Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 3 : Intégration (Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples).

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Définitions - 1

Définitions - 1

Définition

Une fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ s'écrit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $Q \neq 0$.

Définitions - 1

Définition

Une fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ s'écrit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $Q \neq 0$.

Définition

L'ensemble des fractions rationnelles se note $\mathbb{R}(X)$.

Définitions - 1

Définition

Une fraction rationnelle F sur $\mathbb{R}$ s'écrit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $Q \neq 0$.

Définition

L'ensemble des fractions rationnelles se note $\mathbb{R}(X)$.

Définition

On dira que deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont égales si $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

Définitions - 2

Définition

Si $F = \frac{P}{Q}$, alors $\frac{P}{Q}$ est appelé un représentant de F.

Définitions - 2

Définition

Si $F = \frac{P}{Q}$, alors $\frac{P}{Q}$ est appelé un représentant de F.

Exemple

Les expressions $\frac{X}{X^2+1}$, $\frac{2X}{2X^2+2}$ et $\frac{X^2}{X^3+X}$ sont des représentants de la même fraction.

Définitions - 3

Définition

Si $F \in \mathbb{R}(X)$ est tel que $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où $Q \neq 0$ et où P est premier avec Q, alors le couple (P, Q) est unique à une constante (dans $\mathbb{R}$) multiplicative non nulle près.

Définitions - 3

Définition

Si $F \in \mathbb{R}(X)$ est tel que $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où $Q \neq 0$ et où P est premier avec Q, alors le couple (P, Q) est unique à une constante (dans $\mathbb{R}$) multiplicative non nulle près.

Définition

Dans ce cas, on dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

Définitions - 3

Définition

Si $F \in \mathbb{R}(X)$ est tel que $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ où $Q \neq 0$ et où P est premier avec Q, alors le couple (P, Q) est unique à une constante (dans $\mathbb{R}$) multiplicative non nulle près.

Définition

Dans ce cas, on dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

Exemple

Soit $F(X) := \frac{X^2}{X^3+X}$. Alors F admet $\frac{X}{X^2+1}$ pour représentant irréductible.

Addition

Définition

Soient $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ deux éléments dans $\mathbb{R}(X)$. On pose

$$F_1 + F_2 := \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}\,.$$

Addition

Définition

Soient $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ deux éléments dans $\mathbb{R}(X)$. On pose

$$F_1 + F_2 := \frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}\,.$$

Remarque

Ainsi définie, la somme de deux fractions rationnelles ne dépend pas des représentants choisis.

Produit

Définition

Soient $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ deux éléments dans $\mathbb{R}(X)$. On pose

$$F_1 \times F_2 := \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}\,.$$

Produit

Définition

Soient $F_1 := \frac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 := \frac{P_2}{Q_2}$ deux éléments dans $\mathbb{R}(X)$. On pose

$$F_1 \times F_2 := \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}\,.$$

Remarque

Ainsi défini, le produit de deux fractions rationnelles ne dépend pas des représentants choisis.

Produit par un scalaire

Définition

Soient $F := \frac{P}{Q}$ un élément dans $\mathbb{R}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$\lambda F := \frac{\lambda P}{Q}\,.$$

Produit par un scalaire

Définition

Soient $F := \frac{P}{Q}$ un élément dans $\mathbb{R}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$\lambda F := \frac{\lambda P}{Q}\,.$$

Remarque

Ainsi défini, le produit d'une fraction rationnelle par un scalaire ne dépend pas du représentant choisi.

Définition

Définition

Soit une fraction rationnelle $F(X) := \frac{P(X)}{Q(X)}$. Si $F \neq 0$, on appelle degré de F le nombre entier (non nécessairement positif) défini par

$$\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)\,.$$

Et, si $F = 0$, on pose $\deg(F) := -\infty$.

Définition

Définition

Soit une fraction rationnelle $F(X) := \frac{P(X)}{Q(X)}$. Si $F \neq 0$, on appelle degré de F le nombre entier (non nécessairement positif) défini par

$$\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q) .$$

Et, si $F = 0$, on pose $\deg(F) := -\infty$.

Remarque

Le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas du représentant choisi.

Exemples

Exemple

On considère $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. Alors, $\deg(F) = -1$.

Exemples

Exemple

On considère $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. Alors, $\deg(F) = -1$.

Exemple

On considère $F(X) := \frac{X^4}{X^2+1}$. Alors $\deg(F) = 2$.

Exemples

Exemple

On considère $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. Alors, $\deg(F) = -1$.

Exemple

On considère $F(X) := \frac{X^4}{X^2+1}$. Alors $\deg(F) = 2$.

Remarque

Comme on a pu le constater dans l'exemple précédent, une fraction rationnelle avec un degré positif n'est pas nécessairement un polynôme.

Propriété

Voyons maintenant quelques propriétés du degré des fractions rationnelles.

Propriété

Voyons maintenant quelques propriétés du degré des fractions rationnelles.

Proposition

Soient $F, G \in \mathbb{R}(X)$. Comme pour le degré des polynômes, $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$.

Propriété

Voyons maintenant quelques propriétés du degré des fractions rationnelles.

Proposition

Soient $F, G \in \mathbb{R}(X)$. Comme pour le degré des polynômes, $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$.

Exercice

Démontrer la proposition.

Plan

Zéro d'une fraction rationnelle

Définition

Soit $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant *irréductible*. Alors toute racine du numérateur P est un zéro.

Zéro d'une fraction rationnelle

Définition

Soit $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant *irréductible*. Alors toute racine du numérateur P est un zéro.

Exemple

Soit $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. Alors 0 est un zéro de F.

Zéro d'une fraction rationnelle

Définition

Soit $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant *irréductible*. Alors toute racine du numérateur P est un zéro.

Exemple

Soit $F(X) := \frac{X}{X^2+1}$. Alors 0 est un zéro de F.

Contre-exemple

Soit $F(X) := \frac{X(X+1)}{(X^2+1)(X+1)}$. Alors -1 n'est pas un zéro de F.

Pôle d'une fraction rationnelle

La notion de pôle d'une fraction rationnelle est essentielle dans la décomposition en éléments simples, cette dernière étant centrale dans l'étude des fonctions de transfert en traitement du signal.

Pôle d'une fraction rationnelle

La notion de pôle d'une fraction rationnelle est essentielle dans la décomposition en éléments simples, cette dernière étant centrale dans l'étude des fonctions de transfert en traitement du signal.

Définition

Soit $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant *irréductible*. Alors toute racine du dénominateur Q est un pôle.

Pôle d'une fraction rationnelle

La notion de pôle d'une fraction rationnelle est essentielle dans la décomposition en éléments simples, cette dernière étant centrale dans l'étude des fonctions de transfert en traitement du signal.

Définition

Soit $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant *irréductible*. Alors toute racine du dénominateur Q est un pôle.

Exemple

Soit $F(X) := \frac{X}{X^2-1}$. Alors 1 est un pôle de F.

Pôle d'une fraction rationnelle

La notion de pôle d'une fraction rationnelle est essentielle dans la décomposition en éléments simples, cette dernière étant centrale dans l'étude des fonctions de transfert en traitement du signal.

Définition

Soit $F := \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant *irréductible*. Alors toute racine du dénominateur Q est un pôle.

Exemple

Soit $F(X) := \frac{X}{X^2-1}$. Alors 1 est un pôle de F.

Contre-exemple

Soit $F(X) := \frac{X(X+2)}{(X^2-1)(X+2)}$. Alors -2 n'est pas un pôle de F.

Plan

Intégration

D'abord, quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x} \mathrm{d}x\,?$$

Intégration

D'abord, quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x} \mathrm{d}x\,?$$

Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) := \frac{x^3-x^2+1}{x^5+5x^3+4x}$.

Intégration

D'abord, quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x} \mathrm{d}x\,?$$

Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) := \frac{x^3-x^2+1}{x^5+5x^3+4x}$. Est-il vraiment évident qu'une telle primitive est

Intégration

D'abord, quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x} \mathrm{d}x \, ?$$

Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) := \frac{x^3-x^2+1}{x^5+5x^3+4x}$. Est-il vraiment évident qu'une telle primitive est

$$F(x) := \frac{1}{4}\log(x) - \frac{1}{3}\log(1+x^2) - \frac{1}{3}\arctan(x) + \frac{5}{24}\log(4+x^2) + \frac{8}{3}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \, ?$$

Intégration

D'abord, quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x} \mathrm{d}x\,?$$

Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) := \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 4x}$. Est-il vraiment évident qu'une telle primitive est

$$\begin{aligned} F(x) :=& \frac{1}{4}\log(x) - \frac{1}{3}\log(1+x^2) - \frac{1}{3}\arctan(x) + \frac{5}{24}\log(4+x^2) \\ &+ \frac{8}{3}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)? \end{aligned}$$

Toutefois, si l'on remarque $f(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,\frac{1+2x}{1+x^2} + \frac{1}{12}\,\frac{16+5x}{4+x^2}$, la connaissance des primitives usuelles permet de conclure immédiatement.

Transformée de Laplace inverse

On cherche f telle que sa transformée de Laplace est

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} \, .$$

Transformée de Laplace inverse

On cherche f telle que sa transformée de Laplace est

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} \, .$$

La réponse est bien évidemment

Transformée de Laplace inverse

On cherche f telle que sa transformée de Laplace est

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2}\,.$$

La réponse est bien évidemment
$f(x) := (10 - 4x - 10\mathrm{e}^{-x} - 5x\mathrm{e}^{-x})\,H(x)$ où H est la fonction de Heaviside.

Transformée de Laplace inverse

On cherche f telle que sa transformée de Laplace est

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2}\,.$$

La réponse est bien évidemment
$f(x) := \left(10 - 4x - 10\mathrm{e}^{-x} - 5x\mathrm{e}^{-x}\right) H(x)$ où H est la fonction de Heaviside. Or, au-delà des techniques usuelles en mathématiques des signaux pour aboutir à ce résultat, il fallait remarquer

$$\frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} = -\frac{4}{p^2} + \frac{10}{p} - \frac{5}{(p+1)^2} - \frac{10}{p+1}\,.$$

Transformée de Laplace inverse

On cherche f telle que sa transformée de Laplace est

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} \,.$$

La réponse est bien évidemment $f(x) := (10 - 4x - 10\mathrm{e}^{-x} - 5x\mathrm{e}^{-x})\, H(x)$ où H est la fonction de Heaviside. Or, au-delà des techniques usuelles en mathématiques des signaux pour aboutir à ce résultat, il fallait remarquer

$$\frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} = -\frac{4}{p^2} + \frac{10}{p} - \frac{5}{(p+1)^2} - \frac{10}{p+1} \,.$$

En d'autres termes, il fallait avoir décomposé en éléments simples.

Transformée de Laplace inverse

On cherche f telle que sa transformée de Laplace est

$$\widetilde{f}(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} \,.$$

La réponse est bien évidemment
$f(x) := (10 - 4x - 10\mathrm{e}^{-x} - 5x\mathrm{e}^{-x})\, H(x)$ où H est la fonction de Heaviside. Or, au-delà des techniques usuelles en mathématiques des signaux pour aboutir à ce résultat, il fallait remarquer

$$\frac{p^2 + 2p - 4}{p^4 + 2p^3 + p^2} = -\frac{4}{p^2} + \frac{10}{p} - \frac{5}{(p+1)^2} - \frac{10}{p+1} \,.$$

En d'autres termes, il fallait avoir décomposé en éléments simples.

Remarque

On pouvait aussi procéder à un produit de convolution entre deux distributions. Mais, il était plus simple de décomposer en éléments simples.

Théorème général (preuve admise)

Théorème

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F tel que Q admet la décomposition en facteurs irréductibles suivante :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{r} P_k(X)^{\alpha_k}.$$

Alors, la fraction F s'écrit de façon unique sous la forme :

Théorème général (preuve admise)

Théorème

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F tel que Q admet la décomposition en facteurs irréductibles suivante :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{r} P_k(X)^{\alpha_k}.$$

Alors, la fraction F s'écrit de façon unique sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{Q_{k,j}(X)}{P_k(X)^j} \right),$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ et pour tout $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$, on a $Q_{k,j} \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(Q_{k,j}) < \deg(P_k)$.

Remarques

Remarque

E est la partie entière de F. Il s'agit aussi du quotient de la division euclidienne de P par Q.
$F - E$ est la partie fractionnaire de F.

Remarques

Remarque

E est la partie entière de F. Il s'agit aussi du quotient de la division euclidienne de P par Q.
$F - E$ est la partie fractionnaire de F.

Définition

Les fractions rationnelles $\frac{Q_{k,j}}{P_k^j}$ et E sont les éléments simples de la décomposition en éléments simples.

Remarques

Remarque

E est la partie entière de F. Il s'agit aussi du quotient de la division euclidienne de P par Q.
$F - E$ est la partie fractionnaire de F.

Définition

Les fractions rationnelles $\frac{Q_{k,j}}{P_k^j}$ et E sont les éléments simples de la décomposition en éléments simples.

Remarque

De manière générale, les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ sont donc les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q^\alpha}$ où Q est irréductible et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$

Rappel

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $X - z_0$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$

Rappel

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $X - z_0$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$.

Théorème

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z_1, \cdots, z_r$ les pôles de F d'ordres respectifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. F s'écrit alors de manière unique

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - z_k)^j} \right) ,$$

où E est la partie entière de F et $A_{k,j} \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ et $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$

Rappel

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $X - z_0$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$.

Théorème

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z_1, \cdots, z_r$ les pôles de F d'ordres respectifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. F s'écrit alors de manière unique

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - z_k)^j} \right),$$

où E est la partie entière de F et $A_{k,j} \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ et $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$.

Remarque

Nous n'aurons JAMAIS à décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$

Théorème

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et $x_1, \cdots, x_r$ les pôles réels de F d'ordres respectifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Soient $z_1, \overline{z_1}, \cdots, z_s, \overline{z_s}$ les pôles *complexes* de F d'ordres respectifs $\beta_1, \cdots, \beta_s$. F s'écrit alors de manière unique

$$\begin{aligned} F(X) =& E(X) + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) \\ &+ \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right), \end{aligned}$$

où E est la partie entière de F, $A_{k,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![1; r]\!]$ et $j \in [\![1; \alpha_k]\!]$, $B_{l,j}, C_{l,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $l \in [\![1; s]\!]$ et $j \in [\![1; \beta_l]\!]$.

Plan

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$.

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

1. On calcule le degré de F : $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

1. On calcule le degré de F : $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.
2. Si $\deg(F) < 0$, on passe à l'étape quatre. Si $\deg(F) \geq 0$, on détermine la partie entière E en effectuant la division euclidienne de P par Q. E est le quotient de cette division.

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

1. On calcule le degré de F : $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.
2. Si $\deg(F) < 0$, on passe à l'étape quatre. Si $\deg(F) \geq 0$, on détermine la partie entière E en effectuant la division euclidienne de P par Q. E est le quotient de cette division.
3. On considère la partie fractionnaire de F : $G := \frac{P}{Q} - E = \frac{\widetilde{P}}{Q}$. Puis, on effectue la décomposition en éléments simples de G.

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

1. On calcule le degré de F : $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.
2. Si $\deg(F) < 0$, on passe à l'étape quatre. Si $\deg(F) \geq 0$, on détermine la partie entière E en effectuant la division euclidienne de P par Q. E est le quotient de cette division.
3. On considère la partie fractionnaire de F : $G := \frac{P}{Q} - E = \frac{\widetilde{P}}{Q}$. Puis, on effectue la décomposition en éléments simples de G.
4. On factorise le polynôme Q comme suit : $Q(X) = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{\alpha_k}\right) \times \left(\prod_{l=1}^{s} (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^{\beta_l}\right)$.

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

1. On calcule le degré de F : $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.
2. Si $\deg(F) < 0$, on passe à l'étape quatre. Si $\deg(F) \geq 0$, on détermine la partie entière E en effectuant la division euclidienne de P par Q. E est le quotient de cette division.
3. On considère la partie fractionnaire de F : $G := \frac{P}{Q} - E = \frac{\widetilde{P}}{Q}$. Puis, on effectue la décomposition en éléments simples de G.
4. On factorise le polynôme Q comme suit : $Q(X) = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{\alpha_k}\right) \times \left(\prod_{l=1}^{s} (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^{\beta_l}\right)$.
5. On écrit la forme de la décomposition en éléments simples :

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right).$$

Procédure générale

Soit une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$. On suppose que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

1. On calcule le degré de F : $\deg(F) := \deg(P) - \deg(Q)$.
2. Si $\deg(F) < 0$, on passe à l'étape quatre. Si $\deg(F) \geq 0$, on détermine la partie entière E en effectuant la division euclidienne de P par Q. E est le quotient de cette division.
3. On considère la partie fractionnaire de F : $G := \frac{P}{Q} - E = \frac{\widetilde{P}}{Q}$. Puis, on effectue la décomposition en éléments simples de G.
4. On factorise le polynôme Q comme suit : $Q(X) = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{\alpha_k}\right) \times \left(\prod_{l=1}^{s} (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^{\beta_l}\right)$.
5. On écrit la forme de la décomposition en éléments simples :

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{(X - x_k)^j} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\beta_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)X + |z_l|^2)^j} \right) .$$

6. On détermine ensuite les coefficients $A_{k,j}$, $B_{l,j}$ et $C_{l,j}$.

Identification en un exemple - 1

Voici un exemple :

$$G(X) = \frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} .$$

On part de

$$\frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{\left(X^2+1\right)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4} .$$

On détermine maintenant les huit coefficients en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned}
& X^3+4 \\
=& A(X+1)\left(X^2+1\right)^2(X^2+4) + BX\left(X^2+1\right)^2(X^2+4) \\
& + (CX+D)X(X+1)(X^2+1)(X^2+4) \\
& + (EX+F)X(X+1)(X^2+4) + (GX+H)X(X+1)\left(X^2+1\right)^2 .
\end{aligned}$$

Identification en un exemple - 2

Après plusieurs heures et en m'étant trompé six ou sept fois entre temps... J'ai fini par trouver un système de huit équations linéaires à huit inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ll} 4A & = 4 \\ 4A + 4B + 4D + 4F + H & = 0 \\ 9A + 4C + 4D + 4E + 4F + G + H & = 0 \\ 9A + 9B + 4C + 5D + 4E + F + G + 2H & = 1 \\ 6A + 5C + 5D + E + F + 2G + 2H & = 0 \\ 6A + 6B + 5C + D + E + 2G + H & = 0 \\ A + C + D + G + H & = 0 \\ A + B + C + G & = 0 \end{array}\right. .$$

Identification en un exemple - 3

On résout le système (en une heure environ) :

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{3}{20} \\ C = -\frac{11}{12} \\ D = \frac{1}{36} \\ E = -\frac{1}{2} \\ F = -\frac{5}{6} \\ G = \frac{1}{15} \\ H = -\frac{8}{45}\,. \end{cases} .$$

Cet exemple, que l'on reverra par la suite, illustre bien la difficulté de la mise en place de cette méthode.

Pôles simples réels - 1

On suppose que $Q(X) = (X - x_1)\widetilde{Q}(X)$ où x_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que x_1 est racine simple de Q. On a alors :

$$G(X) = \frac{A}{X - x_1} + \mathrm{Truc}(X)\,.$$

Puis, en multipliant par $X - x_1$, il vient

Pôles simples réels - 1

On suppose que $Q(X) = (X - x_1)\widetilde{Q}(X)$ où x_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que x_1 est racine simple de Q. On a alors :

$$G(X) = \frac{A}{X - x_1} + \mathrm{Truc}(X)\,.$$

Puis, en multipliant par $X - x_1$, il vient

$$\frac{\widetilde{P}(X)}{\widetilde{Q}(X)} = A + (X - x_1)\,\mathrm{Truc}(X)\,.$$

Pôles simples réels - 2

Comme x_1 n'est pas un pôle de la fraction rationnelle $\mathrm{Truc}(X)$, on en déduit que prendre $X := x_1$ annule les termes autres que A. Par conséquent, il vient :

$$A = \frac{\widetilde{P}(x_1)}{\widetilde{Q}(x_1)} .$$

Pôles simples réels - 3

Reprenons l'exemple précédent :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}$$
$$= \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}.$$

On multiplie par X et l'on obtient

$$\frac{X^3+4}{(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}$$
$$= A + X\left(\frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}\right).$$

On fait ensuite tendre X vers 0 et l'on trouve $\frac{4}{4} = A$ d'où $A = 1$.
De même, $B = \frac{(-1)+4}{-1\times 4\times 5} = -\frac{3}{20}$.

Pôles simples complexes - 1

On procède maintenant comme dans le cas réel. On suppose que $Q(X) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2)\,\widetilde{Q}(X)$ où z_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que z_1 et $\overline{z_1}$ sont des racines simples de Q.
On a alors :

$$G(X) = \frac{BX + C}{X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2} + \mathrm{Machin}(X)\,.$$

Puis, en multipliant par $X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2$, il vient

Pôles simples complexes - 1

On procède maintenant comme dans le cas réel. On suppose que $Q(X) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2)\,\widetilde{Q}(X)$ où z_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que z_1 et $\overline{z_1}$ sont des racines simples de Q.
On a alors :

$$G(X) = \frac{BX + C}{X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2} + \mathrm{Machin}(X)\,.$$

Puis, en multipliant par $X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2$, il vient

$$\frac{\widetilde{P}(X)}{\widetilde{Q}(X)} = BX + C + \left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2\right)\mathrm{Machin}(X)\,.$$

Pôles simples complexes - 1

On procède maintenant comme dans le cas réel. On suppose que $Q(X) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2)\,\widetilde{Q}(X)$ où z_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$. Il s'ensuit que z_1 et $\overline{z_1}$ sont des racines simples de Q.
On a alors :

$$G(X) = \frac{BX + C}{X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2} + \mathrm{Machin}(X)\,.$$

Puis, en multipliant par $X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2$, il vient

$$\frac{\widetilde{P}(X)}{\widetilde{Q}(X)} = BX + C + \left(X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2\right)\mathrm{Machin}(X)\,.$$

Comme z_1 n'est pas un pôle de la fraction rationnelle $\mathrm{Machin}(X)$, on en déduit que prendre $X := z_1$ annule les termes autres que $BX + C$.

Pôles simples complexes - 2

Par conséquent, il vient :

$$Bz_1 + C = \frac{\widetilde{P}(z_1)}{\widetilde{Q}(z_1)} .$$

Puis, comme $z_1 \notin \mathbb{R}$, on peut identifier pour trouver B et C.

Pôles simples complexes - 3

Reprenons l'exemple :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}.$$

On multiplie par X^2+4 puis l'on fait tendre X vers $2\mathrm{i}$ et l'on trouve $\frac{-8\mathrm{i}+4}{2\mathrm{i}(2\mathrm{i}+1)\times 9} = 2\mathrm{i}G + H$ d'où $G = \frac{1}{15}$ et $H = -\frac{8}{45}$.
Il reste maintenant à déterminer C, D, E et F.

Pôles multiples - 1

Dans le cas des pôles multiples, on multiplie par $(X - x_1)^{\alpha_1}$ puis l'on fait tendre X vers x_1. On obtient alors

$$A_{1,\alpha_1} = \frac{\widetilde{P}(x_1)}{\widetilde{Q}(x_1)},$$

où l'on a $Q(X) = (X - x_1)^{\alpha_1}\widetilde{Q}(X)$ et où x_1 n'est pas une racine de $\widetilde{Q}$.

On peut procéder de même avec les pôles complexes.

Pôles multiples - 2

Reprenons l'exemple :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}\,.$$

On multiplie par $(X^2+1)^2$ et l'on obtient

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+4)} = (X^2+1)^2\mathrm{Bidule}(X)+(X^2+1)(CX+D)+EX+F\,.$$

On fait ensuite tendre X vers i et l'on trouve $\frac{-\mathrm{i}+4}{\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)\times 3} = E\mathrm{i}+F$
d'où $E = -\frac{1}{2}$ et $F = -\frac{5}{6}$.
Il reste maintenant à déterminer C et D.

Réitération du processus

On retranche alors $\frac{A_{1,\alpha_1}}{(X-x_1)^{\alpha_1}}$ et l'on recommence avec $(X-x_1)^{\alpha_1-1}$. Et ainsi de suite. On va procéder autrement pour notre exemple.

Utilisation de l'infini - 1

Une technique utile (dans le cas où le degré est strictement négatif, ce qui est le cas ici dans la mesure où l'on a uniquement la partie fractionnaire) est de multiplier par X puis de faire tendre X vers l'infini.
On peut aussi être amené à multiplier par X^2 ou X^3...

Utilisation de l'infini - 2

Reprenons l'exemple :

$$\frac{X^3+4}{X(X+1)(X^2+1)^2(X^2+4)}$$
$$= \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} + \frac{GX+H}{X^2+4}\,.$$

On multiplie par X et l'on fait tendre X vers l'infini d'où

$$0 = A+B+C+G\,.$$

Conséquemment, $C = -A-B-G = -1+\frac{3}{20}-\frac{1}{15} = -\frac{11}{12}$.
Il reste maintenant à déterminer D.

Prendre des valeurs particulières de X

On peut prendre $X = x_0$ où x_0 n'est pas un pôle de la fraction rationnelle. Puis, on obtient une équation linéaire qui lie les coefficients entre eux.
Dans notre exemple, on prend $X = 1$ et il vient

$$\frac{5}{1 \times 2 \times 4 \times 5} = A + \frac{B}{2} + \frac{C+D}{2} + \frac{E+F}{4} + \frac{G+H}{5}.$$

On en déduit $D = \frac{1}{4} - 2A - B - C - \frac{E+F}{2} - 2\frac{G+H}{5} = \frac{1}{36}$.