Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 9 : Séries de fonctions.

Julian Tugaut

Sommaire

1. Convergence simple
2. Convergence uniforme
3. Convergence “normale”
4. Séries entières

Définition

Séries de fonctions

Une série de fonctions de terme général u_n de $\mathcal{D}$ dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\{(u_n)_n\ ;\ (S_n)_n\}$ telles que

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\,.$$

Définition

Séries de fonctions

Une série de fonctions de terme général u_n de $\mathcal{D}$ dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\{(u_n)_n \,;\, (S_n)_n\}$ telles que

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\,.$$

Terminologie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le terme général d'ordre n de la série et S_n est la somme partielle d'ordre n.

Plan

1. Convergence simple
2. Convergence uniforme
3. Convergence “normale”
4. Séries entières

Convergence simple - 1

Définition

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$, la série $(\Sigma u_n(x))$ converge simplement vers $S(x)$ ce qui revient à dire que la suite des sommes partielles $(S_n(x))_n$ converge simplement vers $S(x)$.

Convergence simple - 1

Définition

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$, la série $(\Sigma u_n(x))$ converge simplement vers $S(x)$ ce qui revient à dire que la suite des sommes partielles $(S_n(x))_n$ converge simplement vers $S(x)$.

Reste de la série

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) := S(x) - S_n(x)$ s'appelle le reste d'ordre n de la série.

Convergence simple - 1

Définition

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$, la série $(\Sigma u_n(x))$ converge simplement vers $S(x)$ ce qui revient à dire que la suite des sommes partielles $(S_n(x))_n$ converge simplement vers $S(x)$.

Reste de la série

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) := S(x) - S_n(x)$ s'appelle le reste d'ordre n de la série.

Notation

On note : $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Convergence simple - 2

Plus rigoureusement

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon(x) \in \mathbb{N}\ : \forall n \geq N_\epsilon(x)\,,\ |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\,.$$

Convergence simple - 2

Plus rigoureusement

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon(x) \in \mathbb{N}\ : \forall n \geq N_\epsilon(x)\,,\ |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\,.$$

Exemple

La série de fonctions de terme général u_n défini sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ avec $u_n(x) := \sin^2(x)\cos^n(x)$ converge simplement vers la fonction S définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par $S(0) := 0$ et $S(x) := \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$ si $x \in]0;\frac{\pi}{2}]$.

Convergence simple - 2

Plus rigoureusement

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon(x) \in \mathbb{N}\ : \forall n \geq N_\epsilon(x)\,,\ |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\,.$$

Exemple

La série de fonctions de terme général u_n défini sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $u_n(x) := \sin^2(x)\cos^n(x)$ converge simplement vers la fonction S définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $S(0) := 0$ et $S(x) := \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$ si $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$.

Limite et continuité

Comme pour les suites de fonctions, si une série de fonctions continues converge simplement vers une fonction somme S, cette fonction n'est pas nécessairement continue.

Plan

1 Convergence simple

2 Convergence uniforme

3 Convergence “normale”

4 Séries entières

Définition

Convergence uniforme

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers S, c'est-à-dire si la suite réelle $\left(||\sum_{k=0}^{n} u_k - S||_\infty\right)_n$ converge vers 0.

Définition

Convergence uniforme

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers S, c'est-à-dire si la suite réelle $\left(||\sum_{k=0}^{n} u_k - S||_\infty\right)_n$ converge vers 0.

Plus rigoureusement

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction S définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ si

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}\ :\forall n \geq N_\epsilon\,,\ \forall x \in \mathcal{D}\,,\ |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\,.$$

Convergence et continuité

Liens entre les convergences

La convergence uniforme implique la convergence simple.
La convergence simple n'implique pas obligatoirement la convergence uniforme.

Convergence et continuité

Liens entre les convergences

La convergence uniforme implique la convergence simple.
La convergence simple n'implique pas obligatoirement la convergence uniforme.

Continuité de la somme

Soit $(\Sigma u_n)_n$ une série de fonctions qui converge uniformément vers S. On suppose que u_n est continue en t_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors S est continue en t_0. Conséquemment, si u_n est continue sur tout le domaine de définition $\mathcal{D}$ alors S est aussi continue sur tout le domaine de définition.

Convergence et continuité

Liens entre les convergences

La convergence uniforme implique la convergence simple.
La convergence simple n'implique pas obligatoirement la convergence uniforme.

Continuité de la somme

Soit $(\Sigma u_n)_n$ une série de fonctions qui converge uniformément vers S. On suppose que u_n est continue en t_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors S est continue en t_0. Conséquemment, si u_n est continue sur tout le domaine de définition $\mathcal{D}$ alors S est aussi continue sur tout le domaine de définition.

Si la convergence est simple, la continuité n'est pas garantie.

Plan

1. Convergence simple
2. Convergence uniforme
3. Convergence “normale”
4. Séries entières

Définition

Convergence “normale”

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge “normalement” si la série réelle $\left(\Sigma \, ||u_n||_\infty\right)_n$ converge.

Définition

Convergence “normale”

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge “normalement” si la série réelle $(\sum ||u_n||_\infty)_n$ converge.

Terminologie

En classes préparatoires, on parle de “convergence normale”. Il s’agit en fait de la convergence absolue pour la norme infinie.

Définition

Convergence “normale”

Une série de fonctions de terme général u_n défini sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge “normalement” si la série réelle $(\sum ||u_n||_\infty)_n$ converge.

Terminologie

En classes préparatoires, on parle de “convergence normale”. Il s'agit en fait de la convergence absolue pour la norme infinie.

Lien avec la convergence uniforme et la continuité

La convergence absolue pour la norme infinie implique la convergence uniforme. Ainsi, si $(\sum u_n)_n$ est une série de fonctions continues qui converge absolument pour la norme infinie, elle est uniformément convergente vers une limite S qui est aussi continue. On parle également de critère de Weierstrass. Ce phénomène est vrai car muni de la norme infinie, l'espace des séries est un Banach.

Preuve du critère de Weierstrass

Soit une série de fonctions $(\Sigma u_n)_n$. On suppose qu'elle converge absolument pour la norme infinie, c'est-à-dire que la série réelle $(\Sigma ||u_n||_\infty)_n$ converge. En particulier, pour tout $x \in \mathcal{D}$, la série $(\Sigma |u_n(x)|)_n$ converge donc la série $(\Sigma u_n(x))_n$ converge. On a alors prouvé la convergence simple de la série vers une fonction S.
On calcule maintenant la norme uniforme de $S_n - S$:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||u_k||_\infty$$

Or, ce dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Conséquemment, on a prouvé la convergence uniforme. Puis, si chaque fonction est continue, la convergence uniforme implique la continuité de la somme.

Plan

1 Convergence simple

2 Convergence uniforme

3 Convergence “normale”

4 Séries entières

Définition

Série entière

On appelle "série entière de la variable z" toute série de terme général $a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Définition

Série entière

On appelle “série entière de la variable z” toute série de terme général $a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Attention

On n’a pas dit que la série entière $\left(\Sigma a_n z^n\right)_n$ était convergente.

Définition

Série entière

On appelle "série entière de la variable z" toute série de terme général $a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Attention

On n'a pas dit que la série entière $(\Sigma a_n z^n)_n$ était convergente.

Domaine de convergence

On appelle domaine de convergence de la série entière $(\Sigma a_n z^n)_n$ l'ensemble des complexes tels que cette série converge :
$D := \{z \in \mathbb{C} \mid (\Sigma a_n z^n)_n \text{ converge.}\}$.

Définition

Série entière

On appelle “série entière de la variable z” toute série de terme général $a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Attention

On n'a pas dit que la série entière $(\Sigma a_n z^n)_n$ était convergente.

Domaine de convergence

On appelle domaine de convergence de la série entière $(\Sigma a_n z^n)_n$ l'ensemble des complexes tels que cette série converge :
$D := \{z \in \mathbb{C} \mid (\Sigma a_n z^n)_n \text{ converge.}\}$.

Exemples

Le domaine de convergence de $\left(\Sigma \frac{z^n}{n!}\right)_n$ est $\mathbb{C}$. Celui de $(\Sigma n! z^n)_n$ est $\{0\}$.

Rayon de convergence

Définition

Soit une série entière $(\Sigma a_n z^n)$. On définit son rayon de convergence $R \geq 0$ comme suit : $R := \sup \{|z| \; ; \; (\Sigma a_n z^n)_n \text{ converge.}\}$.

Rayon de convergence

Définition

Soit une série entière $(\Sigma a_n z^n)$. On définit son rayon de convergence $R \geq 0$ comme suit : $R := \sup\{|z| \ ; \ (\Sigma a_n z^n)_n \text{ converge.}\}$.

Calcul du rayon de convergence

Si $a_n \neq 0$ pour n assez grand, on a : $R = R_0 := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Rayon de convergence

Définition

Soit une série entière $(\Sigma a_n z^n)$. On définit son rayon de convergence $R \geq 0$ comme suit : $R := \sup\left\{|z| \; ; \; (\Sigma a_n z^n)_n \text{ converge.}\right\}$.

Calcul du rayon de convergence

Si $a_n \neq 0$ pour n assez grand, on a : $R = R_0 := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Preuve

Soit $r < R_0$. La série $(\Sigma a_n r^n)$ converge d'après le critère de D'Alembert. En effet, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} r^{n+1}|}{|a_n r^n|} = \frac{r}{R_0} < 1$. Donc pour tout $r < R_0$, on a $r \leq R$ d'où $R \geq R_0$.

Rayon de convergence

Définition

Soit une série entière $(\Sigma a_n z^n)$. On définit son rayon de convergence $R \geq 0$ comme suit : $R := \sup\{|z| \ ; \ (\Sigma a_n z^n)_n \text{ converge.}\}$.

Calcul du rayon de convergence

Si $a_n \neq 0$ pour n assez grand, on a : $R = R_0 := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Preuve

Soit $r < R_0$. La série $(\Sigma a_n r^n)$ converge d'après le critère de D'Alembert. En effet, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} r^{n+1}|}{|a_n r^n|} = \frac{r}{R_0} < 1$. Donc pour tout $r < R_0$, on a $r \leq R$ d'où $R \geq R_0$.
Soit $r > R_0$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = r$, la série $(\Sigma a_n z^n)$ diverge d'après le critère de D'Alembert. En effet, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{r}{R_0} > 1$. Donc pour tout $r > R_0$, on a $r \geq R$ d'où $R \leq R_0$.

Propriétés des séries entières

Continuité, dérivabilité etc

Dans le disque de convergence ($]-R;R[$ si l'on est dans $\mathbb{R}$), la limite de la série entière est continue, dérivable, intégrable terme à terme. Tous les termes peuvent être permutés...

Propriétés des séries entières

Continuité, dérivabilité etc

Dans le disque de convergence ($]-R;R[$ si l'on est dans $\mathbb{R}$), la limite de la série entière est continue, dérivable, intégrable terme à terme. Tous les termes peuvent être permutés...

Sur le bord

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$ et tel que $\left(\Sigma a_n z_0^n\right)_n$ converge. Alors, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \lim_{z \to z_0\,,\,|z|<R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Propriétés des séries entières

Continuité, dérivabilité etc

Dans le disque de convergence ($]-R;R[$ si l'on est dans $\mathbb{R}$), la limite de la série entière est continue, dérivable, intégrable terme à terme. Tous les termes peuvent être permutés...

Sur le bord

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$ et tel que $\left(\Sigma a_n z_0^n\right)_n$ converge. Alors, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \lim_{z \to z_0\,,\,|z|<R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2) = \lim_{x \to 1^-} \log(1+x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\,.$$

Développement limité

Définition

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n autour de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left\{(x - x_0)^n\right\} .$$

Développement limité

Définition

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n autour de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left\{(x - x_0)^n\right\} .$$

Les développements limités sont très utiles pour résoudre certains calculs de limites.

Développement limité

Définition

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n autour de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left\{(x - x_0)^n\right\} .$$

Les développements limités sont très utiles pour résoudre certains calculs de limites.

Théorème de Taylor

Soit une fonction f infiniment dérivable. Alors, f admet le développement limité suivant :

$$f(x) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left\{(x - x_0)^n\right\} .$$

Quelques développements limités/en séries entières

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1;1[$.

Quelques développements limités/en séries entières

- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1;1[$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} x^n$ pour tout $x \in]-1;1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.