Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 6 : Suites numériques.

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Définition

Suite numérique dans un corps $\mathbb{K}$

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$; le corps $\mathbb{K}$ pouvant désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{K} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

Définition

Suite numérique dans un corps $\mathbb{K}$

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$; le corps $\mathbb{K}$ pouvant désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{K} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

- n est le rang de la suite u.

Définition

Suite numérique dans un corps $\mathbb{K}$

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$; le corps $\mathbb{K}$ pouvant désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{K} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

- n est le rang de la suite u.
- u_n est le terme général de la suite u.

Définition

Suite numérique dans un corps $\mathbb{K}$

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$; le corps $\mathbb{K}$ pouvant désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$$
$$n \mapsto u_n$$

- n est le rang de la suite u.
- u_n est le terme général de la suite u.
- La suite est dénotée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voire $(u_n)_{n\geq 0}$.

Définition

Suite numérique dans un corps $\mathbb{K}$

Une suite numérique $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$; le corps $\mathbb{K}$ pouvant désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$$
$$n \mapsto u_n$$

- n est le rang de la suite u.
- u_n est le terme général de la suite u.
- La suite est dénotée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voire $(u_n)_{n\geq 0}$.
- On n'écrit pas : “la suite u_n”.

Quelques exemples

La suite constante égale à 0

$u := (u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_n := 0$ pour tout $n \geq 0$.
Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition sur les suites réelles (ou complexes).

Quelques exemples

La suite constante égale à 0

$u := (u_n)_{n \geq 0}$ avec $u_n := 0$ pour tout $n \geq 0$.
Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition sur les suites réelles (ou complexes).

Remarque

Certaines suites ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.
On écrit alors : $u := (u_n)_{n \geq n_0}$.

Quelques exemples

La suite constante égale à 0

$u := (u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_n := 0$ pour tout $n \geq 0$.
Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition sur les suites réelles (ou complexes).

Remarque

Certaines suites ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.
On écrit alors : $u := (u_n)_{n\geq n_0}$.

La suite des inverses des entiers

$u := (u_n)_{n\geq 1}$ avec $u_n := \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Structures algébriques

Ensemble des suites réelles

L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Structures algébriques

Ensemble des suites réelles

L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Espace vectoriel et anneau

On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de l'addition, de la multiplication par un scalaire et de la multiplication comme suit :

$$u+v := (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \ u\times v := (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \alpha.u := (\alpha \times u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ est ce que l'on appelle un anneau.

Croissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Croissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Croissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Terme anglo-saxon

La traduction de “suite croissante” en anglais est “nondecreasing sequence”.

Croissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Croissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2 .$$

Croissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} > u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2 \,.$$

Terme anglo-saxon

La traduction de “suite strictement croissante” en anglais est “increasing sequence”.

Décroissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Décroissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 2 par

$$u_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{(n-1)^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Décroissance

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 2 par

$$u_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{(n-1)^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Terme anglo-saxon

La traduction de “suite décroissante” en anglais est “nonincreasing sequence”.

Décroissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Décroissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 1 par

$$u_n := \frac{1}{n^2}\,.$$

Décroissance stricte

Définition

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si : $\forall n \geq n_0$, on a $u_{n+1} < u_n$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 1 par

$$u_n := \frac{1}{n^2} .$$

Terme anglo-saxon

La traduction de “suite strictement décroissante” en anglais est “decreasing sequence”.

Monotonie

Définition

Une suite monotone est une suite qui est décroissante ou qui est croissante. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} & u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq u_{n_0+p} \leq \cdots \\ \text{ou bien} \quad & u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \cdots \geq u_{n_0+p} \geq \cdots . \end{aligned}$$

Monotonie

Définition

Une suite monotone est une suite qui est décroissante ou qui est croissante. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} & u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq u_{n_0+p} \leq \cdots \\ \text{ou bien} \quad & u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \cdots \geq u_{n_0+p} \geq \cdots . \end{aligned}$$

Exemples

Les suites définies dans les quatre précédentes diapositives sont monotones.

Monotonie

Définition

Une suite monotone est une suite qui est décroissante ou qui est croissante. En d'autres termes :

$$\begin{array}{rl} & u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \cdots \leq u_{n_0+p} \leq \cdots \\ \text{ou bien} & u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \cdots \geq u_{n_0+p} \geq \cdots . \end{array}$$

Exemples

Les suites définies dans les quatre précédentes diapositives sont monotones.

Contre-exemple

La suite définie par $u_n := n(-1)^n$ n'est pas monotone.

Majorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Majorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := -n^2$$

est majorée car $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Majorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := -n^2$$

est majorée car $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Minorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.

Minorée

Définition

La suite *réelle* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2$$

est minorée car $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Minorée

Définition

La suite *réelle* $u=(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que $u_n\geq m$ pour tout $n\geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := n^2$$

est minorée car $u_n\geq 0$ pour tout $n\geq 0$.

Remarque

Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Bornée

Définition

La suite *réelle ou complexe* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Bornée

Définition

La suite *réelle ou complexe* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

est bornée car $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$.

Bornée

Définition

La suite *réelle ou complexe* $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

est bornée car $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque

Une suite réelle est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Suite alternée

Définition

La suite réelle $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est alternée si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n u_{n+1} < 0$.

Suite alternée

Définition

La suite réelle $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est alternée si pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n u_{n+1} < 0$.

Exemple

La suite u définie à partir du rang 0 par

$$u_n := \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

est alternée car $u_n u_{n+1} = -\frac{1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$ pour tout $n \geq 0$.

Convergence

Définition rigoureuse

La suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\epsilon \,, \text{ on a : } \; |u_n - \ell| < \epsilon \,.$$

Convergence

Définition rigoureuse

La suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\epsilon \,, \ \text{on a :} \ \ |u_n - \ell| < \epsilon \,.$$

Notations

On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} u = \ell$ ou $u_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.

Convergence

Définition rigoureuse

La suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_\epsilon \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\epsilon \,, \ \text{ on a : } \ |u_n - \ell| < \epsilon \,.$$

Notations

On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} u = \ell$ ou $u_n \to \ell$ quand $n \to \infty$.

Exemples

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0, \ \lim_{n \to +\infty} \left(2 - \mathrm{e}^{-n}\right) = 2.$$

Soit $u_n := \left(1 + \frac{\log(2)}{n}\right)^n$. Alors, $u_n \to 2$ quand $n \to \infty$.

Divergence

Définition

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Divergence

Définition

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Divergence vers l'infini

On dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ si

$$\forall H > 0 \ \exists n_H \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_H \text{ on a : } u_n \geq H\,.$$

De même, on dit que la suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers $-\infty$ si

$$\forall H > 0 \ \exists n_H \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_H \text{ on a : } u_n \leq -H\,.$$

Plan

Unicité de la limite

Théorème

Toute suite admet au plus une limite

Unicité de la limite

Théorème

Toute suite admet au plus une limite

Preuve

Supposons par l'absurde qu'une suite u converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$ avec $\ell_2 \neq \ell_1$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $|\ell_1 - \ell_2| > 2\epsilon_0$. Par <u>définition</u> :

$$\begin{array}{rlll} & \exists N^1_{\epsilon_0} \geq n_0 & \text{tel que } \forall n \geq N^1_{\epsilon_0}\,, \text{ on a : } & |u_n - \ell_1| < \epsilon_0 \\ \text{et} & \exists N^2_{\epsilon_0} \geq n_0 & \text{tel que } \forall n \geq N^2_{\epsilon_0}\,, \text{ on a : } & |u_n - \ell_2| < \epsilon_0\,. \end{array}$$

Unicité de la limite

Théorème

Toute suite admet au plus une limite

Preuve

Supposons par l'absurde qu'une suite u converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$ avec $\ell_2 \neq \ell_1$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $|\ell_1 - \ell_2| > 2\epsilon_0$. Par définition :

$$\begin{array}{ll} & \exists N^1_{\epsilon_0} \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N^1_{\epsilon_0}, \text{ on a : } \ |u_n - \ell_1| < \epsilon_0 \\ \text{et} & \exists N^2_{\epsilon_0} \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N^2_{\epsilon_0}, \text{ on a : } \ |u_n - \ell_2| < \epsilon_0 \, . \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max\left\{N^1_{\epsilon_0}; N^2_{\epsilon_0}\right\}$, $|u_n - \ell_2| + |u_n - \ell_1| < 2\epsilon_0$.

Unicité de la limite

Théorème

Toute suite admet au plus une limite

Preuve

Supposons par l'absurde qu'une suite u converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$ avec $\ell_2 \neq \ell_1$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $|\ell_1 - \ell_2| > 2\epsilon_0$. Par définition :

$$\begin{array}{lll} & \exists N^1_{\epsilon_0} \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N^1_{\epsilon_0}, \text{ on a : } & |u_n - \ell_1| < \epsilon_0 \\ \text{et} & \exists N^2_{\epsilon_0} \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N^2_{\epsilon_0}, \text{ on a : } & |u_n - \ell_2| < \epsilon_0 \,. \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max\left\{N^1_{\epsilon_0}; N^2_{\epsilon_0}\right\}$, $|u_n - \ell_2| + |u_n - \ell_1| < 2\epsilon_0$. L'inégalité triangulaire implique $|\ell_2 - \ell_1| < 2\epsilon_0$ ce qui est faux d'après la définition de ϵ_0.

Bornitude des suites convergente

Théorème

Toute suite convergente est bornée

Bornitude des suites convergente

Théorème

Toute suite convergente est bornée

Preuve

Soit l la limite d'une suite u. Par définition, il existe $N_1 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a : $|u_n - \ell| < 1$. L'inégalité triangulaire implique

$$|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < |\ell| + 1$$

pour tout $n \geq N_1$. Puis, comme $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n_0 \leq n \leq N_1$ et que N_1 est un nombre fini, on en déduit l'existence de $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n_0 \leq n \leq N_1$. Conséquemment, on a :

$$|u_n| \leq M_0 := \max\{M; |\ell| + 1\}$$

pour tout $n \geq n_0$.

Somme de suites convergentes

Théorème

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors $u + v$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$.

Somme de suites convergentes

Théorème

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors $u+v$ est convergente de limite $\ell_1+\ell_2$.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} & \exists N_1 \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_1\,,\ \text{on a : } \ |u_n - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{et} \quad & \exists N_2 \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_2\,,\ \text{on a : } \ |v_n - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire implique

$$|u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \epsilon$$

pour tout $n \geq \max\{N_1; N_2\}$.

Multiplication par un scalaire

Théorème

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors la suite $\lambda.u$ est convergente de limite $\lambda \times \ell$.

Multiplication par un scalaire

Théorème

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors la suite $\lambda.u$ est convergente de limite $\lambda \times \ell$.

Preuve

Si $\lambda = 0$, on a $\lambda u_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite tend bien vers $0 = \lambda \times \ell$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe $N_1 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a : $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{\lambda}$.
Alors :

$$|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda|\,|u_n - \ell| < \epsilon$$

pour tout $n \geq N_1$.

Produit de suites convergentes

Théorème

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors $u \times v$ est convergente de limite $\ell_1 \times \ell_2$.

Produit de suites convergentes

Théorème

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors $u \times v$ est convergente de limite $\ell_1 \times \ell_2$.

Preuve

La suite v est convergente donc elle est bornée par $M > 0$.
Supposons $\ell_1 = 0$. Alors, par définition, on a :

$$\exists N_1 \geq n_0 \quad \text{tel que } \forall n \geq N_1 \text{, on a : } |u_n| < \frac{\epsilon}{M}.$$

On en déduit : $|u_n v_n - 0 \times \ell_2| < \frac{\epsilon}{M} \times M$ pour tout $n \geq N_1$. Donc la suite uv tend bien vers 0. Si $\ell_1 \neq 0$, on remarque :

$$u_n v_n = (u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 v_n.$$

La suite de terme général $(u_n - \ell_1) v_n$ tend vers 0 et $\ell_1 v_n$ tend vers $\ell_1 \ell_2$.

Théorème de comparaison

Idée du théorème

Certaines suites sont difficiles à étudier. On préfère se ramener à des suites plus sympathiques.

Théorème de comparaison

Idée du théorème

Certaines suites sont difficiles à étudier. On préfère se ramener à des suites plus sympathiques.

Théorème

Soient trois suites réelles u, v et w. On suppose que l'on a :

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{pour tout} \;\; n \geq n_0 \,.$$

On suppose de plus que u converge vers ℓ_u et que w converge vers ℓ_w. Alors : $\ell_u \leq \ell_w$. De plus, v est bornée.
Si de plus, $\ell_u = \ell_w =: \ell$, alors v est convergente de limite ℓ.

Théorème de comparaison

Idée du théorème

Certaines suites sont difficiles à étudier. On préfère se ramener à des suites plus sympathiques.

Théorème

Soient trois suites réelles u, v et w. On suppose que l'on a :

$$u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0\,.$$

On suppose de plus que u converge vers ℓ_u et que w converge vers ℓ_w. Alors : $\ell_u \leq \ell_w$. De plus, v est bornée.
Si de plus, $\ell_u = \ell_w =: \ell$, alors v est convergente de limite ℓ.

Remarque

Si $\ell_u = +\infty$ alors v et w divergent vers $+\infty$. Et, si $\ell_w = -\infty$ alors u et v divergent vers $-\infty$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Preuve

Comme la suite est majorée, l'ensemble $\{u_{n_0} \,;\, u_{n_0+1} \,;\, \cdots \,;\, u_n \,;\, \cdots\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Conséquemment, elle admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (définition de $\mathbb{R}$). Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq n_0$ tel que $\ell - \epsilon < u_N < \ell$ puis comme la suite est croissante on a : $\ell - \epsilon < u_n < \ell$ pour tout $n \geq N$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Preuve

Comme la suite est majorée, l'ensemble $\{u_{n_0} ; u_{n_0+1} ; \cdots ; u_n ; \cdots\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Conséquemment, elle admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (définition de $\mathbb{R}$). Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq n_0$ tel que $\ell - \epsilon < u_N < \ell$ puis comme la suite est croissante on a : $\ell - \epsilon < u_n < \ell$ pour tout $n \geq N$.

Suite décroissante et minorée

Soit une suite réelle u décroissante et minorée par m. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq m$.

Suite croissante et majorée

Théorème

Soit une suite réelle u croissante et majorée par M. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \leq M$.

Preuve

Comme la suite est majorée, l'ensemble $\{u_{n_0} \,;\, u_{n_0+1} \,;\, \cdots \,;\, u_n \,;\, \cdots\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Conséquemment, elle admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (définition de $\mathbb{R}$). Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq n_0$ tel que $\ell - \epsilon < u_N < \ell$ puis comme la suite est croissante on a : $\ell - \epsilon < u_n < \ell$ pour tout $n \geq N$.

Suite décroissante et minorée

Soit une suite réelle u décroissante et minorée par m. Alors, u converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq m$.

ATTENTION

Ce résultat est vrai car on est sur $\mathbb{R}$ qui est complet.

Suites adjacentes

Théorème

Les suites $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n \geq n_0}$ sont adjacentes si

- u est croissante.
- v est décroissante.
- Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.
- $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Alors, les suites u et v convergent vers une même limite.

Suites adjacentes

Théorème

Les suites $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n \geq n_0}$ sont adjacentes si

- u est croissante.
- v est décroissante.
- Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.
- $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Alors, les suites u et v convergent vers une même limite.

Preuve

La suite u est croissante et majorée par v_{n_0} donc elle converge vers ℓ_u. La suite v est décroissante et minorée par u_{n_0} donc elle converge vers ℓ_v. Et, $u_n - v_n$ tend vers $\ell_u - \ell_v$ d'où $\ell_u = \ell_v$.

Autres propriétés

Limite d'une suite complexe

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, u est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}\left(\lim u\right)$ et $\lim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(\lim u\right)$.

Autres propriétés

Limite d'une suite complexe

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, u est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}\left(\lim u\right)$ et $\lim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(\lim u\right)$.

Valeur absolue (ou module) d'une suite convergente

Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors, $|u|$ converge vers $|\ell|$.

Autres propriétés

Limite d'une suite complexe

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, u est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. De plus, on a $\lim \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}\left(\lim u\right)$ et $\lim \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(\lim u\right)$.

Valeur absolue (ou module) d'une suite convergente

Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors, $|u|$ converge vers $|\ell|$.

Fonction continue d'une suite convergente

Soit u une suite convergente de limite ℓ et φ une fonction <u>continue</u> de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On introduit la suite v définie par $v_n := \varphi\left(u_n\right)$. Alors, la suite v_n est convergente de limite $\varphi(\ell)$.

Plan

Suites arithmétiques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de *raison a* si l'on a

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \geq 0\,.$$

Suites arithmétiques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de *raison* a si l'on a

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \geq 0 \,.$$

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 + na$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(u_0 + \frac{na}{2}\right) \,.$$

Suites arithmétiques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de *raison* a si l'on a

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \geq 0 \, .$$

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 + na$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left(u_0 + \frac{na}{2} \right) \, .$$

Convergence

Si $a > 0$, $u_n \to +\infty$. Si $a < 0$, $u_n \to -\infty$.

Suites géométriques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de *raison* $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$.

Suites géométriques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de *raison* $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$.

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 q^n$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$.

Suites géométriques

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de *raison* $q \neq 1$ si l'on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq 0$.

Théorèmes

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n = u_0 q^n$. Et, pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$.

Convergence

Si $|q| > 1$, $|u_n| \to +\infty$. Si $|q| < 1$, $|u_n| \to 0$.

Suites puissances

Définition

Une suite puissance a un terme général de la forme $u_n = n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Suites puissances

Définition

Une suite puissance a un terme général de la forme $u_n = n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Convergence

La suite u converge vers 0 si $\alpha < 0$. Si $\alpha > 0$, elle tend vers $+\infty$.

Suites arithmético-géométriques

Définition

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. La suite définie par

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est dite arithmético-géométrique.

Suites arithmético-géométriques

Définition

Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$ et soit $b \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. La suite définie par

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est dite arithmético-géométrique.

Terme général

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$.

Définition

Suites récurrentes

Une suite u est récurrente si chaque terme est défini à partir de ses précédents :

$$u_{n+1} := \varphi_{n+1}\left(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n\right)$$

où φ_{n+1} est une fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition

Suites récurrentes

Une suite u est récurrente si chaque terme est défini à partir de ses précédents :

$$u_{n+1} := \varphi_{n+1}\left(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n\right)$$

où φ_{n+1} est une fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit $u_0 := 3$ et $\varphi_n\left(x_0, \cdots, x_{n-1}\right) := 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Alors :

$$u_0 = 3, u_1 = 4, u_2 = \frac{9}{2}, u_3 = \frac{29}{6}, u_4 = \frac{61}{12} \cdots$$

Suites récurrentes d'ordre 2

Définition

La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre deux s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \, .$$

Suites récurrentes d'ordre 2

Définition

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre deux s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \,.$$

Théorème

L'équation caractéristique de la suite est $X^2 - aX - b = 0$. Si $\Delta := a^2 + 4b$ est non nul, il y a deux solutions r_1 et r_2 puis il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si Δ est nul, il y a une unique solution r_0 puis il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2)\, r_0^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème du point fixe

Théorème

Soit une fonction f telle que

Théorème du point fixe

Théorème

Soit une fonction f telle que

1. f est définie, continue et dérivable sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, $\mathcal{I} = [a; b]$.

Théorème du point fixe

Théorème

Soit une fonction f telle que

1. f est définie, continue et dérivable sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, $\mathcal{I} = [a; b]$.
2. $\mathcal{I}$ est stable par f : $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.

Théorème du point fixe

Théorème

Soit une fonction f telle que

1. f est définie, continue et dérivable sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, $\mathcal{I} = [a; b]$.
2. $\mathcal{I}$ est stable par f : $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.
3. Pour tout $t \in \mathcal{I}$, $|f'(t)| \leq \rho < 1$.

Théorème du point fixe

Théorème

Soit une fonction f telle que

1. f est définie, continue et dérivable sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, $\mathcal{I} = [a; b]$.
2. $\mathcal{I}$ est stable par f : $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$.
3. Pour tout $t \in \mathcal{I}$, $|f'(t)| \leq \rho < 1$.

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathcal{I}$ et $u_{n+1} := f(u_n)$. Cette suite converge vers l'unique point fixe de f sur $\mathcal{I}$, c'est-à-dire l'unique élément $\ell \in \mathcal{I}$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Preuve du théorème du point fixe

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a
$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| = \left|\int_{u_{n-1}}^{u_n} f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \rho\,|u_n - u_{n-1}|$.
Par récurrence, il vient $|u_{n+1} - u_n| \leq \rho^n\,|f(u_0) - u_0|$. Donc :

$$
\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &\leq |f(u_0) - u_0|\left(\rho^n + \cdots + \rho^{n+p-1}\right)\\
&\leq \rho^n\,|f(u_0) - u_0|\,\frac{1}{1-\rho}
\end{aligned}
$$

La suite u est donc une suite de Cauchy sur $\mathbb{R}$ donc elle converge vers $\ell \in \mathcal{I}$. La suite $f(u)$ converge quant à elle vers $f(\ell)$. Puis, comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit $f(\ell) = \ell$. L'unicité du point fixe s'obtient en procédant par l'absurde.