

Bases Indispensables des Mathématiques

Résolution des Systèmes linéaires

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

- 1 Fil rouge
- 2 Pivot de Gauss
- 3 Remarques
- 4 Sous forme matricielle
- 5 Règles du pivot

- 1 Fil rouge
- 2 Pivot de Gauss
- 3 Remarques
- 4 Sous forme matricielle
- 5 Règles du pivot

Problème

Trouver tous les quadruplets de nombres réels (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & (E_1) \\ x + y - z - t = 2 & (E_2) \\ x - y + z - t = 4 & (E_3) \\ x - y - z + t = 8 & (E_4) \end{cases}$$

Problème

Trouver tous les quadruplets de nombres réels (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & (E_1) \\ x + y - z - t = 2 & (E_2) \\ x - y + z - t = 4 & (E_3) \\ x - y - z + t = 8 & (E_4) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Il est linéaire, car chaque équation est du type $ax + by + cz + dt = e$. En particulier, il ne figure ni produit, ni puissance des inconnues.

Problème

Trouver tous les quadruplets de nombres réels (x, y, z, t) tels que

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & (E_1) \\ x + y - z - t = 2 & (E_2) \\ x - y + z - t = 4 & (E_3) \\ x - y - z + t = 8 & (E_4) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Il est linéaire, car chaque équation est du type $ax + by + cz + dt = e$. En particulier, il ne figure ni produit, ni puissance des inconnues.

L'objet de ce cours est de décrire une méthode systématique de résolution de ce type de système, appelée **méthode du pivot de Gauss**.

- 1 Fil rouge
- 2 Pivot de Gauss**
- 3 Remarques
- 4 Sous forme matricielle
- 5 Règles du pivot

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2) , (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1) . En effet, le pivot est sur la première équation.
- On remplace (E_2) par $(E_2) - (E_1)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) - (E_1)$.
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_1)$.

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2) , (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1) . En effet, le pivot est sur la première équation.
- On remplace (E_2) par $(E_2) - (E_1)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) - (E_1)$.
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_1)$.

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z + t & = & 0 \quad (E_1) \\ & - & 2z - 2t = 2 \quad (E_2) - (E_1) \\ & - & 2y \quad - 2t = 4 \quad (E_3) - (E_1) \\ & - & 2y - 2z \quad = 8 \quad (E_4) - (E_1) \end{array} \right.$$

Étape 2

On choisit **UNE AUTRE LIGNE** en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue y , on choisit la troisième ligne. On élimine alors l'inconnue y des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_2) par (E_2) .
- On remplace (E_3) par (E_3) .
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_3)$.

Étape 2

On choisit **UNE AUTRE LIGNE** en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue y , on choisit la troisième ligne. On élimine alors l'inconnue y des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_2) par (E_2) .
- On remplace (E_3) par (E_3) .
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_3)$.

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & + & z & = & 2 & (E_1) + \frac{1}{2}(E_3) \\ & - & 2z & - & 2t & = 2 & (E_2) \\ & - & 2y & & - & 2t & = 4 & (E_3) \\ & & - & 2z & + & 2t & = 4 & (E_4) - (E_3) \end{array} \right.$$

Étape 3

On choisit **UNE AUTRE LIGNE** (différente de (E_1) et de (E_3)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue z , on choisit la deuxième ligne. On élimine alors l'inconnue z des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_2) par (E_2) .
- On remplace (E_3) par (E_3) .
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_2)$.

Étape 3

On choisit **UNE AUTRE LIGNE** (différente de (E_1) et de (E_3)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue z , on choisit la deuxième ligne. On élimine alors l'inconnue z des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_2) par (E_2) .
- On remplace (E_3) par (E_3) .
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_2)$.

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & & - & t & = & 3 & (E_1) + \frac{1}{2}(E_2) \\ & & - & 2z & - & 2t & = & 2 & (E_2) \\ & - & 2y & & - & 2t & = & 4 & (E_3) \\ & & & & + & 4t & = & 2 & (E_4) - (E_2) \end{array} \right.$$

Étape 4

On choisit **UNE AUTRE LIGNE** (différente de (E_1) , de (E_3) et de (E_2)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue t , on choisit la quatrième ligne. On élimine alors l'inconnue t des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{4}(E_4)$.
- On remplace (E_2) par $(E_2) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_4) par (E_4) .

Étape 4

On choisit **UNE AUTRE LIGNE** (différente de (E_1) , de (E_3) et de (E_2)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue t , on choisit la quatrième ligne. On élimine alors l'inconnue t des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{4}(E_4)$.
- On remplace (E_2) par $(E_2) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_4) par (E_4) .

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & & & = & \frac{7}{2} & (E_1) + \frac{1}{4}(E_4) \\ & - & 2z & = & 3 & (E_2) + \frac{1}{2}(E_4) \\ & - & 2y & = & 5 & (E_3) + \frac{1}{2}(E_4) \\ & & & + & 4t & = & 2 & (E_4) \end{array} \right.$$

Étape 5

On divise les quatre équations de sorte à ce que le coefficient devant l'inconnue soit 1. Et, l'on réordonne. En d'autres termes :

- On remplace (E_1) par (E_1) .
- On remplace (E_2) par $-\frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_3) par $-\frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_4) par $\frac{1}{4}(E_4)$.

Étape 5

On divise les quatre équations de sorte à ce que le coefficient devant l'inconnue soit 1. Et, l'on réordonne. En d'autres termes :

- On remplace (E_1) par (E_1) .
- On remplace (E_2) par $-\frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_3) par $-\frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_4) par $\frac{1}{4}(E_4)$.

Le système d'équations est alors résolu :

$$\begin{cases} x & & & = & \frac{7}{2} & (E_1) \\ & y & & = & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}(E_3) \\ & & z & = & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}(E_2) \\ & & & t & = & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(E_4) \end{cases}$$

- 1 Fil rouge
- 2 Pivot de Gauss
- 3 Remarques**
- 4 Sous forme matricielle
- 5 Règles du pivot

Quelques remarques

Autres méthodes

Il y a d'autres méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires : la méthode de Cramer utilisant le déterminant, l'inversion des matrices, la méthode de substitution.

Quelques remarques

Autres méthodes

Il y a d'autres méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires : la méthode de Cramer utilisant le déterminant, l'inversion des matrices, la méthode de substitution.

Vitesse de l'algorithme

Mais la méthode la plus rapide (dans le cas général) qui existe est la méthode du pivot de Gauss.

Quelques remarques

Autres méthodes

Il y a d'autres méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires : la méthode de Cramer utilisant le déterminant, l'inversion des matrices, la méthode de substitution.

Vitesse de l'algorithme

Mais la méthode la plus rapide (dans le cas général) qui existe est la méthode du pivot de Gauss.

Systèmes à n équations à p inconnues

On procède de la même manière lorsque l'on a un système de n équations à p inconnues.

- 1 Fil rouge
- 2 Pivot de Gauss
- 3 Remarques
- 4 Sous forme matricielle**
- 5 Règles du pivot

Notation matricielle

Pour accélérer encore la méthode, on ne note pas les inconnues. Le système initial s'écrit comme suit :

Notation matricielle

Pour accélérer encore la méthode, on ne note pas les inconnues. Le système initial s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (L_1) \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & (L_2) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & (L_3) \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 8 & (L_4) \end{array}$$

Notation matricielle

Pour accélérer encore la méthode, on ne note pas les inconnues. Le système initial s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (L_1) \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & (L_2) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & (L_3) \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 8 & (L_4) \end{array}$$

On encadre le pivot que l'on choisit puis l'on applique les opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & (L_1) \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & (L_2) - (L_1) \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 & (L_3) - (L_1) \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 & (L_4) - (L_1) \end{array}$$

Notation matricielle 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que tout à l'heure :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_3) \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & (L_2) \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 4 & (L_3) \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & (L_4) - (L_3) \end{array}$$

Notation matricielle 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que tout à l'heure :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_3) \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & (L_2) \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 4 & (L_3) \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & (L_4) - (L_3) \end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 3 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_2) \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & 2 & (L_2) \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 4 & (L_3) \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & (L_4) - (L_2) \end{array}$$

Notation matricielle 3

Puis :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 3 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 5 & (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & (L_4) \end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 3 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 5 & (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & (L_4) \end{array}$$

Déterminant

A ce moment de l'algorithme, la valeur absolue du produit des pivots est égal à la valeur absolue du déterminant de la matrice initiale.

Et enfin :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & (L_1) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}(L_3) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}(L_2) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(L_4) \end{array}$$

Et enfin :

$$\begin{array}{cccc|cl}
 \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & (L_1) \\
 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}(L_3) \\
 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}(L_2) \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(L_4)
 \end{array}$$

Remarque

Si l'on avait mis la matrice identité à droite au début de l'algorithme, on aurait trouvé l'inverse de la matrice initiale à droite du trait vertical.

- 1 Fil rouge
- 2 Pivot de Gauss
- 3 Remarques
- 4 Sous forme matricielle
- 5 Règles du pivot

Quelques règles à savoir

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.
- On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.
- On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.
- Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.
- On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.
- Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

La réduction du tableau des coefficients est terminée lorsqu'on ne peut plus choisir de nouveau pivot en respectant les règles ci-dessus.