Bases Indispensables des Mathématiques

Suites et séries numériques

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Définition

Suite numérique réelle (ou complexe)

Une suite numérique $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

Définition

Suite numérique réelle (ou complexe)

Une suite numérique $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

- n est le rang de la suite u.

Définition

Suite numérique réelle (ou complexe)

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

- n est le rang de la suite u.
- u_n est le terme général de la suite u.

Définition

Suite numérique réelle (ou complexe)

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

- n est le rang de la suite u.
- u_n est le terme général de la suite u.
- La suite est dénotée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voire $(u_n)_{n\geq 0}$.

Définition

Suite numérique réelle (ou complexe)

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

- n est le rang de la suite u.
- u_n est le terme général de la suite u.
- La suite est dénotée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voire $(u_n)_{n\geq 0}$.
- On n'écrit pas : "la suite u_n".

Quelques exemples

Remarque

Certaines suites ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$. On écrit alors : $u := (u_n)_{n \geq n_0}$.

Quelques exemples

Remarque

Certaines suites ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.
On écrit alors : $u := (u_n)_{n \geq n_0}$.

La suite des inverses des entiers

$u := (u_n)_{n \geq 1}$ avec $u_n := \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Croissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Croissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Croissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Terme anglo-saxon

La traduction de "suite croissante" en anglais est "nondecreasing sequence".

Croissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Croissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2 \,.$$

Croissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2 .$$

Terme anglo-saxon

La traduction de "suite strictement croissante" en anglais est "increasing sequence".

Décroissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Décroissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 2 par

$$u_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{(n-1)^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Décroissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 2 par

$$u_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{(n-1)^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Terme anglo-saxon

La traduction de "suite décroissante" en anglais est "nonincreasing sequence".

Décroissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = \left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Décroissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 1 par

$$u_n := \frac{1}{n^2} \,.$$

Décroissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 1 par

$$u_n := \frac{1}{n^2} .$$

Terme anglo-saxon

La traduction de "suite strictement décroissante" en anglais est "decreasing sequence".

Monotonie

Définition

Une suite monotone est une suite qui est décroissante ou qui est croissante. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} & u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq u_{n_0+p} \leq \cdots \\ \text{ou bien} \quad & u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \cdots \geq u_{n_0+p} \geq \cdots . \end{aligned}$$

Monotonie

Définition

Une suite monotone est une suite qui est décroissante ou qui est croissante. En d'autres termes :

$$\begin{array}{rl} & u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq u_{n_0+p} \leq \cdots \\ \text{ou bien} & u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \cdots \geq u_{n_0+p} \geq \cdots . \end{array}$$

Exemples

Les suites définies dans les quatre précédentes diapositives sont monotones.

Monotonie

Définition

Une suite monotone est une suite qui est décroissante ou qui est croissante. En d'autres termes :

$$\begin{array}{rl} & u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq u_{n_0+p} \leq \cdots \\ \text{ou bien} & u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \cdots \geq u_{n_0+p} \geq \cdots . \end{array}$$

Exemples

Les suites définies dans les quatre précédentes diapositives sont monotones.

Contre-exemple

La suite définie par $u_n := n(-1)^n$ n'est pas monotone.

Majorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Majorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := -n^2$$

est majorée car $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Majorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := -n^2$$

est majorée car $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Minorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.

Minorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2$$

est minorée car $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Minorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2$$

est minorée car $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque

Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Bornée

Définition

La suite *réelle ou complexe* $u=(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée s'il existe $M\geq 0$ tel que $|u_n|\leq M$ pour tout $n\geq n_0$.

Bornée

Définition

La suite *réelle ou complexe* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

est bornée car $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$.

Bornée

Définition

La suite *réelle ou complexe* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

est bornée car $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque

Une suite réelle est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Suite alternée

Définition

La suite réelle $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est alternée si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n u_{n+1} < 0$.

Suite alternée

Définition

La suite réelle $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est alternée si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n u_{n+1} < 0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

est alternée car $u_n u_{n+1} = -\frac{1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$ pour tout $n \geq 0$.

Convergence

Définition rigoureuse

La suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\epsilon \,, \text{ on a : } \; |u_n - \ell| < \epsilon \,.$$

Convergence

Définition rigoureuse

La suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\epsilon \,, \text{ on a : } \; |u_n - \ell| < \epsilon \,.$$

Notations

On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} u = \ell$ ou $u_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.

Convergence

Définition rigoureuse

La suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\epsilon \,, \text{ on a : } \; |u_n - \ell| < \epsilon \,.$$

Notations

On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} u = \ell$ ou $u_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.

Exemples

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \mathrm{e}^{-n}\right) = 2$.

Soit $u_n := \left(1 + \frac{\log(2)}{n}\right)^n$. Alors, $u_n \to 2$ quand $n \to \infty$.

Divergence

Définition

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Divergence

Définition

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Divergence vers l'infini

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ si

$$\forall H > 0 \; \exists n_H \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_H \text{ on a : } u_n \geq H \,.$$

De même, on dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers $-\infty$ si

$$\forall H > 0 \; \exists n_H \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_H \text{ on a : } u_n \leq -H \,.$$

Quelques propriétés basiques

Théorème

Toute suite admet au plus une limite et toute suite convergente est bornée.

Théorème

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors $u + v$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$.

Théorème

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors la suite $\lambda.u$ est convergente de limite $\lambda \times \ell$.

Théorème

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors $u \times v$ est convergente de limite $\ell_1 \times \ell_2$.

Théorème de comparaison

Idée du théorème

Certaines suites sont difficiles à étudier. On préfère se ramener à des suites plus sympathiques.

Théorème de comparaison

Idée du théorème

Certaines suites sont difficiles à étudier. On préfère se ramener à des suites plus sympathiques.

Théorème

Soient trois suites réelles u, v et w. On suppose que l'on a :

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{pour tout} \;\; n \geq n_0 \, .$$

On suppose de plus que u converge vers ℓ_u et que w converge vers ℓ_w. Alors : $\ell_u \leq \ell_w$. De plus, v est bornée.
Si de plus, $\ell_u = \ell_w =: \ell$, alors v est convergente de limite ℓ.

Théorème de comparaison

Idée du théorème

Certaines suites sont difficiles à étudier. On préfère se ramener à des suites plus sympathiques.

Théorème

Soient trois suites réelles u, v et w. On suppose que l'on a :

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{pour tout} \;\; n \geq n_0 \,.$$

On suppose de plus que u converge vers ℓ_u et que w converge vers ℓ_w. Alors : $\ell_u \leq \ell_w$. De plus, v est bornée.
Si de plus, $\ell_u = \ell_w =: \ell$, alors v est convergente de limite ℓ.

Remarque

Si $\ell_u = +\infty$ alors v et w divergent vers $+\infty$. Et, si $\ell_w = -\infty$ alors u et v divergent vers $-\infty$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Suite décroissante et minorée

Soit une suite réelle u décroissante et minorée par m. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq m$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Suite décroissante et minorée

Soit une suite réelle u décroissante et minorée par m. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq m$.

ATTENTION

Ce résultat est vrai car on est sur $\mathbb{R}$ qui est complet.

Autres propriétés

Limite d'une suite complexe

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, u est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}\left(\lim u\right)$ et $\lim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(\lim u\right)$.

Autres propriétés

Limite d'une suite complexe

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, u est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}\left(\lim u\right)$ et $\lim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(\lim u\right)$.

Valeur absolue (ou module) d'une suite convergente

Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors, $|u|$ converge vers $|\ell|$.

Autres propriétés

Limite d'une suite complexe

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, u est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}\left(\lim u\right)$ et $\lim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(\lim u\right)$.

Valeur absolue (ou module) d'une suite convergente

Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors, $|u|$ converge vers $|\ell|$.

Fonction continue d'une suite convergente

Soit u une suite convergente de limite ℓ et φ une fonction <u>continue</u> de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On introduit la suite v définie par $v_n := \varphi\left(u_n\right)$. Alors, la suite v_n est convergente de limite $\varphi(\ell)$.

Suites arithmétiques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de *raison* a si l'on a

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \geq 0 \,.$$

Suites arithmétiques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de *raison* a si l'on a

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \geq 0\,.$$

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 + na$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0 + a\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Suites arithmétiques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de *raison* a si l'on a

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \geq 0\,.$$

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 + na$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0 + a\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Convergence

Si $a > 0$, $u_n \to +\infty$. Si $a < 0$, $u_n \to -\infty$.

Suites géométriques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de *raison* $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = q u_n$ pour tout $n \geq 0$.

Suites géométriques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de *raison* $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$.

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 q^n$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$.

Suites géométriques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de *raison* $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$.

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 q^n$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$.

Convergence

Si $|q| > 1$, $|u_n| \to +\infty$. Si $|q| < 1$, $|u_n| \to 0$.

Suites puissances

Définition

Une suite puissance a un terme général de la forme $u_n = n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Suites puissances

Définition

Une suite puissance a un terme général de la forme $u_n = n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Convergence

La suite u converge vers 0 si $\alpha < 0$. Si $\alpha > 0$, elle tend vers $+\infty$.

Suites arithmético-géométriques

Définition

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. La suite définie par

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est dite arithmético-géométrique.

Suites arithmético-géométriques

Définition

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. La suite définie par

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est dite arithmético-géométrique.

Terme général

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$.

Plan

Série numérique

Définition

On se place sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une série numérique sur $\mathbb{R}$ est un couple formé de deux suites numériques $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\,(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k \,.$$

Série numérique

Définition

On se place sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une série numérique sur $\mathbb{R}$ est un couple formé de deux suites numériques $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\,(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k \,.$$

Vocabulaire et notation

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le terme général de la série.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la somme partielle au rang n de la série.
Une série sera désignée par (Σu_n) ou par “la série de terme général u_n”.

Quelques exemples

Remarque

Certaines séries ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.

Quelques exemples

Remarque

Certaines séries ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.

La série des inverses des entiers au carré

$(\Sigma u_n)_{n\geq 1}$ avec $u_n := \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Notons qu'ici,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Limite de la série

La limite de la série est S, la limite de la suite $(S_n)_n$.

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Limite de la série

La limite de la série est S, la limite de la suite $(S_n)_n$.

Reste d'ordre n de la série

$$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Limite de la série

La limite de la série est S, la limite de la suite $(S_n)_n$.

Reste d'ordre n de la série

$$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k .$$

Traduction rigoureuse

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \exists N_\epsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, n \geq N_\epsilon\,, \text{ on a } \left| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right| < \epsilon\,.$$

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Condition nécessaire

Si $(\Sigma u_n)_n$ est convergente, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Condition nécessaire

Si $(\Sigma u_n)_n$ est convergente, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

Condition non suffisante

La série peut être divergente même si u_n tend vers 0. Exemple : $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Or, la série associée diverge.

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Condition nécessaire

Si $(\Sigma u_n)_n$ est convergente, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

Condition non suffisante

La série peut être divergente même si u_n tend vers 0. Exemple : $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Or, la série associée diverge.

Somme de la série

Si S est la somme de la série de terme général u_n, on note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Attention

Attention (théorème de réarrangement de Riemann)

Il ne faut pas noter $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Attention (théorème de réarrangement de Riemann)

Il ne faut pas noter $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

La série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$ est convergente : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$. En revanche, si l'on réordonne comme suit :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right\},$$

tous les termes de la précédente série sont bien sommés. Pourtant, la limite est ici : $\frac{3}{2}\log(2)$.

Attention (théorème de réarrangement de Riemann)

Il ne faut pas noter $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. En effet, cette notation n'a pas de sens si la série n'est pas absolument convergente.

La série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$ est convergente : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$. En revanche, si l'on réordonne comme suit :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right\},$$

tous les termes de la précédente série sont bien sommés. Pourtant, la limite est ici : $\frac{3}{2}\log(2)$.

Définition

Convergence absolue

Une série $\left(\sum u_n\right)_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Définition

Convergence absolue

Une série $\left(\sum u_n\right)_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Liens entre la convergence et la convergence absolue

La convergence absolue entraîne la convergence simple.

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Somme de séries absolument convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries absolument convergentes de limites respectives s_u et s_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est absolument convergente.

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Somme de séries absolument convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries absolument convergentes de limites respectives s_u et s_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est absolument convergente.

Multiplication par un scalaire

Soit une série $(\Sigma u_n)_n$ convergente de limite S et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. La série de terme général λu_n est convergente de limite λS.

Produit de séries

Définition

Soient deux séries $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$. Le produit de ces deux séries est la série de terme général w_n avec

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} .$$

Produit de séries

Définition

Soient deux séries $\left(\sum u_n\right)_n$ et $\left(\sum v_n\right)_n$. Le produit de ces deux séries est la série de terme général w_n avec

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \,.$$

Convergence du produit : théorème de Cauchy

On suppose que les deux séries sont absolument convergentes. Alors, la série produit est absolument convergente et l'on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \,.$$

Séries alternées

Définition

Une série $\left(\sum u_n\right)_n$ est alternée si la suite $(u_n)_n$ est alternée c'est-à-dire si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Séries alternées

Définition

Une série $\left(\sum u_n\right)_n$ est alternée si la suite $(u_n)_n$ est alternée c'est-à-dire si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème des séries alternées

Soit une série alternée $\left(\sum u_n\right)_n$. On suppose que la suite $(|u_n|)_n$ tend vers 0 en décroissant. Alors, la série est convergente.

Comparaison de séries à termes positifs

Théorème

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors, si la série $(\Sigma v_n)_n$ converge, la série $(\Sigma u_n)_n$ est également convergente.
Et, si la série $(\Sigma u_n)_n$ diverge vers l'infini, la série $(\Sigma v_n)_n$ est également divergente.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $\left(\Sigma u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $\left(\Sigma u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème : critère de D'alembert

On se donne une série à termes strictement positifs $\left(\Sigma u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $\left(\sum u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème : critère de D'alembert

On se donne une série à termes strictement positifs $\left(\sum u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $\left(\sum u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème : critère de D'alembert

On se donne une série à termes strictement positifs $\left(\sum u_n\right)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.

Critère de Cauchy et de D'Alembert

Théorème : critère de Cauchy

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème : critère de D'alembert

On se donne une série à termes strictement positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Séries de Riemann

Convergence

On se donne $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $\left(\Sigma u_n\right)_n$ avec $u_n := \frac{1}{n^x}$.
La série converge si et seulement si $x > 1$. (On définit alors une fonction, la fonction zêta de Riemann).

Séries de Riemann

Convergence

On se donne $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $(\Sigma u_n)_n$ avec $u_n := \frac{1}{n^x}$. La série converge si et seulement si $x > 1$. (On définit alors une fonction, la fonction zêta de Riemann).

Preuve

On calcule l'intégrale $\int_1^R \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - R^{1-x}\right)$. Cette intégrale converge si et seulement si $1 - x < 0$ c'est-à-dire si $x > 1$. On applique alors le théorème de comparaison avec une intégrale.

Séries de Riemann

Convergence

On se donne $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $\left(\Sigma u_n\right)_n$ avec $u_n := \frac{1}{n^x}$. La série converge si et seulement si $x > 1$. (On définit alors une fonction, la fonction zêta de Riemann).

Preuve

On calcule l'intégrale $\int_1^R \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - R^{1-x}\right)$. Cette intégrale converge si et seulement si $1 - x < 0$ c'est-à-dire si $x > 1$. On applique alors le théorème de comparaison avec une intégrale.

Remarque

Si $x = 1$, on a en fait $\int_1^R \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \log(R) \to +\infty$.

Plan

Quelques développements en séries

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements en séries

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1;1[$.