{2t}\,. \tag{4}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) + 2x_0(t) = 0\,. \tag{5}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 + 2 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = -2$. Conséquemment, les solutions de l'équation (5) sont de la forme $x_0(t) = C\mathrm{e}^{-2t}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (4). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-2t}$. L'équation (4) devient alors

$$\lambda'(t)\mathrm{e}^{-2t} - 2\lambda(t)\mathrm{e}^{-2t} + 2\lambda(t)\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{2t}\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \mathrm{e}^{4t}\,,$$

dont $t \mapsto \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t} \times \mathrm{e}^{-2t} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients constants. Or, le second membre est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$. Ainsi, on recherche une solution particulière sous la forme $x_1(t) := \lambda\mathrm{e}^{2t}$ où λ est une constante. Alors, l'équation (4) devient

$$2\lambda\mathrm{e}^{2t} + 2\lambda\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}$$

d'où $\lambda = \frac{1}{4}$ donne une solution particulière. Ainsi, $x_1(t) := \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{-2t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (4) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{-2t}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Correction du 3)

On réécrit :

$$x'(t) + x(t) = \log(t)\,. \tag{6}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) + x_0(t) = 0\,. \tag{7}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 + 1 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = -1$. Conséquemment, les solutions de l'équation (7) sont de la forme $x_0(t) = C\mathrm{e}^{-t}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (6). Pour cela, on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-t}$. L'équation (6) devient alors

$$\lambda'(t)\mathrm{e}^{-t} - \lambda(t)\mathrm{e}^{-t} + \lambda(t)\mathrm{e}^{-t} = \log(t)\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \log(t)\mathrm{e}^{t}\,.$$

dont $t \mapsto \int_{s=1}^{t} \log(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := \int_{s=1}^{t} \log(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s \times e^{-t} = \int_{s=1}^{t} \log(s)\mathrm{e}^{s-t}\mathrm{d}s$ est une solution particulière.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{-t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := \int_{s=1}^{t} \log(s)\mathrm{e}^{s-t}\mathrm{d}s$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (6) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto \int_{s=1}^{t} \log(s)\mathrm{e}^{s-t}\mathrm{d}s + C\mathrm{e}^{-t}\,;\, C \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Remarque Ici, on ne peut pas déterminer une primitive à partir des fonctions usuelles.

Correction du 4)

On réécrit :

$$x'(t) - 5x(t) = \mathrm{e}^{5t}\,. \tag{8}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - 5x_0(t) = 0\,. \tag{9}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 - 5 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = 5$. Conséquemment, les solutions de l'équation (9) sont de la forme $x_0(t) = C\mathrm{e}^{5t}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (8). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{5t}$. L'équation (8) devient alors

$$\lambda'(t)\mathrm{e}^{5t} + 5\lambda(t)\mathrm{e}^{5t} - 5\lambda(t)\mathrm{e}^{5t} = \mathrm{e}^{5t}\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = 1\,,$$

dont $t \mapsto t$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := t \times \mathrm{e}^{5t} = t\mathrm{e}^{5t}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients constants. Or, le second membre est $t \mapsto \mathrm{e}^{5t}$. *On remarque que* 5 *est une solution de l'équation caractéristique de l'équation homogène associée. Conséquemment, on doit augmenter le degré.* Ainsi, on recherche une solution particulière sous la forme $x_1(t) := \lambda t\mathrm{e}^{5t}$. Alors, on a $x_1'(t) = \lambda\mathrm{e}^{5t} + 5x_1(t)$. Ainsi, l'équation (8) devient

$$\lambda\mathrm{e}^{5t} + 5x_1(t) - 5x_1(t) = \mathrm{e}^{5t}\,,$$

d'où $x_1(t) := t\mathrm{e}^{5t}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^{5t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := t\mathrm{e}^{5t}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (8) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto (t + C)\,\mathrm{e}^{5t}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Correction du 5)

On réécrit :

$$x'(t) + 3t^2x(t) = t^2\,. \tag{10}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients **non constants**. Et, comme le coefficient devant la dérivée du premier ordre est constant égal à 1 et donc ne s'annule jamais, on sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) + 3t^2x_0(t) = 0\,. \tag{11}$$

On met donc cette équation sous la forme d'une équation à variables séparées :

$$\frac{x_0'(t)}{x_0(t)} = -3t^2\,, \tag{12}$$

pour $x_0(t) \neq 0$. On intègre l'équation (12) et l'on a alors

$$\log|x_0(t)| = -t^3 + C\,,$$

où C est une constante. Conséquemment, il vient

$$x_0(t) = C'\mathrm{e}^{-t^3}\,,$$

où C' est une constante. On peut vérifier que cette fonction vérifie bien (11). Conséquemment, les solutions de l'équation (11) sont de la forme $x_0(t) = Ce^{-t^3}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (10). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-t^3}$. L'équation (10) devient alors

$$\lambda'(t)\mathrm{e}^{-t^3} - 3t^2\lambda(t)e^{-t^3} + 3t^2\lambda(t)\mathrm{e}^{-t^3} = t^2\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = t^2\mathrm{e}^{t^3}\,,$$

dont $t \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t^3}$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t^3} \times \mathrm{e}^{-t^3} = \frac{1}{3}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients non constants. Or, le second membre est $t \mapsto t^2$ et le coefficient devant le terme $x(t)$ dans l'équation est un monôme de degré 2. On teste donc une entrée constante : $x_1(t) = C$. Alors, on a $x_1'(t) = 0$. Ainsi, l'équation (10) devient

$$3t^2C = t^2\,,$$

d'où $x_1(t) := \frac{1}{3}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-t^3}\right)$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := \frac{1}{3}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (10) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \frac{1}{3} + C\mathrm{e}^{-t^3}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Correction du 6)

On réécrit :

$$x'(t) - x(t) = \sin(t)\,. \tag{13}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - x_0(t) = 0\,. \tag{14}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 - 1 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = 1$. Conséquemment, les solutions de l'équation (14) sont de la forme $x_0(t) = C\mathrm{e}^t$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (13). Pour cela, on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^t$. L'équation (13) devient alors

$$\lambda'(t)\mathrm{e}^t + \lambda(t)\mathrm{e}^t - \lambda(t)\mathrm{e}^t = \sin(t)\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,.$$

On cherche maintenant une primitive de $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-t}$. On peut procéder à une intégration par parties ou on peut aussi passer en complexes. Passons en complexes :

$$\begin{aligned}
\int \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \mathrm{Im}\left\{\int \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\mathrm{d}t\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}}{\mathrm{i}-1}\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{(-i-1)(\cos(t)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{i}\sin(t)\mathrm{e}^{-t})}{2}\right\} \\
&= \frac{-\cos(t) - \sin(t)}{2}\mathrm{e}^{-t}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $x_1(t) := \frac{-\cos(t)-\sin(t)}{2}\mathrm{e}^{-t} \times \mathrm{e}^{t} = -\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$ est une solution particulière.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \mathrm{e}^t)$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := -\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (13) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto -\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2} + C\mathrm{e}^t\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Correction du 7)

On réécrit :

$$(1+t^2)x'(t) - tx(t) = 1 + t + t^2\,. \tag{15}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients non constants. Le terme devant $x'(t)$ étant une fonction, la première chose à faire est de diviser par ce terme à savoir $1+t^2$. Or, la fonction $t \mapsto 1+t^2$ est non nulle. On peut donc diviser sans se poser de questions sur l'intervalle d'étude. On a une nouvelle équation :

$$x'(t) - \frac{t}{1+t^2}x(t) = 1 + \frac{t}{1+t^2}\,. \tag{16}$$

On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - \frac{t}{1+t^2}x_0(t) = 0\,. \tag{17}$$

On met donc cette équation sous la forme d'une équation à variables séparées :

$$\frac{x_0'(t)}{x_0(t)} = \frac{t}{1+t^2}\,, \tag{18}$$

pour $x_0(t) \neq 0$. On intègre l'équation (18) et l'on a alors

$$\log|x_0(t)| = C + \frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right)\,,$$

où C est une constante. Conséquemment, il vient

$$x_0(t) = C'\sqrt{1+t^2}\,,$$

où C' est une constante. On peut vérifier que cette fonction vérifie bien (17). Conséquemment, les solutions de l'équation (17) sont de la forme $x_0(t) = C\sqrt{1+t^2}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (16). Pour cela, on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\sqrt{1+t^2}$. L'équation (16) devient alors

$$\lambda'(t)\sqrt{1+t^2} = 1 + \frac{t}{1+t^2}\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + t\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

On intègre maintenant cette fonction. Or, une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est la fonction $t \mapsto \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$. Et, une primitive de $t \mapsto t\,(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Ainsi, $x_1(t) := \left(\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \times \sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+t^2}\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) - 1$ est une solution particulière.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \sqrt{1+t^2}\right)$. Et, on a une solution particulière

$$x_1(t) := \sqrt{1+t^2}\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) - 1\,.$$

Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (10) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \sqrt{1+t^2}\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) - 1 + C\sqrt{1+t^2}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Exercice 19

Énoncé

Résoudre ces différentes équations différentielles du second ordre :

1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}$.

2) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}$.

3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t)$.

Correction

Correction du 1)

On réécrit :

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}\,. \tag{19}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension deux. On résout donc d'abord l'équation homogène associée

$$x_0''(t) - 3x_0'(t) + 2x_0(t) = 0\,. \tag{20}$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2. L'ensemble des solutions de l'équation (20) est donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^t\,;\, t \mapsto e^{2t})$.

On cherche maintenant une solution particulière x_1. On devine le signal d'entrée à partir du signal de sortie. La sortie est $2e^{-t}$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $x_1(t) := \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation (19) devient alors

$$(-1)^2\lambda e^{-t} - 3 \times (-1)\lambda e^{-t} + 2\lambda e^{-t} = 2e^{-t}\,,$$

ce qui donne $\lambda = \frac{1}{3}$. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (19) est

$$\mathcal{S} := x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \frac{1}{3}e^{-t} + \lambda e^t + \mu e^{2t}\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}_{,}\,.$$

Correction du 2)

On réécrit :

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}\,. \tag{21}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension deux. On résout donc d'abord l'équation homogène associée

$$x_0''(t) - 4x_0'(t) + 4x_0(t) = 0\,. \tag{22}$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = 0$ dont la solution double est 2. L'ensemble des solutions de l'équation (22) est donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{2t}\,;\, t \mapsto te^{2t})$.

On cherche maintenant une solution particulière x_1. On devine le signal d'entrée à partir du signal de sortie. La sortie est une fonction polynômiale de degré 1 multipliée par l'exponentielle de $2t$. Or, 2 est solution double de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme $x_1(t) := (at^3 + bt^2)\mathrm{e}^{2t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation (21) devient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(at^3+bt^2\right)\mathrm{e}^{2t} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(at^3+bt^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2t}\right) + \left(at^3+bt^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\mathrm{e}^{2t}\right)\\
&-4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(at^3+bt^2\right)\mathrm{e}^{2t} - 4(at^3+bt^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2t}\right)\\
&+4(at^3+bt^2)\mathrm{e}^{2t}\\
&=(3t-1)\mathrm{e}^{2t}\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne $6at + 2b = 3t - 1$ d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (21) est

$$\mathcal{S} := x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + \lambda t + \mu\right)\mathrm{e}^{2t}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}_, .$$

Correction du 3)

On réécrit :

$$x''(t) + x(t) = \cos(2t)\,. \tag{23}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension deux. On résout donc d'abord l'équation homogène associée

$$x_0''(t) + x_0(t) = 0\,. \tag{24}$$

L'équation caractéristique est

$$X^2 + 1 = 0\,,$$

dont les solutions sont i et $-$i. L'ensemble des solutions de l'équation (24) est donc engendré par la famille $(t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,;\ t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$.

Comme on résout sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 := \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \cos(t)\,;\ t \mapsto \sin(t))$.
On cherche maintenant une solution particulière x_1. On devine le signal d'entrée à partir du signal de sortie. La sortie est $\cos(2t) = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{2}$. Comme ni 2i ni -2i ne sont des racines de $X^2 + 1$, on cherche alors une solution particulière sous la forme $x_1(t) = \lambda\cos(2t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation (23) devient alors

$$(\lambda - 4\lambda)\cos(2t) = \cos(2t)\,,$$

ce qui donne $\lambda = -\frac{1}{3}$. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (23) est

$$\mathcal{S} := x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}_, .$$

Exercice 20

Énoncé

Étudier la convergence des suites u dont le terme général est :

1. $u_n := \frac{2n-4}{3n+5}$.
2. $u_n := n^3 - 2n^2$.
3. $u_n := \frac{\log(n)}{n}$.
4. $u_n := n^2 - n\log(n)$.
5. $u_n := n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. $u_n := n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
7. $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
8. $u_n := \frac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geq 2$.
9. $u_n := (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.
10. $u_n := \sqrt[n]{n}$.
11. $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
12. $u_n := \frac{2^n}{n^2}$.
13. $u_n := \frac{n!}{2^n}$.
14. $u_n := \frac{n!}{n^n}$.
15. $u_n := \frac{n}{2^n}$.

Correction

Correction du 1)

On factorise le numérateur et le dénominateur par n et l'on obtient la limite :

$$u_n = \frac{2n-4}{3n+5} = \frac{n\left(2 - \frac{4}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{2 - \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n}} \longrightarrow \frac{2}{3}.$$

On peut aussi opter pour une méthode avec les équivalents. Le numérateur est équivalent à $2n$ et le dénominateur à $3n$ donc le quotient est équivalent à $\frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$. La limite est donc $\frac{2}{3}$.

Correction du 2)

Le terme dominant est n^3 et il tend vers $+\infty$ donc la limite est $+\infty$.

Correction du 3)

Soit la fonction $\varphi(t) := 2\sqrt{t} - \log(t)$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$. On a $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} \geq 0$ pour tout $t \geq 1$. Or, $\varphi(1) = 2 > 0$ donc $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \geq 1$. Ainsi, $\log(t) < 2\sqrt{t}$ pour tout $t \geq 1$. Ainsi, on a $\frac{\log(t)}{t} \leq \frac{2}{\sqrt{t}}$ lorsque $t \geq 1$. Puis, l'on en déduit la convergence de $\frac{\log(n)}{n}$ quand n tend vers l'infini.

Correction du 4)

On factorise par n^2 : $u_n = n^2\left(1 - \frac{\log(n)}{n}\right)$. Le facteur $1 - \frac{\log(n)}{n}$ converge vers 1 tandis que n^2 tend vers l'infini. La limite est donc $+\infty$.

Correction du 5)

On réécrit :

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)-\sin(0)}{h-0} = \sin'(0)\,.$$

La limite est donc $\cos(0) = 1$.

Correction du 6)

Ici, on ne peut pas identifier avec $\cos'(0)$ car $\cos(0) = 1 \neq 0$. En revanche, le facteur n tend vers l'infini alors que $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 1. La limite est donc $+\infty$.

Correction du 7)

On procède par l'astuce suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\,.
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ tend vers l'infini. Conséquemment, la limite de la suite u est 0.
On aurait également pu procéder par un développement limité. En effet :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

ce qui tend également vers 0.

Correction du 8)

Quel que soit $n \geq 2$, on note : $n + (-1)^n \geq n-1$ donc pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$. La suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n\geq 2}$ tend vers 0 donc la suite u_n tend vers 0.

Correction du 9)

$(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$. La suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ tend vers 0 donc la suite de terme général $1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 1. Puis, $\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1. Ainsi, la suite u_n tend vers 3.
Remarque : on peut voir u_n comme la norme n de $(2;3)$ et l'on a ainsi prouvé $\lim\limits_{n\to\infty} ||(2;3)||_n = 3 = ||(2;3)||_\infty$.

Correction du 10)

Par définition, on a $u_n = \exp\left\{\frac{\log(n)}{n}\right\}$. On sait que $\frac{\log(n)}{n}$ tend vers 0 donc u_n converge vers $\mathrm{e}^0 = 1$.

Correction du 11)

La suite de terme général $1+\frac{1}{n}$ tend vers 1. Ainsi, on serait tenté de dire que la limite est 1^∞. Ceci est une forme indéterminée !
On utilise à nouveau l'exponentielle :

$$u_n = \exp\left\{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right\}.$$

En procédant comme dans le 5), il vient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = f'(0)$$

avec $f(x) := \log(1+x)$. Donc $f'(0) = 1$. On en déduit que la suite u converge vers $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Correction du 12)

On écrit :
$$\frac{2^n}{n^2} = \exp\{n\log(2) - 2\log(n)\} = \exp\left\{n\log(2)\left(1-\frac{2}{\log(2)}\frac{\log(n)}{n}\right)\right\}$$
La suite de terme général $\left(1-\frac{2}{\log(2)}\frac{\log(n)}{n}\right)$ converge vers 1. Par conséquent, la suite de terme général $n\log(2)\left(1-\frac{2}{\log(2)}\frac{\log(n)}{n}\right)$ tend vers $+\infty$ si bien que u converge vers $+\infty$.

Correction du 13)

On met sous la forme d'un produit de n facteurs :

$$\frac{n!}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=3}^{n-1}\frac{k}{2}\right)\times\frac{n}{2}.$$

Pour tout $3 \le k \le n-1$, on a $\frac{k}{2} > 1$ donc $u_n > \frac{n}{4}$. Or, la suite de terme général $\frac{n}{4}$ tend vers $+\infty$. Conséquemment, la suite u tend vers $+\infty$.

Correction du 14)

On procède de la même manière :

$$\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{k}{n} \, .$$

Pour tout $2 \leq k \leq n-1$, on a $\frac{k}{n} \leq 1$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Or, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Conséquemment, la suite u tend vers 0.
On pourrait également utiliser la formule de Sterling :

$$n! = n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \, (1 + o(1))$$

d'où $\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \, (1 + o(1))$.

Correction du 15)

On utilise le résultat du **12)** : $u_n = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{2^n}{n^2}}$. La suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et la suite de terme général $\frac{2^n}{n^2}$ tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$u_n = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2^n}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{+\infty} = 0 \, .$$

On en déduit que u converge vers 0.

Exercice 21

Énoncé

Étudier la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 3$ et $3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$.

Remarque

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Cela signifie notamment que l'ensemble des suites qui vérifient cette formule de récurrence est un espace vectoriel de degré 2 ce qui explique pourquoi on a besoin de deux conditions (u_0 et u_1) pour décrire entièrement la suite.

Correction

L'équation caractéristique de cette suite est

$$3X^2 - 4X + 1 = 0\,.$$

Les solutions de cette équation sont 1 et $\frac{1}{3}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n = \lambda \times (1)^n + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n\,.$$

Il reste à trouver λ et μ. Pour cela, on se sert des valeurs initiales. On a le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 5 \\ \lambda + \frac{\mu}{3} = 3 \end{array}\right.\,.$$

On trouve ainsi $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ d'où

$$u_n = 2 + 3^{1-n}\,.$$

On en déduit immédiatement que la suite u est décroissante et converge vers 2.

Exercice 22

Énoncé

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions suivante :

$$\begin{array}{rccl} f_n & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) := \frac{x^n+1}{x^2+1} \end{array} .$$

Correction

Convergence simple

Si $|x| < 1$, $x^n + 1$ converge vers 1. Ainsi, pour tout $x \in]-1; 1[$, $f_n(x)$ converge vers $\frac{1}{x^2+1}$.
Si $x = 1$, $x^n + 1 = 2$ et $x^2 + 1 = 2$. Ainsi, $f_n(1)$ converge vers 1.
Si $x > 1$, $x^n + 1$ converge vers $+\infty$. Ainsi, pour tout $x > 1$, $f_n(x)$ converge vers $+\infty$.
Puis, si $x \leq -1$, $x^n + 1$ ne converge pas d'où $f_n(x)$ ne converge pas.

Ainsi, la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccl} f_n & :]-1; 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) := \frac{x^n+1}{x^2+1} \end{array}$$

converge simplement vers la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & :]-1; 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array} .$$

Convergence uniforme

La fonction f n'est pas continue en 1. On en déduit immédiatement que la convergence n'est pas uniforme. Et, si l'on se restreint à l'intervalle $]-1; 1[$, elle ne l'est pas non plus. En effet,

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_\infty &= \sup_{x \in]-1;1[} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in]-1;1[} \left| \frac{x^n}{x^2+1} \right| . \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $||f_n - f||_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conséquemment, il n'y a pas de convergence uniforme.

En revanche, on peut prouver que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle fermé et borné (compact) inclus dans $]-1; 1[$. Remarque : il faut donc toujours mentionner le domaine sur lequel il y a une convergence uniforme.

Exercice 23

Énoncé

Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

1. $u_n := \frac{n}{3n-1}$.
2. $u_n := \frac{1}{2^n-3}$.
3. $u_n := \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
4. $u_n := \frac{2^n}{n^{10}}$.
5. $u_n := \frac{1}{n\log(n)}$ pour $n \geq 2$.
6. $u_n := (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction

Correction du 1)

Le numérateur est équivalent à n et le dénominateur est équivalent à $3n$ donc u_n converge vers $\frac{1}{3} \neq 0$. La série n'est donc pas convergente.

Correction du 2)

On utilise le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n-3}{2^{n+1}-3} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{3}{2^n}}{1-\frac{3}{2^{n+1}}} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1\,.$$

On aurait aussi pu utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs (pour $n \geq 2$) vu que $\frac{1}{2^n-3} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ dès que $n \geq 2$.

Correction du 3)

On utilise ici le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\longrightarrow 1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} < 1\,.$$

La série est donc convergente.

Correction du 4)

La série est divergente car le terme général u_n tend vers l'infini.

Correction du 5)

On ne peut pas utiliser le critère de Cauchy. En effet $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow 1$. De même, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ donc on ne peut pas utiliser le critère de D'Alembert. Comme les termes sont positifs, on utilise la comparaison avec l'intégrale. Soit $f(x) := \frac{1}{x\log(x)}$ pour $x \geq 2$. La fonction f est définie sur $[2;+\infty[$ positive et sa limite est 0 en l'infini. De plus, la fonction $x \mapsto x\log(x)$ est strictement croissante donc f est décroissante strictement. Conséquemment, on peut utiliser le théorème de comparaison avec une intégrale. On calcule donc

$$\begin{aligned}
\int_2^R f(x)\mathrm{d}x &= \int_2^R \frac{\mathrm{d}x}{x\log(x)} \\
&= \int_2^R \frac{\mathrm{d}\log(x)}{\log(x)} \\
&= \int_{\log(2)}^{\log(R)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= (\log(\log(R)) - \log(\log(2))) \longrightarrow +\infty\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale diverge et il en est alors de même pour la série.

Correction du 6)

La série est alternée. On lui applique donc le théorème des séries alternées. On vérifie que les axiomes sont vérifiés. La suite $\frac{\log(n)}{n}$ tend vers 0 en décroissant (à partir d'un certain rang). En effet, soit $f(x) := \frac{\log(x)}{x}$ alors $f'(x) = \frac{1-\log(x)}{x^2} < 0$ dès que $x \geq 3$. Ainsi, la série $\left(\Sigma(-1)^n \frac{\log(n)}{n}\right)_{n\geq 3}$ est convergente. Comme la nature de la convergence ne dépend pas des premiers termes de la série, on en déduit la convergence de la série $\left(\Sigma(-1)^n \frac{\log(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 24

Énoncé

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Correction

Correction du 1)

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$. On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \longrightarrow \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 2)

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+2}$. On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - 2\frac{1}{2} - 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{n+1}\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 3)

On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\\
&\sum_{k=2}^{n} \log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\
&\sum_{k=2}^{n} \log\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\\
&\sum_{k=2}^{n} \left(\log(k-1)+\log(k+1)-2\log(k)\right)\\
&=\sum_{k=2}^{n}\log(k-1)+\sum_{k=2}^{n}\log(k+1)-2\sum_{k=2}^{n}\log(k)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\log(k)+\sum_{k=3}^{n+1}\log(k)-2\sum_{k=2}^{n}\log(k)\\
&=\log(2)+\sum_{k=3}^{n-1}\log(k)+\sum_{k=3}^{n-1}\log(k)+\log(n)+\log(n+1)\\
&\qquad -2\log(2)-2\sum_{k=3}^{n-1}\log(k)-2\log(n)\\
&=-\log(2)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow -\log(2)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 25

Énoncé

Donner le rayon de convergence R et la fonction somme des séries entières de terme général u_n et étudier le cas où $x = \pm R$:

1. $u_n(x) := \frac{x^n}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$.
2. $u_n(x) := \frac{x^n}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$.

Correction

Première série

Comme les termes sont strictement positifs, on peut calculer le rayon de convergence R avec la formule suivante :

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty\,.$$

La série converge donc sur tout $\mathbb{R}$ (et sur tout $\mathbb{C}$ en fait).
On peut donc écrire $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x\mathrm{e}^x$.

Deuxième série

Comme les termes sont strictement positifs, on peut calculer le rayon de convergence R avec la formule suivante :

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1\,.$$

La série converge donc sur l'intervalle $]-1;1[$ (et sur tout le disque unité **ouvert** dans $\mathbb{C}$ en fait).
On peut donc écrire $S(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$. De plus, la fonction S est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$, et l'on peut dériver terme à terme :

$$S''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Il suffit alors d'intégrer la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ deux fois. On obtient :

$$S'(x) = -\log(1-x)$$

puis en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
S(x) &= -\int_0^x \log(1-t)\mathrm{d}t \\
&= -\left[t\log(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t \\
&= -x\log(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right)\mathrm{d}t \\
&= -x\log(1-x) + \log(1-x) + x\,.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à étudier ce qu'il se passe en $x = 1$ et $x = -1$.

Si on regarde la fonction somme, on voit

$$\lim_{x \to -1^+} S(x) = 2\log(2) - 1\,.$$

Mais aussi :

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = 1\,.$$

En effet, $\lim\limits_{h \to 0} h\log(h) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{X}\log\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\log(X)}{X} = 0$.

On regarde maintenant la série avec $x = 1$ et avec $x = -1$. On sait que les séries sont convergentes car la valeur absolue du terme principal est $\frac{1}{n(n-1)}$ ce qui est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (en utilisant le théorème de comparaison avec une intégrale). Avec $x = 1$, on peut procéder à un télescopage comme dans l'exercice 24 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 = \lim_{x \to 1^-} S(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour prouver la convergence de la série entière lorsque $x = -1$, on utilise le théorème des séries alternées. En effet, la quantité $\frac{1}{n(n-1)}$ tend vers 0 en décroissant. On obtient par ailleurs le résultat :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\log(2) - 1\,.$$

Remarque

Lorsque l'on a une série entière, on peut calculer sa somme et la mettre sous une forme analytique sur le domaine de convergence. Par exemple, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pour tout $x \in]-1;1[$. Mais l'existence de $f(x_0)$ ne suffit pas pour justifier que la série converge si $x_0 \notin]-1;1[$. En effet :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n}_{\text{n'existe pas}} \neq \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n}_{=+\infty} \neq \frac{1}{1-2} = -1\,.$$

Exercice 26

Énoncé

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$.
2) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge.

Correction

Correction du 1) et 2) simultanément

Si $\mathrm{e}^x \leq 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ diverge car le terme général tend vers $+\infty$. Au contraire, si $x > 0$ (ce qui implique $\mathrm{e}^x > 1$), la série converge. Ainsi, la série converge sur $\mathbb{R}_+^*$.

On calcule $f(x)$ maintenant. On remarque $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ny^n$ où $y := \mathrm{e}^x$. Calculons $g(y) := \sum_{n=0}^{\infty} ny^n$ pour $y \in]0;1[$. On remarque $g(y) = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{y}{(1-y)^2}$ d'où $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}$.

On en déduit la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$ mais la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.