

Bases Indispensables des Mathématiques

Les nombres complexes

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

1 Introduction

- Définition de $\mathbb{C}$
- Deux systèmes de coordonnées

2 Calculs

3 Module et Argument

- Caractérisation du module et de l'argument
- Propriétés basiques
- Formules classiques

4 Équations algébriques

- Racines énièmes
- Équations de degré 2

Plan

- 1 Introduction
 - Définition de $\mathbb{C}$
 - Deux systèmes de coordonnées
- 2 Calculs
- 3 Module et Argument
- 4 Équations algébriques

Une impossible équation

$$X^2 + 1 = 0.$$

Une impossible équation

$$X^2 + 1 = 0.$$

Résolution

Admettons l'existence d'une solution, $\sqrt{-1}$. (écriture à proscrire!).

Notons i cette solution.

Une impossible équation

$$X^2 + 1 = 0.$$

Résolution

Admettons l'existence d'une solution, $\sqrt{-1}$. (écriture à proscrire!).
Notons i cette solution.

Remarque

Elle est parfois notée j , notamment en électronique ou en traitement du signal (exemples : Signaux Discrets et Aléatoires et Estimation pour le Signal).

Définition

Définition

Nombre complexe

L'ensemble des nombres complexes est défini comme suit :

$$\mathbb{C} := \{a + bi ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} .$$

Définition

Nombre complexe

L'ensemble des nombres complexes est défini comme suit :

$$\mathbb{C} := \{a + bi ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} .$$

Notation

Un nombre complexe est généralement noté z .

Définition

Nombre complexe

L'ensemble des nombres complexes est défini comme suit :

$$\mathbb{C} := \{a + bi ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} .$$

Notation

Un nombre complexe est généralement noté z .

Axiomatique

On peut définir rigoureusement l'ensemble $\mathbb{C}$, en passant par $\mathbb{R}^2$ (muni d'une multiplication ad hoc), en utilisant un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 2×2 ou en utilisant les extensions de corps...

Coordonnées cartésiennes

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Partie réelle

On dit que a est la partie réelle de z . On écrit aussi : $a = \Re(z)$ ou $a = \operatorname{Re}(z)$.

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Partie réelle

On dit que a est la partie réelle de z . On écrit aussi : $a = \Re(z)$ ou $a = \operatorname{Re}(z)$.

Partie imaginaire

On dit que b est la partie imaginaire de z . On écrit aussi : $b = \Im(z)$ ou $b = \operatorname{Im}(z)$.

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Partie réelle

On dit que a est la partie réelle de z . On écrit aussi : $a = \Re(z)$ ou $a = \operatorname{Re}(z)$.

Partie imaginaire

On dit que b est la partie imaginaire de z . On écrit aussi : $b = \Im(z)$ ou $b = \operatorname{Im}(z)$.

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$. On le note aussi z^* .

Représentation sur le plan

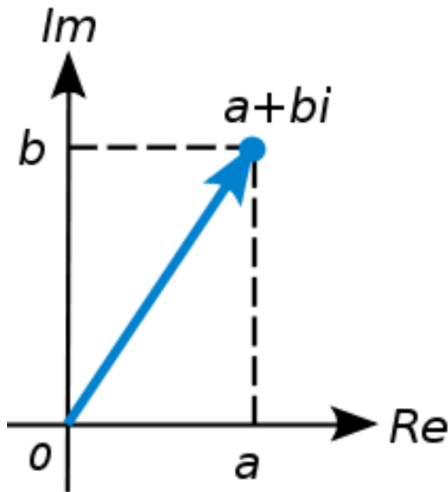


Figure – On représente le complexe $z = a + bi$ sur le plan par un point M d'abscisse $a = \operatorname{Re}(z)$ et d'ordonnée $b = \operatorname{Im}(z)$. Le point ainsi défini est dit d'affixe z .

Module

Le module du complexe z , que l'on note $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ est le point d'affixe z . Ainsi :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Module

Le module du complexe z , que l'on note $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ est le point d'affixe z . Ainsi :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Argument

Si $z \neq 0$, son argument (que l'on appelle aussi phase), noté $\arg(z)$, est l'angle formé par le segment $[OM(z)]$ et l'axe des abscisses. **Par convention**, $\arg(z) \in]-\pi; \pi]$. Ainsi, $\arg(z)$ est l'unique réel tel que

$$\arg(z) \in]-\pi; \pi] , \quad \cos(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

Module

Le module du complexe z , que l'on note $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ est le point d'affixe z . Ainsi :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Argument

Si $z \neq 0$, son argument (que l'on appelle aussi phase), noté $\arg(z)$, est l'angle formé par le segment $[OM(z)]$ et l'axe des abscisses. **Par convention, $\arg(z) \in]-\pi; \pi]$.** Ainsi, $\arg(z)$ est l'unique réel tel que

$$\arg(z) \in]-\pi; \pi] , \quad \cos(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

Forme exponentielle

On utilise la notation suivante : $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Représentation sur le plan en coordonnées polaires

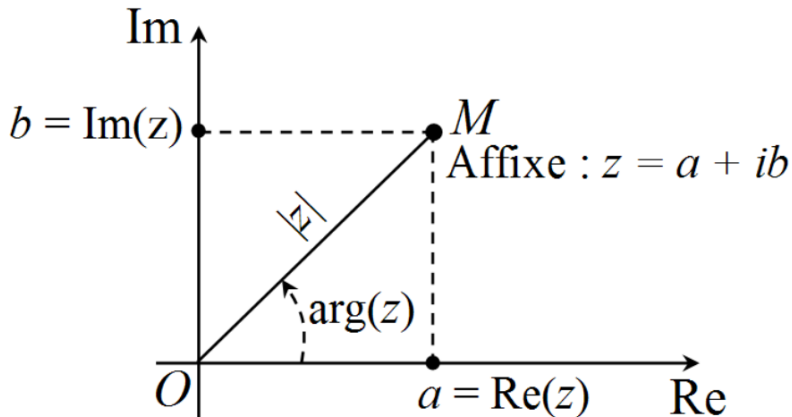


Figure – Les deux types de coordonnées sont équivalentes.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Calculs
- 3 Module et Argument
- 4 Équations algébriques

Opérations élémentaires 1

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_1)i) + (\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2)i) \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)) + (\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2))i. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 1

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_1)i) + (\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2)i) \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)) + (\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2))i. \end{aligned}$$

Soustraction

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_1)i) - (\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2)i) \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2)) + (\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2))i. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 2

Multiplication

Soient $z_1 := a_1 + b_1i$ et $z_2 := a_2 + b_2i$.

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + b_1i) \times (a_2 + b_2i) \\ &= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 2

Multiplication

Soient $z_1 := a_1 + b_1i$ et $z_2 := a_2 + b_2i$.

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + b_1i) \times (a_2 + b_2i) \\ &= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \end{aligned}$$

Rappel

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \\ \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x). \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 3

Division

Soient $z_1 := a_1 + b_1i$ et $z_2 := a_2 + b_2i$.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \\ &= \frac{(a_1 + b_1i) \times (a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i) \times (a_2 - b_2i)} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.\end{aligned}$$

Opérations élémentaires 3

Division

Soient $z_1 := a_1 + b_1i$ et $z_2 := a_2 + b_2i$.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \\ &= \frac{(a_1 + b_1i) \times (a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i) \times (a_2 - b_2i)} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.\end{aligned}$$

Quand on a un complexe z au dénominateur, on multiplie par son conjugué $\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$ au numérateur et au dénominateur.

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$. On le note aussi z^* .

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$. On le note aussi z^* .

Soient deux complexes z_1 et z_2 . Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i$. On le note aussi z^* .

Soient deux complexes z_1 et z_2 . Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Preuve

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)) + (\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2))i} \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)) - (\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2))i \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Im}(z_1)i) + (\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_2)i) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

Soustraction

Soient deux complexes z_1 et z_2 . Alors :

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Soustraction

Soient deux complexes z_1 et z_2 . Alors :

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Preuve

$$\begin{aligned}\overline{z_1 - z_2} &= \overline{(\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2)) + (\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2))i} \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2)) - (\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2))i \\ &= (\operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Im}(z_1)i) - (\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_2)i) \\ &= \overline{z_1} - \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Multiplication

Soient deux complexes $z_1 := a_1 + b_1i$ et $z_2 := a_2 + b_2i$. Alors :

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}.$$

Multiplication

Soient deux complexes $z_1 := a_1 + b_1i$ et $z_2 := a_2 + b_2i$. Alors :

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}.$$

Preuve

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \times z_2} &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (a_1 - b_1i) \times (a_2 - b_2i) \\ &= (a_1 \times a_2 - (-b_1) \times (-b_2)) + (a_1 \times (-b_2) + a_2 \times (-b_1))i \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ &= \overline{z_1 \times z_2}.\end{aligned}$$

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

Partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

Partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z \times \bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

Partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z \times \bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2$.

Inverse

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$. Alors : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Plan

1 Introduction

2 Calculs

3 **Module et Argument**

- Caractérisation du module et de l'argument
- Propriétés basiques
- Formules classiques

4 Équations algébriques

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$.

Méthode de calcul pour l'argument

- Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$.
- Si $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) > 0$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) < 0$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

Propriétés basiques sur le module

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
- ② $|-z| = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
- ② $|-z| = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
- ③ $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
- ② $|-z| = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
- ③ $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
- ② $|-z| = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
- ③ $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- ⑤ $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. Mieux : $|\prod_{k=1}^p z_k| = \prod_{k=1}^p |z_k|$.

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
- ② $|-z| = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
- ③ $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- ⑤ $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. Mieux : $|\prod_{k=1}^p z_k| = \prod_{k=1}^p |z_k|$.

Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Propriétés basiques sur le module

- ① Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
- ② $|-z| = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
- ③ $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- ⑤ $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. Mieux : $|\prod_{k=1}^p z_k| = \prod_{k=1}^p |z_k|$.

Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Et, si $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$, alors :

$$\left| \sum_{k=1}^p z_k \right| \leq \sum_{k=1}^p |z_k|.$$

Argument d'un produit

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Argument d'un produit

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Et :

$$\arg\left(\prod_{k=1}^p z_k\right) \equiv \sum_{k=1}^p \arg(z_k) \pmod{2\pi}.$$

Argument d'un produit

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Et :

$$\arg\left(\prod_{k=1}^p z_k\right) \equiv \sum_{k=1}^p \arg(z_k) \pmod{2\pi}.$$

Rappel

On utilise aussi la notation $\cos(\theta) + i \sin(\theta) =: e^{i\theta}$. Il vient conséquemment : $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. En effet, $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$ et $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$.

Autres formules avec l'argument

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Autres formules avec l'argument

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Argument de l'inverse

Si $z \neq 0$, alors $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Autres formules avec l'argument

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Argument de l'inverse

Si $z \neq 0$, alors $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Argument du conjugué

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Formules classiques

Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Formules classiques

Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Calculs
- 3 Module et Argument
- 4 Équations algébriques
 - Racines énièmes
 - Équations de degré 2

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

“Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.”

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

“Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.”

Plus concrètement, toute équation polynômiale (de degré au moins un) dans $\mathbb{C}$ a une solution (au moins).

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

“Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.”

Plus concrètement, toute équation polynômiale (de degré au moins un) dans $\mathbb{C}$ a une solution (au moins).

Exemple

Soient $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{C}$. Alors, l'équation suivante

$$a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

a au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

“Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.”

Plus concrètement, toute équation polynômiale (de degré au moins un) dans $\mathbb{C}$ a une solution (au moins).

Exemple

Soient $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{C}$. Alors, l'équation suivante

$$a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

a au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Théorème d'Abel-Ruffini

Mais certaines ne PEUVENT pas être résolues.

Racines énièmes d'un nombre complexe quelconque

Le problème

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = z_0. \quad (I)$$

Racines énièmes d'un nombre complexe quelconque

Le problème

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = z_0. \quad (\text{I})$$

La solution

On utilise ici la forme exponentielle $z = |z|e^{i\arg(z)}$ et $z_0 = |z_0|e^{i\arg(z_0)}$. L'équation (I) est alors équivalente à

$$|z|^n e^{i \times n \arg(z)} = |z_0| e^{i \arg(z_0)}. \quad (\text{II})$$

L'équation (II) donne directement

$$z = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(z_0)}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}},$$

avec $0 \leq k \leq n-1$. Il y a donc exactement n solutions.

Racines énièmes de l'unité

On cherche à résoudre l'équation (I) avec $z = 1$. On a alors n solutions :

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad \dots, \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad \omega_{n-1} = e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \left(= \frac{1}{\omega_1} \right).$$

Racines énièmes de l'unité

On cherche à résoudre l'équation (I) avec $z = 1$. On a alors n solutions :

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad \dots, \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad \omega_{n-1} = e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \left(= \frac{1}{\omega_1} \right).$$

On peut montrer

$$\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = 0.$$

En effet, on note : $\omega_k = \omega_1^k$ avec $\omega_1 \neq 1$. Donc :

$$\omega_0 + \dots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1^1 + \dots + \omega_1^{n-1} = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = 0.$$

Équations de degré 2

Tout se passe comme dans $\mathbb{R}$. On se donne l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Et, $a \neq 0$.

Équations de degré 2

Tout se passe comme dans $\mathbb{R}$. On se donne l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Et, $a \neq 0$.

Résolution

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

L'équation est donc équivalente à

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Soit $\delta_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_0^2 = b^2 - 4ac$. L'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \delta_0}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta_0}{2a}.$$

Racine carrée d'un complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$z_{\pm} := \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \text{Sign}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} i \right]$$

est tel que $z_{\pm}^2 = a + bi$.

Racine carrée d'un complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$z_{\pm} := \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \text{Sign}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} i \right]$$

est tel que $z_{\pm}^2 = a + bi$.

Preuve

On résout $(x + iy)^2 = a + bi$. Par identification :

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{et} \quad 2xy = b.$$

Par ailleurs, $|(x + iy)|^2 = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ainsi, on a :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x^2 - y^2 = a \quad \text{et} \quad 2xy = b.$$

$$\text{Or, } x^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{x^2 - y^2}{2}.$$