Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 4 : Intégration (Point de vue pratique).

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Principe général

Rappel

Soient deux fonctions dérivables (et de dérivées continues) u et v.
Alors, la dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$.

Principe général

Rappel

Soient deux fonctions dérivables (et de dérivées continues) u et v. Alors, la dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Principe général

Rappel

Soient deux fonctions dérivables (et de dérivées continues) u et v. Alors, la dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque

Lorsque l'on doit calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la difficulté est de choisir u et v telles que $f = u'v$ et telles que uv' soit plus facile à intégrer que $u'v$.

Exemples

- $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$. On intègre 1 et on dérive le logarithme. En effet, la primitive de 1 est x et la dérivée du logarithme est $\frac{1}{x}$. Donc $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t = x\log(x) - x + 1$.

Exemples

- $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$. On intègre 1 et on dérive le logarithme. En effet, la primitive de 1 est x et la dérivée du logarithme est $\frac{1}{x}$. Donc $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t = x\log(x) - x + 1$.
- Au contraire, on intègre généralement l'exponentielle car elle est égale à son intégrale. Donc $\int_0^x t\exp(t)\mathrm{d}t = (x-1)\exp(x) + 1$.

Exemples

- $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$. On intègre 1 et on dérive le logarithme. En effet, la primitive de 1 est x et la dérivée du logarithme est $\frac{1}{x}$. Donc $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t = x\log(x) - x + 1$.
- Au contraire, on intègre généralement l'exponentielle car elle est égale à son intégrale. Donc $\int_0^x t\exp(t)\mathrm{d}t = (x-1)\exp(x) + 1$.
- $I(x) := \int_0^x \cos(t)\exp(t)\mathrm{d}t$. Alors : $I(x) = \cos(x)\exp(x) - 1 + \int_0^x \sin(t)\exp(t)\mathrm{d}t = \cos(x)\exp(x) - 1 + \sin(x)\exp(x) - \int_0^x \cos(t)\exp(t)\mathrm{d}t$ d'où $I(x) = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2}\exp(x) - \frac{1}{2}$.

Plan

Principe général

Rappel

$$\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f' \circ g)(x) g'(x) \mathrm{d}x.$$

Principe général

Rappel

$\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f' \circ g)(x) g'(x) \mathrm{d}x.$

Théorème

Soit φ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et telle que φ' est continue. On suppose de plus que φ est bijective sur $[a; b]$. On se donne une fonction f continue sur $[\varphi(a); \varphi(b)]$. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x) \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \mathrm{d}x\,.$$

Principe général

Rappel

$\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f' \circ g)(x) g'(x) \mathrm{d}x$.

Théorème

Soit φ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et telle que φ' est continue. On suppose de plus que φ est bijective sur $[a; b]$. On se donne une fonction f continue sur $[\varphi(a); \varphi(b)]$. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \mathrm{d}x .$$

Remarque

Pour calculer $\int_a^b g(x) \mathrm{d}x$, la difficulté est de choisir f et φ telles que $g = f \circ \varphi$ et telles que f soit plus facile à intégrer que g.

Exemple

On considère l'intégrale

$$I := \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \,.$$

On pose $u(x) := \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où $x = \frac{1+u(x)^2}{1-u(x)^2}$. Puis, $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\log|x| = \mathrm{d}\log|1+u(x)^2| - \mathrm{d}\log|1-u(x)^2| = \frac{2u(x)\mathrm{d}u(x)}{1+u(x)^2} + \frac{2u(x)\mathrm{d}u(x)}{1-u(x)^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2u^2}{1-u^2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u \\
&= -2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= -\frac{\pi}{3} + \log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right| = -\frac{\pi}{3} + \log(\sqrt{3}+2)\,.
\end{aligned}$$

Plan

Techniques

Les deux intégrales élémentaires

En utilisant la décomposition en éléments simples et le changement de variables, il suffit de connaître les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x|$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x)\,.$$

Techniques

Les deux intégrales élémentaires

En utilisant la décomposition en éléments simples et le changement de variables, il suffit de connaître les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x|$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x)\,.$$

Autre intégrale utile

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1)\,.$$

Idée générale

Fonctions impliquant cos, sin et/ou tan

On cherche à calculer une intégrale de la forme

$$\int f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))\,\mathrm{d}x$$

où f est une fonction continue, typiquement une fonction polynômiale ou une fraction rationnelle. Il faut alors procéder à un changement de variable. Mais lequel ?

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "dx". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "dx". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "$\mathrm{d}x$". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "$\mathrm{d}x$". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi + x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \tan(x)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "dx". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi + x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \tan(x)$.
- Sinon, on pose $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "$\mathrm{d}x$". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi + x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \tan(x)$.
- Sinon, on pose $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Rappel

Si $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors : $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\tan(x) = \frac{2u}{1-u^2}$.

Idée générale

Rappels

On définit les fonctions hyperboliques ainsi :

$$\cosh(x) := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\ \sinh(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\ \tanh(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Idée générale

Rappels

On définit les fonctions hyperboliques ainsi :

$$\cosh(x) := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\ \sinh(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\ \tanh(x) := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Calcul pratique

Pour calculer une intégrale faisant intervenir ce genre de fonctions, on utilise le changement de variable $u := \mathrm{e}^x$.

Plan

Intégrabilité

Théorème

Si une fonction f est continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors elle est intégrable sur $\mathcal{D}$. Et, une fonction peut être intégrable même sans être continue.

Intégrabilité

Théorème

Si une fonction f est continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors elle est intégrable sur $\mathcal{D}$. Et, une fonction peut être intégrable même sans être continue.

Exemple

$$\iint_{|x|^2+|y|^2<1} \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\,.$$

Intégration sur un rectangle

Calcul pratique

Soit f une fonction continue sur un domaine $(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$. On suppose ici que le domaine d'intégration est "une boule pour la norme $||\cdot||_\infty$" c'est-à-dire un rectangle : $(\Delta) := [a; b] \times [c, d]$. On a alors :

Intégration sur un rectangle

Calcul pratique

Soit f une fonction continue sur un domaine $(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$. On suppose ici que le domaine d'intégration est "une boule pour la norme $||\cdot||_\infty$" c'est-à-dire un rectangle : $(\Delta) := [a; b] \times [c, d]$. On a alors :

$$\iint_{(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \,.$$

Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Théorème de Fubini

Si la fonction f est positive, alors on peut intervertir :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Théorème de Fubini

Si la fonction f est positive, alors on peut intervertir :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

et éventuellement, cette intégrale vaut l'infini.

Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Théorème de Fubini

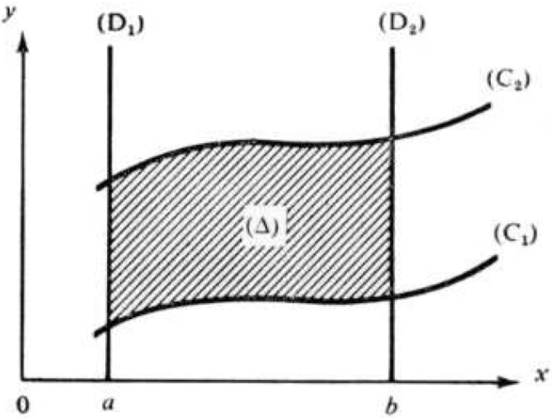
Si la fonction f est positive, alors on peut intervertir :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

et éventuellement, cette intégrale vaut l'infini.

Si la fonction f n'est pas positive, on peut intervertir si l'on a $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$.

Domaine (Δ)



Sur un domaine délimité par deux droites verticales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ) défini par $(\Delta) := \{(x; y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

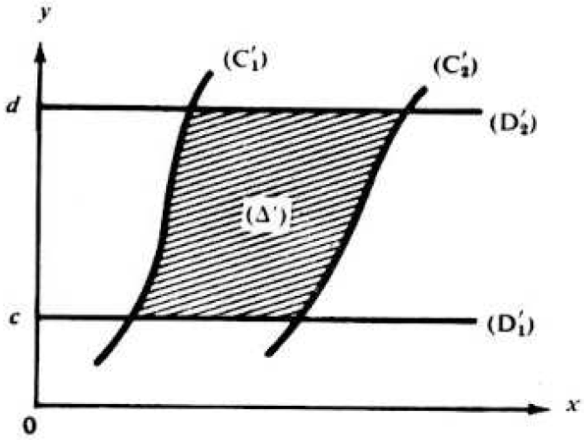
Sur un domaine délimité par deux droites verticales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ) défini par $(\Delta) := \{(x;y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\, a \leq x \leq b\}$ où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On calcule ainsi :

$$\iint_{(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Domaine (Δ')



Sur un domaine délimité par deux droites horizontales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ') défini par $(\Delta') := \{(x; y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d\}$ où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

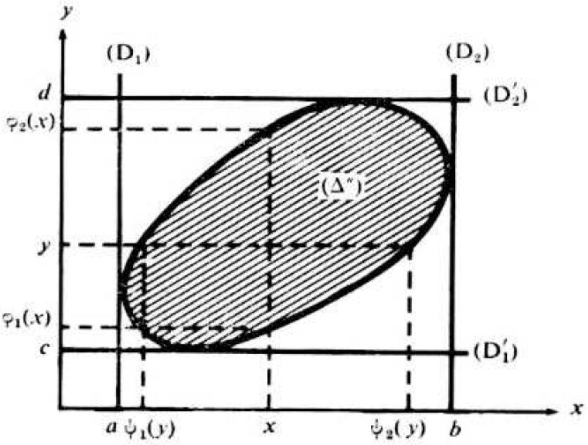
Sur un domaine délimité par deux droites horizontales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ') défini par $(\Delta') := \{(x;y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d\}$ où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On calcule ainsi :

$$\iint_{(\Delta')} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Domaine (Δ'')



Sur un domaine convexe

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ''). On suppose ici que le domaine (Δ'') est convexe, c'est-à-dire que toute droite ne rencontre sa frontière qu'en 2 points au plus.

Sur un domaine convexe

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ''). On suppose ici que le domaine (Δ'') est convexe, c'est-à-dire que toute droite ne rencontre sa frontière qu'en 2 points au plus. On peut alors écrire le domaine de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\Delta'') &= \{(x;y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\, a \leq x \leq b\} \\ &= \{(x;y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d\}\ .\end{aligned}$$

Sur un domaine convexe

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ''). On suppose ici que le domaine (Δ'') est convexe, c'est-à-dire que toute droite ne rencontre sa frontière qu'en 2 points au plus. On peut alors écrire le domaine de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\Delta'') &= \{(x;y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\, a \leq x \leq b\} \\ &= \{(x;y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d\}\ .\end{aligned}$$

On peut ainsi calculer :

$$\begin{aligned}\iint_{(\Delta'')} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes.

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. Notons $\mathcal{P}$ l'application bijective qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi;\pi]$ et qui est définie par
$\mathcal{P}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$.

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. Notons $\mathcal{P}$ l'application bijective qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi;\pi]$ et qui est définie par $\mathcal{P}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$. Par ailleurs, on a $\mathcal{P}^{-1}(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. Notons $\mathcal{P}$ l'application bijective qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi;\pi]$ et qui est définie par $\mathcal{P}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$. Par ailleurs, on a $\mathcal{P}^{-1}(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Théorème

Soit une fonction continue f sur un domaine (Δ). Alors, on a

$$\iint_{(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{P}((\Delta))} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.$$

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{array} \right).$$

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ce déterminant donne $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$.

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ce déterminant donne $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$.

Utilisation des polaires

On utilise les polaires lorsque le domaine se définit facilement par le module et l'argument. Ainsi, on évite absolument d'utiliser les coordonnées polaires pour les rectangles. Mais, pour les domaines de la forme $\{x^2 + y^2 \leq R_0^2, \lambda x \leq y \leq \mu x\}$, on préfère les polaires.

Plan

Généralités

Calcul pratique et définition

Tout se passe comme avec les intégrales doubles. On peut également considérer des intégrales quadruples ou quintuples...

Généralités

Calcul pratique et définition

Tout se passe comme avec les intégrales doubles. On peut également considérer des intégrales quadruples ou quintuples...

Coordonnées cartésiennes

Le calcul en coordonnées cartésiennes est similaire à celui sur les intégrales doubles. Et, l'on peut intervertir sur un domaine borné pour peu que la fonction soit continue. On peut également intervertir si le module de la fonction est sommable sur $\mathbb{R}^3$.

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques consistent à transformer (x, y) en (r, θ).

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques consistent à transformer (x, y) en (r, θ). La bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques est donc

$$\mathcal{C}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right), z \right)$$

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques consistent à transformer (x, y) en (r, θ). La bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques est donc

$$\mathcal{C}\,(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right), z\right)$$

et ainsi

$$\mathcal{C}^{-1}\,(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\ .$$

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ).

Intégration en coordonnées cylindriques

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(\Delta)'} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,,$$

où $(\Delta)' := \mathcal{C}\left((\Delta)\right)$

Intégration en coordonnées cylindriques

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(\Delta)'} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,,$$

où $(\Delta)' := \mathcal{C}\left((\Delta)\right)$

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

dont le déterminant est r.

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Contrairement aux coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques modifient les trois coordonnées.

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Contrairement aux coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques modifient les trois coordonnées. On note $\mathcal{S}$ la bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times \left]-\pi, \pi\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et qui fait passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques. On a :

$$\mathcal{S}^{-1}(r, \theta, \varphi) := (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \ .$$

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Contrairement aux coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques modifient les trois coordonnées. On note $\mathcal{S}$ la bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et qui fait passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques. On a :

$$\mathcal{S}^{-1}(r,\theta,\varphi) := (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \ .$$

La transformation $\mathcal{S}$ s'exprime comme suit

$$\mathcal{S}(x,y,z) := \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right.$$
$$\left., \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right) \ .$$

Intégration en coordonnées sphériques - 1

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ).

Intégration en coordonnées sphériques - 1

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\mathcal{S}((\Delta))} f\left(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r^2\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.$$

Calcul d'une intégrale sur une boule

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} x^2y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Intégration en coordonnées sphériques - 1

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\mathcal{S}((\Delta))} f\left(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r^2\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.$$

Calcul d'une intégrale sur une boule

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} x^2y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{945}R^9\,.$$

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \end{array}\right)$$

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est $r^2\cos(\varphi) \geq 0$ puisque $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.