Rudiments de mathématiques en

Signaux et Systèmes Discrets

Julian Tugaut

FISE1

Version du 9 janvier 2024

Table des matières

1 Introduction

L'idée de ce fascicule est de fournir une synthèse des rudiments mathématiques du cours "Signaux et Systèmes Discrets" à partir du cours fourni par Monsieur Alata.

Ainsi, celui-ci ne saurait se substituer au cours, aux CMs ou au polycopié. Il s'agit avant tout d'une ressource supplémentaire. De même, les aspects physiques ne sont pas l'objet de ce pdf. Il convient donc de se reporter au polycopié ou de demander au responsable de cours quant au point de vue pratique.

Le cours de "Traitement des Signaux Déterministes", le cours de "Bases Indispensables des Mathématiques" (trigonométrie, nombres complexes, intégration et algèbre linéaire ainsi que séries numériques) font partie des pré-requis indispensables à ce cours.

Ici, le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est noté j.

2 Transformée de Fourier

La Transformée de Fourier correspond à une décomposition spectrale. En dimension finie, il s'agit de trouver les coefficients dans une base orthonormale.

2.1 Cas analogique

Il s'agit ici de rappels de cours. On considère l'ensemble des signaux de la variable réelle, à valeurs dans les complexes et dont l'énergie est finie.

Définition 2.1. *Soit x un signal de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Son énergie est :*

$$||x||^2 := \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t\,.$$

Remarque 2.2. *Le produit hermitien associé est :*

$$\langle x; y\rangle := \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)^* \mathrm{d}t\,,$$

où z^* est le complexe conjugué de z pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 2.3. *On dit que x est un signal d'énergie finie si $||x||^2 < +\infty$.*

Une "base orthogonale" associée à ce produit hermitien est $\{\psi_f\,;\, f \in \mathbb{R}\}$ où $\psi_f(t) := e^{2j\pi ft}$.

En effet, il convient de comprendre que ces fonctions ne sont pas à énergie finie. En revanche, le produit scalaire hermitien entre ψ_f et $\psi_{f'}$ est bien nul si $f \neq f'$, au sens des distributions.

C'est cette "base" qui nous servira pour définir la Transformée de Fourier.

Définition 2.4. *Soit x un signal d'énergie finie (et tel que $\int_{\mathbb{R}} |x(t)|dt < \infty$). Alors, pour tout $f \in \mathbb{R}$, la Transformée de Fourier de x en f est*

$$\hat{X}(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_f(t)^* \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi ft} \mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

Remarque 2.5. *Il convient de supposer que x est dans L^1 pour que l'intégrale ait du sens. Néanmoins, il suffit que la fonction soit à croissance lente pour que l'on puisse définir sa Transformée de Fourier au sens des distributions. Par conséquent, si le signal x est d'énergie finie, la Transformée de Fourier existe au sens des distributions.*

Par ailleurs, nous ne ferons plus la distinction dorénavant et la Transformée de Fourier sera toujours *notée avec une intégrale, quand bien même elle ne converge pas au sens usuel.*

Définition 2.6. *On note $|\hat{X}(f)|$ le module de $\hat{X}(f)$. On note $\varphi_{\hat{X}}(f)$ sa phase. En d'autres termes :*

$$\hat{X}(f) = |\hat{X}(f)| e^{j\varphi_{\hat{X}}(f)} .$$

Il convient de noter que la phase est **toujours** dans $[-\pi; \pi]$.

À partir de la Transformée de Fourier de x, on peut reconstituer le signal en utilisant la Transformée de Fourier inverse.

Théorème 2.7. *Soit x un signal à croissance lente. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f)\psi_f(t)\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f)e^{2j\pi ft}\mathrm{d}f .$$

On dit par ailleurs que x est la Transformée de Fourier inverse de X.

Ainsi, la connaissance du spectre d'amplitude (le graphe de $f \mapsto |\hat{X}(f)|$) et du spectre de phases (le graphe de $f \mapsto \varphi_{\hat{X}}(f)$) suffit pour reconstruire le signal x.

Regardons maintenant le cas particulier des signaux périodiques. Nous n'entrerons pas dans les détails mais ces signaux peuvent être décomposés en série de Fourier plutôt qu'avec une intégrale. La raison en est que lorsque l'on regarde un signal périodique de période T, l'espace sous-jacent n'est plus $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mais $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ et l'ensemble des "caractères" (notion que l'on ne présentera même pas mais qui donne son nom à la fonction caractéristique en probabilités) est dénombrable. Au contraire, avec un signal non périodique, l'ensemble des caractères est non dénombrable.

Exemple 2.8. *Soit $f_1 \in \mathbb{R}$. On pose $x(t) := \cos(2\pi f_1 t)$. Par la formule d'Euler, on a $x(t) = \frac{1}{2}e^{2j\pi f_1 t} + \frac{1}{2}e^{-2j\pi f_1 t}$. Il s'ensuit $\hat{X}(f) = \frac{1}{2}\delta_{f_1}(f) + \frac{1}{2}\delta_{-f_1}(f)$. En effet, au sens des distributions, $\int_{\mathbb{R}} \hat{X}(f)e^{2j\pi ft}\mathrm{d}f = x(t)$.*

2.2 Cas échantillonné

Dans le monde réel, on ne peut pas stocker une information continue. On ne peut pas non plus la prélever sur un ensemble non dénombrable.

Par conséquent, on regarde seulement le signal x à des temps discrets.

Ainsi, à l'étude de la fonction

$$\{x(t)\,;\, t \in \mathbb{R}\},$$

on lui substitue l'étude de la suite

$$\{x(nT_e)\,;\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

En d'autres termes, on évalue la fonction x avec une période de T_e, c'est-à-dire une fréquence de $f_e := \frac{1}{T_e}$. Cela signifie que l'on étudie

$$x\text{Ш}_{T_e} = x \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{nT_e} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT_e)\delta_{nT_e} \,.$$

Ici, la "base" de la Transformée de Fourier est $\{\psi_f \,;\, f \in \mathbb{R}\}$ où la suite ψ_f est définie comme étant $\psi_f := \{e^{2j\pi f nT_e} \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. Par ailleurs, on a vu en TSD que la Transformée de Fourier de Ш_T est $\frac{1}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}} = f \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{nf}$ où $f = \frac{1}{T}$.

Définition 2.9. *On définit la TFTD d'une suite x à support dans $\mathbb{Z}$ et échantillonnée avec une période T_e comme étant*

$$\hat{X}(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\psi_f(nT_e)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2j\pi n f T_e} \,.$$

Remarque 2.10. *On a gardé la même notation $\hat{X}(f)$ pour désigner la TFTD et la TF. Si on manipule les deux, on notera $\hat{X}_e$ pour désigner la TFTD.*

Et on peut reconstruire le signal discret comme suit.

Théorème 2.11. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec $x[n] := x(nT_e)$, on a*

$$x[n] = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \hat{X}(f)\psi_f(nT_e)\mathrm{d}f = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} \hat{X}(f)e^{2j\pi n f T_e}\mathrm{d}f \,.$$

Proposition 2.12. *Comme $\hat{X}$ est la Transformée de Fourier du produit de x avec Ш_{T_e}, $\hat{X}$ est aussi le produit de convolution entre la Transformée de Fourier du signal à support réel x et de $f_e\text{Ш}_{f_e}$. Donc $\hat{X}$ est f_e-périodique.*

Remarque 2.13. *Ainsi, $\hat{X}(f+f_e) = \hat{X}(f)$. Par conséquent, la reconstruction du signal discret peut aussi être faite comme suit :*

$$x[n] = \frac{1}{f_e} \int_{f_0}^{f_0+f_e} \hat{X}(f)\psi_f(nT_e)\mathrm{d}f = \frac{1}{f_e} \int_{f_0}^{f_0+f_e} \hat{X}(f)e^{2j\pi n f T_e}\mathrm{d}f \,,$$

pour tout $f_0 \in \mathbb{R}$.

On regarde également la fréquence normalisée ; laquelle rend mieux compte des phénomènes que la fréquence non normalisée.

La fréquence normalisée permet de s'affranchir de la connaissance de la fréquence d'échantillonnage. Dans le domaine temporel, nT_e est normalisé par T_e. Dans le domaine fréquentiel, f est normalisée par f_e.

Définition 2.14. *On pose $\nu := \frac{f}{f_e} = fT_e$. Ainsi, $\psi_\nu := \{e^{2j\pi\nu n} \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$. On a donc $\hat{X}(\nu) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2j\pi\nu n}$.*

Remarque 2.15. *On a gardé la même notation $\hat{X}()$ pour désigner la TFTD en fréquence normalisée. Il est essentiel de ne pas confondre $\hat{X}(\nu)$ et $\hat{X}(f)$!*

Théorème 2.16. *On a :*

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{X}(\nu) e^{2j\pi\nu n} \mathrm{d}\nu \,.$$

Et, comme précédemment, pour tout $\nu_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$x[n] = \int_{\nu_0}^{\nu_0+1} \hat{X}(\nu) e^{2j\pi\nu n} \mathrm{d}\nu \,.$$

2.3 Transformée de Fourier Discrète

La Transformée de Fourier Discrète est utilisée quand on dispose d'un nombre fini d'échantillons. En effet, dans la pratique, on ne dispose absolument pas d'un nombre infini de prélèvements.

Ainsi, on dispose ici d'un signal $x = \{x[n]\,;\, 0 \leq n \leq N-1\}$ où N est un entier strictement positif.

L'espace vectoriel sous-jacent est donc de dimension N et l'on dispose d'une base orthonormée : $\{\psi_k\,;\, 0 \leq k \leq N-1\}$ où pour tout $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a

$$\psi_k := \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2j\pi\frac{k}{N}} \\ e^{2j\pi\frac{k}{N}2} \\ \vdots \\ e^{2j\pi\frac{k}{N}n} \\ \vdots \\ e^{2j\pi\frac{k}{N}(N-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2j\pi\nu_k} \\ e^{2j\pi\nu_k 2} \\ \vdots \\ e^{2j\pi\nu_k n} \\ \vdots \\ e^{2j\pi\nu_k(N-1)} \end{bmatrix} ,$$

où $\nu_k := \frac{k}{N}$.

Définition 2.17. *La Transformée de Fourier Discrète, telle qu'elle est réalisée par Matlab, est ainsi définie :*

$$\hat{X}[\nu_k] := \sqrt{N}\,\langle x\,;\,\psi_k\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2j\pi\nu_k n} \,.$$

Il convient de noter qu'ainsi défini, $\hat{X}$ n'est pas le coefficient devant ψ_k. En effet, ce dernier est $\frac{\langle x\,;\,\psi_k\rangle}{\langle \psi_k\,;\,\psi_k\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}\hat{X}(\nu_k)$.

Ainsi, pour reconstruire le signal, on procède comme suit.

Théorème 2.18. *On a l'égalité :*

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(\nu_k) e^{2j\pi\nu_k n} \,.$$

3 Produit de convolution

Le produit de convolution est un outil essentiel puisqu'il permet de relier l'entrée et la sortie d'un système LIT, ce que nous avons déjà vu en TSD et que nous approfondirons par la suite.

3.1 Rappels

Rappelons d'abord la formule du produit de convolution pour deux signaux dans le cas analogique.

Soient deux fonctions de la variable réelle x et y. Alors, leur produit de convolution, que l'on note $x * y$, est la fonction de la variable réelle définie par

$$(x * y)(t) := \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

Lorsque cette fonction est bien définie, on a l'égalité $x * y = y * x$. Il suffit pour s'en convaincre de procéder à un changement de variable.

On sait également que ce produit de convolution est distributif par rapport à l'addition : $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$. Il est aussi associatif, à condition qu'il soit bien défini.

3.2 Cas à temps discret

On s'intéresse maintenant au cas discret (aussi appelé parfois numérique).

Soient deux signaux x et y à support dans $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire deux suites). Alors, leur produit de convolution, que l'on note $x * y$, est la fonction à support dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$(x * y)[n] := \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} x[n-m]y[m]\,.$$

Comme dans le cas analogique, lorsque cette fonction est bien définie, on a l'égalité $x*y = y * x$. Il suffit pour s'en convaincre de procéder à un changement de variable.

On sait également que ce produit de convolution est distributif par rapport à l'addition : $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$. Il est aussi associatif, à condition qu'il soit bien défini.

3.3 Cas discret fini

Comme mentionné dans la section précédente, dans la pratique, nous ne disposons que d'un nombre fini d'échantillons.

De fait, on va ici se restreindre au cas où l'on a des signaux partiellement observés, à N valeurs.

Soient ainsi deux signaux $x = \{x[n]\,;\, 0 \leq n \leq N-1\}$ et $y = \{y[n]\,;\, 0 \leq n \leq N-1\}$.

Si l'on suivait la définition du produit de convolution numérique, on aurait

$$(x * y)[n] := \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} x[n-m]y[m]\,.$$

Toutefois, on ne connait pas les valeurs de $y[m]$ pour $m \notin [\![0; N-1]\!]$ ni même celles de $x[n-m]$ pour $m \notin [\![n-N+1; n]\!]$.

Il y a donc deux possibilités principales pour définir malgré tout le produit de convolution.

1. On peut considérer les signaux nuls en dehors des valeurs observées. En d'autres termes, on pose $(x * y)[n] := \sum_{m=0}^{m=N-1} x[n-m]y[m]$ avec la convention $x[n-m] := 0$ si $n-m \notin [\![0; N-1]\!]$, c'est-à-dire si $m \notin [\![n-N+1; n]\!]$. L'avantage de cette option est sa simplicité. L'inconvénient est que l'on perd de bonnes propriétés sur la Transformée de Fourier.
2. On peut considérer les signaux comme étant cycliques. En d'autres termes, on suppose que $x[n+N] = x[n]$ et que $y[n'+N] = y[n']$ pour tous les entiers relatifs n et n'. Par exemple, si $N = 14$ et si $n = 148$, alors on a $x[148] := x[8]$ car $148 = 8 + 10 \times 14$. Ainsi, les indices sont à prendre modulo N. Ce produit de convolution se note $x \otimes y$. Et, on peut démontrer facilement que la Transformée de Fourier Discrète, telle qu'on l'a définie, de $x \otimes y$ est le produit des deux Transformées de Fourier. Réciproquement, la Transformée de Fourier inverse du produit de convolution cyclique est N fois le produit des deux Transformées de Fourier inverse. Dit autrement, la Transformée de Fourier du produit simple est $\frac{1}{N}(\hat{X} \otimes \hat{Y})[\nu_k]$ où l'on rappelle $\nu_k := \frac{k}{N}$. La raison de ce $\frac{1}{N}$ est que la TFD telle qu'on l'a définie n'est pas renormalisée.

Le choix entre le produit de convolution cyclique ou non dépend de l'usage que l'on en fait. La convention que l'on utilise sera précisée à chaque fois.

4 Échantillonnage

Nous avons déjà procédé à l'échantillonnage quand on a prélevé un nombre fini (ou même infini dénombrable) de valeurs dans notre signal analogique. Il s'agit ni plus ni moins que d'une discrétisation en temps.

On note T_e la période d'échantillonnage en secondes et $f_e := \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage en Hertz. Cette dernière donne le nombre d'échantillons par seconde.

Remarque 4.1. *Plus f_e sera grande c'est-à-dire plus T_e sera petite, plus notre étude sera bonne. Il peut donc sembler bizarre de ne pas prendre systématiquement f_e très grande.*

Toutefois, on dispose d'un problème de stockage dans la mémoire de l'ordinateur. De fait, il est impossible de prendre f_e trop grande.

Par conséquent, il faut bien choisir T_e et f_e, suivant l'usage que l'on en fait. Il convient de noter que si f_e est trop petite (c'est-à-dire si T_e est trop grande), alors on risque de se retrouver avec un effet d'aliasing (aussi appelé repliement de spectre). Dans ce cas de figure, les ondes de haute fréquence viennent perturber les basses fréquences, de par la périodicité de la Transformée de Fourier du signal.

En effet, par définition, l'échantillonnage signifie que l'on n'étudie plus $x := \{x(t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ mais $x\text{Ш}_{T_e}$. Par conséquent, la Transformée de Fourier que l'on obtient est le produit de convolution entre celle de x et celle d'une distribution périodique de période f_e. Il s'ensuit que le spectre dont on dispose est lui-même f_e-périodique.

Théorème 4.2 (Théorème de Shannon)**.** *Pour que la répétition périodique du spectre du signal échantillonné ne déforme pas le spectre, il est nécessaire et suffisant que l'on ait* $f_e \geq 2|f_{max}|$ *où* $|f_{max}|$ *est la fréquence maximale du signal initial.*

Définition 4.3. *Le seuil* $\frac{f_e}{2}$ *est appelé fréquence de Shannon, ou fréquence de Nyquist ou même fréquence de repliement.*

Si f_{max} est strictement plus grande que la fréquence de repliement, alors il y a repliement de spectre.

Remarque 4.4. *Dans les cas pratiques, on cherche surtout à s'assurer que les fréquences supérieures à la fréquence de repliement ne soient pas associées à une trop forte amplitude.*

5 Introduction aux Systèmes

Pour faire très simple, un système est comme une boîte noire qui transforme une entrée et donne une sortie en réponse. Ces systèmes obéissent à des lois physiques et sont modélisés mathématiquement.

De manière générale, l'entrée est notée e et correspond à une fonction de la variable réelle ou de la variable entière. La sortie est notée y. Et le système lui-même est noté T. De fait, $y = T(e)$ ou en faisant apparaître les variables : $y(t) = T(e)(t)$ ou $y[n] = T(e)[n]$.

5.1 Propriétés de certains systèmes

L'étude générale d'un système général n'est pas aisée. On est ainsi amené à émettre des hypothèses sur nos systèmes.

5.1.1 Linéarité

La première à laquelle on pense est la linéarité :

Définition 5.1. *Le système* T *est linéaire si pour toutes les entrées* e_1 *et* e_2 *et pour toutes les constantes* α *et* β*, on a*

$$T(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2)\,.$$

On parle parfois de principe de superposition.

Autant que faire se peut, on se ramène à des systèmes linéaires.

Cela signifie que l'on a une équation différentielle (ou aux différences finies) linéaire sous-jacente.

5.1.2 Invariance dans le Temps

On reprend une notation du cours de TSD.

Définition 5.2. *Soit un signal* x *et soit une constante de temps* t_0*. Le signal translaté de* x *de temps* t_0 *est* $\tau_{t_0}x$*. On le définit par* $(\tau_{t_0}x)(t) := x(t - t_0)$ *ou* $\tau_{t_0}x[n] := x[n - t_0]$*.*

Définition 5.3. *Le système T est invariant dans le temps si pour toute entrée e et pour toute constante de temps t_0, on a*

$$T(\tau_{t_0} e) = \tau_{t_0} T(e)\,.$$

En d'autres termes, la sortie d'une translatée est la translatée de la sortie.

Cela signifie que les paramètres de l'équation différentielle (ou aux différences finies) associée ne dépendent pas du temps (et donc sont invariants dans le temps).

5.1.3 Causalité

Définition 5.4. *Un système est causal si la sortie $y = T(e)$ au temps t_0 ne dépend que de $\{e(t)\,;\, t \leq t_0\}$.*

Cela signifie aussi que rien ne se passe en sortie tant que rien ne se passe en entrée.

Dans le cas d'un système LIT (Linéaire et Invariant dans le Temps), cela implique que la réponse impulsionnelle est causale, au sens des signaux.

Remarque 5.5. *Il est essentiel de différencier la notion de causalité pour les systèmes de la notion de causalité pour les signaux.*

5.2 Réponses

On distingue deux types de réponses :

1. Réponse forcée : celle-ci s'obtient suite à une excitation en entrée en supposant les conditions initiales nulles.
2. Réponse libre : elle correspond à l'évolution du système laissé à lui-même, sans entrée.

Deux réponses forcées jouent un rôle particulier en traitement du signal.

Définition 5.6. *La réponse impulsionnelle est la réponse (la sortie) lorsque les conditions initiales sont nulles et que l'on met δ_0 en entrée.*

Définition 5.7. *La réponse indicielle est la réponse (la sortie) lorsque les conditions initiales sont nulles et que l'on met un échelon unité (la fonction de Heaviside) en entrée.*

Remarque 5.8. *Dans ce cours, la fonction de Heaviside est notée u et non pas H. En effet, H va correspondre à la fonction de transfert.*

5.3 Statique ou dynamique

Définition 5.9. *Un système statique est un système qui réagit instantanément à l'entrée. En d'autres termes, il existe une fonction f telle que $s(t) = f(e(t))$ ou $s[n] = f(e[n])$.*

Définition 5.10. *Un système qui n'est pas statique est appelé dynamique.*

Remarque 5.11. *Les systèmes physiques (à temps continu) statiques n'existent pas.*

6 Système analogique LIT

On rappelle qu'un système analogique est un système à temps continu.

Les systèmes analogiques, dynamiques, causaux et LIT peuvent être décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire de la forme :

$$a_{p_2}\frac{\mathrm{d}^{p_2}}{\mathrm{d}t^{p_2}}y(t)+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+a_0y(t)=b_{p_1}\frac{\mathrm{d}^{p_1}}{\mathrm{d}t^{p_1}}e(t)+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+b_0e(t)\,, \tag{2}$$

où les coefficients $a_0,\cdots,a_{p_2}$ ainsi que $b_0,\cdots,b_{p_1}$ caractérisent l'équation. Le système est dit d'ordre (p_1,p_2). L'entier p_1 caractérise l'ordre de dérivation de l'entrée et l'entier p_2 celui de la sortie. Ici, on note la sortie y.

6.1 Transformée de Laplace

La Transformée de Laplace permet d'exprimer l'équation ci-dessus dans le domaine fréquentiel.

Définition 6.1. *La formulation générale (aussi appelée bilatérale) est la suivante :*

$$X(s):=\int_{t=-\infty}^{t=+\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t\,,$$

où $s=\sigma+2j\pi f$ est un complexe tel que l'intégrale précédente est bien définie.

Cette formulation est peu utilisée en pratique puisqu'on lui préfère la formulation unilatérale :

$$X(s):=\int_{t=0}^{t=+\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t\,,$$

Remarque 6.2. *Les notations peuvent porter à confusion. C'est pourquoi l'on attache de l'importance à la variable. Ainsi, s est utilisée pour Laplace tandis que f l'est pour Fourier et z pour la Transformée en z.*

Le lien entre les deux formulations est assez simple. La Transformée unilatérale revient à prendre la Transformée bilatérale du signal multiplié par la fonction de Heaviside u.

Il est important d'en être conscient lorsque l'on procède à des dérivations.

Listons ici quelques propriétés de la Transformée de Laplace (bilatérale ou unilatérale) :

Proposition 6.3. *La Transformée de Laplace est linéaire. Ainsi, la Transformée de Laplace de $t\mapsto\alpha x(t)+\beta y(t)$ est $s\mapsto\alpha X(s)+\beta Y(s)$.*

On peut le prouver facilement par la linéarité de l'intégrale.

Définition 6.4. *Pour tout réel non nul a, on pose $d_ax(t):=x(at)$.*

Proposition 6.5. *Pour tout signal x et tout réel non nul a, la Transformée de Laplace de d_ax est $s\mapsto\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$.*

On peut le prouver facilement en procédant à un changement de variable.

On rappelle que $\tau_{t_0}x$ est la translatée de x d'un temps t_0.

Proposition 6.6. *Pour tout signal x et tout réel t_0, la Transformée de Laplace de $\tau_{t_0}x$ est $s \mapsto e^{-st_0}X(s)$.*

Il est très simple de le prouver en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

Théorème 6.7. *Soit x un signal. On note X sa Transformée de Laplace* **bilatérale***. Alors la Transformée de Laplace* **bilatérale** *de $t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ est $s \mapsto sX(s)$.*

Remarque 6.8. *Cette formule ne tient pas compte des conditions initiales car dans la formulation bilatérale, il n'y a pas vraiment de conditions initiales. Pour récupérer la formule déjà vue précédemment, on se rappelle que l'on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)u(t)) = x(0)\delta_0 + x'(t)u(t)\,,$$

où u est l'échelon unité dans ce cours.

Par conséquent, la Transformée de Laplace unilatérale de x' (qui est la Transformée de Laplace bilatérale de ux') est - de par la linéarité - simplement :

$$\mathrm{TL}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)x(t))\right) - x(0)\mathrm{TL}(\delta_0) = s\mathrm{TL}(ux) - x(0)\,.$$

On trouve donc bien $\widetilde{x'}(s) = s\tilde{x}(s) - x(0)$ où $\tilde{x}$ désigne la Transformée de Laplace **unilatérale***.*

Remarque 6.9 (Lien entre la Transformée de Laplace et celle de Fourier)**.** *On peut obtenir la Transformée de Fourier en faisant tendre σ vers 0 c'est-à-dire s vers $2j\pi f$. Dit autrement, $X(2j\pi f) = \hat{X}(f)$.*

6.2 Fonction de Transfert

Avec la Transformée de Laplace bilatérale, l'équation différentielle (2) devient, dans le domaine fréquentiel :

$$\left(\sum_{k=0}^{p_2} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{p_1} b_k s^k\right) E(s)\,. \tag{3}$$

Ainsi, la fonction $s \mapsto \frac{Y(s)}{E(s)}$ ne dépend pas de l'entrée et il s'agit de

$$s \mapsto H(s) := \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{p_1} s^{p_1}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{p_2} s^{p_2}}\,.$$

Définition 6.10. *La fonction H est appelée la fonction de transfert du système.*

Théorème 6.11. *La fonction H est la Transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle h.*

Corollaire 6.12. *Pour toute entrée e, on a $y(t) = (h*e)(t)$, où h est la réponse impulsionnelle.*

7 Systèmes discrets LIT

Un système discret est aussi appelé numérique.

Les systèmes numériques, dynamiques et LIT peuvent être décrits par une équation aux différences finies qui est linéaire et à coefficients constants, c'est-à-dire de la forme :

$$y[n] + \sum_{m \in \mathcal{D}_1} a_m y[n-m] = \sum_{m \in \mathcal{D}_2} b_m e[n-m] \, , \tag{4}$$

où les coefficients a_m pour $m \in \mathcal{D}_1$ ainsi que b_m pour $m \in \mathcal{D}_2$ caractérisent l'équation. Ici, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{Z}^*$ et $\mathbb{Z}$ respectivement.

Dans le cas typique causal, $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{N}^*$ (et est fini) et $\mathcal{D}_2 \subset \mathbb{N}$ (et est fini).

Notons que dans la pratique, on peut être amené à manipuler des systèmes non-causaux et anti-causaux.

7.1 Transformée en z

La Transformée en z est l'équivalent discret de la Transformée de Laplace. Elle permet d'exprimer l'équation ci-dessus dans le domaine fréquentiel.

Définition 7.1. *La formulation générale (bilatérale) est celle d'une série de Laurent :*

$$X(z) := \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} x[m] z^{-m} \, ,$$

où $z := e^{sT_e}$ est un complexe tel que la somme précédente est bien définie. Ici, s est appelée la fréquence complexe, $f_e := \frac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage et $\nu := \frac{f}{f_e}$ est la fréquence normalisée. Comme dans le cas analogique, on a d'ailleurs $s = \sigma + 2j\pi f$.

Remarque 7.2. *À nouveau, on utilise la notation X pour désigner un troisième objet différent. Il faut donc faire très attention ! Si on utilise également la transformée de Laplace, la Transformée en z de x sera notée $Tz\{x\}(z)$.*

Remarque 7.3 (Équivalence Analogique-Numérique)**.** *On passe de l'analogique au numérique en posant $z := e^{sT_e}$. Réciproquement, on prend $s := \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.*

Remarque 7.4 (Lien entre la Transformée en z et la TFTD)**.** *Il suffit de prendre $z := e^{2j\pi\nu}$ et l'on retrouve $\hat{X}(\nu) = X(e^{2j\pi\nu}) = Tz\{x\}(e^{2j\pi\nu}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-2j\pi\nu m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2j\pi\nu n}$.*

Donnons une propriété essentielle de la Transformée en z.

Définition 7.5. *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour tout signal x à support dans $\mathbb{Z}$, on introduit la suite $\tau_m x$ définie par $(\tau_m x)[n] := x[n-m]$.*

Il s'agit d'un décalage temporel de longueur m.

Proposition 7.6. *Pour tout signal x et tout entier m, $Tz\{\tau_m x\}(z) = z^{-m} Tz\{x\}(z)$.*

7.2 Fonction de transfert

On peut à nouveau considérer une fonction de transfert. En effet, l'équation (4) devient dans le domaine en z (fréquentiel) :

$$H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{p_1} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{p_2} a_m z^{-m}} .$$

Définition 7.7. *La fonction H ainsi définie est appelée la fonction de transfert.*

Remarque 7.8. *Dans un cas plus général (systèmes anti-causaux ou non causaux), la fonction de transfert H peut faire intervenir des entiers négatifs.*

Théorème 7.9. *La fonction H est la Transformée en z de la réponse impulsionnelle h.*

Corollaire 7.10. *Pour toute entrée e, on a $s[n] = (h * e)[n] = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h[n-m]e[m]$, où h est la réponse impulsionnelle,*

8 Stabilité au sens EBSB

Définition 8.1. *EBSB signifie "Entrée Bornée-Sortie Bornée". On dit qu'un système est stable au sens EBSB si toute entrée bornée engendre une sortie bornée.*

8.1 Cas analogique

Proposition 8.2. *Dans le cas analogique, cela équivaut à $h \in \mathrm{L}^1$ c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$ où h est la réponse impulsionnelle du système.*

Théorème 8.3. *En passant en fréquentiel (Transformée de Laplace), pour un système causal, cela signifie aussi que les pôles de la fonction de transfert sont tous de partie réelle strictement négative.*

Les démonstrations sont dans le document "Cours FISE1 SSD 2023 24.pdf".

8.2 Cas numérique

Proposition 8.4. *Dans le cas numérique, cela équivaut à $h \in l^1$ ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h[n]| < \infty$) où h est la réponse impulsionnelle du système.*

Théorème 8.5. *En passant en fréquentiel (Transformée en z),* **pour un système causal**, *cela signifie aussi que les pôles de la fonction de transfert ont un module strictement inférieur à 1.*

Remarque 8.6. *On rappelle que l'on pose $z := e^{sT_e}$. Ainsi, en se souvenant des propriétés des exponentielles complexes, si z est un pôle de module strictement inférieur à 1, on trouve bien que s est de partie réelle strictement négative. Par conséquent, bien que les deux propriétés (dans le cas analogique et dans le cas numérique) semblent fondamentalement différentes au premier abord, elles sont les deux faces d'une même pièce.*

9 Systèmes RIF ou RII

Définition 9.1. *On dit d'un système LIT (Linéaire et Invariant dans le Temps) qu'il est RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) si sa réponse impulsionnelle est à support temporel fini. En d'autres termes,* $\#\{n \in \mathbb{Z}\,;\, h[n] \neq 0\} < \infty$.

Ces systèmes sont **toujours** stables au sens EBSB vu que la réponse impulsionnelle est sommable en tant que suite ayant un nombre fini de termes non nuls.

Définition 9.2. *On dit d'un système LIT (Linéaire et Invariant dans le Temps) qu'il est RII (Réponse Impulsionnelle Infinie) si sa réponse impulsionnelle est à support temporel infini. En d'autres termes,* $\#\{n \in \mathbb{Z}\,;\, h[n] \neq 0\} = \infty$.

Remarque 9.3. *Un système LIT est soit RIF soit RII.*

Un système LIT RII n'est pas toujours stable au sens EBSB.

10 Comportement dynamique d'un système LIT

On parle aussi de comportement temporel.

C'est la réponse impulsionnelle qui permet de caractériser le fonctionnement du système LIT. En effet, comme on l'a déjà vu :

$$y = h * e\,,$$

où h est la réponse impulsionnelle, e est l'entrée et y est la sortie.

Remarque 10.1. *Un système LIT est causal si sa réponse impulsionnelle est causale.*

11 Filtrage

Le filtrage consiste *grosso modo* à extraire une information d'un signal et à en oublier d'autres.

11.1 Filtrage temporel

Le filtrage temporel est réalisé directement sur le signal. Cela consiste à multiplier le signal par une fonction γ, dite caractéristique. L'équivalent en fréquentiel est le produit de convolution avec la Transformée de Fourier de γ. On peut par exemple prélever un signal en le multipliant par une fonction porte entre a et b avec $a < b$.

11.2 Filtrage fréquentiel

On s'intéresse surtout au filtrage fréquentiel : on multiplie la Transformée du signal par une fonction de transfert, ce qui revient en fait à faire passer le signal par un système ayant une certaine réponse impulsionnelle. Pour rappel, la sortie est le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle et l'entrée quand le système est LIT.

Notons H la fonction de transfert : $\hat{H}(f)$ ou $\hat{H}(\nu)$ en fréquence normalisée.

Alors, il vient

$$\hat{Y}(f) = \hat{H}(f)\hat{E}(f)\,,$$

où $\hat{E}(f)$ est la Transformée de Fourier (en f) de l'entrée e et $\hat{Y}(f)$ est celle de la sortie y.

D'après les propriétés simples sur les nombres complexes, il s'ensuit :

$$|\hat{Y}(f)| = |\hat{H}(f)| \times |\hat{E}(f)|\,,$$

c'est-à-dire que les modules se multiplient et

$$\varphi_{\hat{Y}}(f) = \varphi_{\hat{H}}(f) + \varphi_{\hat{E}}(f)\,,$$

modulo 2π. En d'autres termes, les phases s'ajoutent. On parle de déphasage ou de distorsion temporelle.

Ici, on a $\hat{H}(f) = |\hat{H}(f)|e^{j\varphi_{\hat{H}}(f)}$ où $|\hat{H}(f)| \geq 0$ et $\varphi_{\hat{H}}(f) \in [-\pi;\pi]$.

Pour représenter le comportement fréquentiel d'un système LIT, on utilise les diagrammes de Bode.

Définition 11.1. *Le gain en décibel est défini comme étant :*

$$G_{dB}(f) := 10\log_{10}\left(|\hat{H}(f)|^2\right) = 10\log_{10}\left(\frac{|\hat{Y}(f)|^2}{|\hat{E}(f)|^2}\right)\,.$$

Ce gain en décibel donne le rapport d'énergie entre la sortie et l'entrée, pour chaque fréquence f.

Remarque 11.2. *Si $G_{dB}(f) < 0$ c'est-à-dire si $|\hat{H}(f)|^2 < 1$, il y a atténuation du signal en f. Au contraire, si $G_{dB}(f) > 0$ c'est-à-dire si $|\hat{H}(f)|^2 > 1$, il y a amplification du signal en f.*

Le diagramme de Bode consiste en la représentation graphique du gain en décibel et du diagramme des phases.

Définition 11.3 (Fréquence de coupure)**.** *Une fréquence de coupure est une fréquence f_c pour laquelle $|\hat{H}(f_c)|^2 = \frac{1}{2}\sup_{f\in\mathbb{R}}|\hat{H}(f)|^2$.*

On rappelle que $10\log_{10}(2) \approx 3$. Conséquemment, on peut caractériser les fréquences de coupures comme étant les fréquences pour lesquelles $G_{dB}(f_c) = \sup_{f\in\mathbb{R}} G_{dB}(f) - 3$.

Remarque 11.4. *Certains filtres ont plusieurs fréquences de coupure.*

11.2.1 Gabarit d'un filtre fréquentiel réel

Pour simplifier, on va ici supposer $\sup_{f\in\mathbb{R}} |\hat{H}(f)|^2 = 1$ c'est-à-dire $\sup_{f\in\mathbb{R}} G_{dB}(f) = 0$.
Donnons un peu de vocabulaire.

Définition 11.5. *Le gain en fréquence est* $G(f) := |\hat{H}(f)|$ *et l'atténuation est* $\alpha(f) := G(f)^{-1}$.

Par définition, le gain en décibel est $G_{dB}(f) = 10\log_{10}(G(f)^2)$. Et, l'atténuation en décibel est $\alpha_{dB}(f) = 10\log_{10}(\alpha(f)^2) = -10\log_{10}(G(f)^2)$.

11.2.2 Filtres RIF à phase linéaire

Les filtres RIF (Réponse Impulsionnelle à support temporel Fini) causaux à phase linéaire sont toujours stables au sens EBSB et le déphasage engendre un simple retard (donc ils ne distordent pas le signal de sortie par rapport à celui d'entrée).

Il convient de noter que tout filtre RIF causal n'est pas nécessairement à phase linéaire. Il faut en effet que la réponse impulsionnelle présente une symétrie.

Il existe quatre types de filtres RIF à phase linéaire.

Pour les distinguer, on utilise $\hat{H}(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-2j\pi\nu n}$, la fonction de transfert normalisée.

— Type 1 : N est impair et de plus $h[n] = h[N-1-n]$.
— Type 2 : N est pair et de plus $h[n] = h[N-1-n]$. Ce filtre ne peut pas servir de passe-haut.
— Type 3 : N est impair et de plus $h[n] = -h[N-1-n]$.
— Type 4 : N est pair et de plus $h[n] = -h[N-1-n]$. Ce filtre ne peut pas servir de passe-bas.