

Signaux et Systèmes discrets - Correction des travaux dirigés 1 - TF, TFTD et échantillonnage

Olivier Alata, Martin Blanchard, Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mél à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Page de garde	1
Table des matières	3
Exercice 1	5
Rappels	5
Correction du 1	5
Représentation graphique de la Transformée de Fourier	5
Remarque	6
Représentation graphique du lieu géométrique	6
Correction du 2	6
Représentation graphique de la Transformée de Fourier	6
Remarque	7
Représentation graphique du lieu géométrique	7
Correction du 3	8
Représentation graphique de la Transformée de Fourier	8
Remarque	9
Correction du 4	9
Représentation graphique du signal	9
Remarque	10
Module de la Transformée de Fourier	10
Remarque 1	12
Exercice 2	13
Rappels	13
Correction du 1	13
Correction du 2 avec $\nu = 0.1$	14
Correction du 2 avec $\nu = 0.6$	16
Exercice 3	19
Correction du 1	19
Remarque	20
Correction du 2	20

Exercice 1

Rappels

La transformée de Fourier de $t \mapsto e^{2j\pi f_1 t}$ est $f \mapsto \delta_{f_1}(f) = \delta(f - f_1)$.

Correction du 1

Représentation graphique de la Transformée de Fourier

On a ici

$$x(t) = j \sin(2\pi f_1 t) = j \frac{e^{2j\pi f_1 t} - e^{-2j\pi f_1 t}}{2j} = \frac{1}{2} e^{2j\pi f_1 t} + \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2j\pi f_1 t}.$$

La linéarité de la transformée de Fourier donne donc directement

$$\widehat{X}(f) = \frac{1}{2} \delta_{f_1}(f) + \left(-\frac{1}{2}\right) \delta_{-f_1}(f).$$

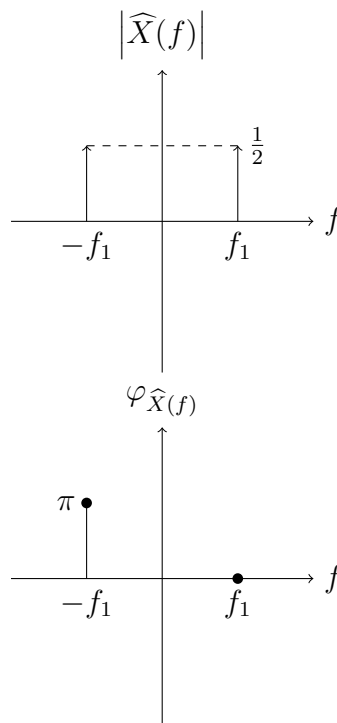
La représentation graphique de la Transformée de Fourier consiste en une représentation graphique du module et une représentation graphique de la phase.

On note que si $f \notin \{f_1; -f_1\}$, alors $\widehat{X}(f) = 0$. Puis, on a $\widehat{X}(f_1) = \frac{1}{2}$ et $\widehat{X}(-f_1) = -\frac{1}{2}$.

Par conséquent, $|\widehat{X}(f_1)| = |\widehat{X}(-f_1)| = \frac{1}{2}$ et $\varphi_{\widehat{X}}(f_1) = 0$ tandis que $\varphi_{\widehat{X}}(-f_1) = \pi$. Ici, $\varphi_{\widehat{X}}(f)$ est la phase de $\widehat{X}(f)$.

On aboutit ainsi à la représentation graphique suivante :

FIGURE 1 – Module et phase de la Transformée de Fourier



Remarque

On constate que le module est pair. Toutefois, la phase n'est pas impaire. Ceci est dû au fait que le signal x n'est pas réel. Par ailleurs, la "vraie" valeur de $|\widehat{X}(f_1)|$ n'est pas $\frac{1}{2}$ mais $+\infty$ puisqu'il y a une impulsion de Dirac en facteur. On procèdera à cet abus de langage dans toute la suite du corrigé de l'exercice.

Représentation graphique du lieu géométrique

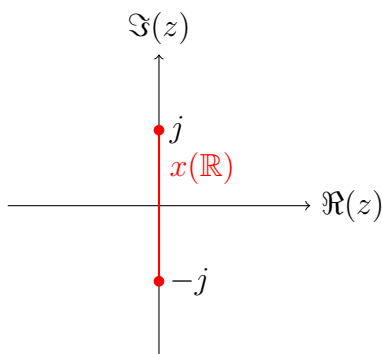
Par définition, le lieu géométrique est

$$x(\mathbb{R}) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\} .$$

Or, la fonction sinus réalise une surjection de \mathbb{R} dans $[-1; 1]$ et même une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$. On en déduit que $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

Ainsi, $x(\mathbb{R})$ est égal à $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0 \text{ et } |\Im(z)| \leq 1\}$ dont voici une représentation graphique :

FIGURE 2 – Lieu géométrique de x



Correction du 2

Représentation graphique de la Transformée de Fourier

On a ici

$$x(t) = -0.5 + 0.24e^{j(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{4})} = -0.5e^{2j\pi 0t} + 0.24e^{j\frac{\pi}{4}}e^{2j\pi f_1 t} .$$

La linéarité de la transformée de Fourier donne donc directement

$$\widehat{X}(f) = -0.5\delta_0(f) + 0.24e^{j\frac{\pi}{4}}\delta_{f_1}(f) .$$

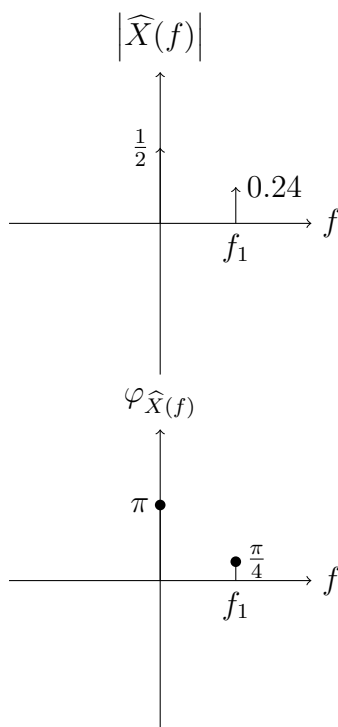
La représentation graphique de la Transformée de Fourier consiste en une représentation graphique du module et une représentation graphique de la phase.

On note que si $f \notin \{0; f_1\}$, alors $\widehat{X}(f) = 0$. Puis, on a $\widehat{X}(0) = -\frac{1}{2}$ et $\widehat{X}(f_1) = 0.24e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Par conséquent, $|\widehat{X}(0)| = \frac{1}{2}$ alors que $|\widehat{X}(f_1)| = 0.24$ et $\varphi_{\widehat{X}}(0) = \pi$ tandis que $\varphi_{\widehat{X}}(f_1) = \frac{\pi}{4}$. Ici, $\varphi_{\widehat{X}}(f)$ est la phase de $X(f)$.

On aboutit ainsi à la représentation graphique suivante :

FIGURE 3 – Module et phase de la Transformée de Fourier



Remarque

On constate que le module n'est pas pair. Et, la phase n'est pas impaire. Ceci est dû au fait que le signal x n'est pas réel.

Représentation graphique du lieu géométrique

Par définition, le lieu géométrique est

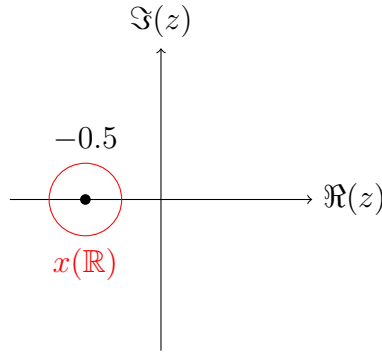
$$x(\mathbb{R}) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\} .$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{jt}$ réalise une surjection de \mathbb{R} dans \mathbb{U} l'ensemble des complexes de module 1 et même une bijection de $] -\pi; \pi]$ dans \mathbb{U} . On en déduit que le lieu géométrique de x est un cercle centré en $z_0 := \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon 0.24. En d'autres termes :

$$x(\mathbb{R}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{1}{2} \right| = 0.24 \right\} .$$

Voici une représentation graphique du lieu géométrique de x :

FIGURE 4 – Lieu géométrique de x



Correction du 3

Représentation graphique de la Transformée de Fourier

On a ici

$$x(t) = 0.2 + \sin\left(2\pi f_\alpha t + \frac{\pi}{6}\right) + 0.25 \sin\left(2\pi f_\beta t + \frac{\pi}{4}\right),$$

avec $f_\alpha = 100$ et $f_\beta = 150$. On remarque

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Il s'ensuit que le signal est bien périodique. 100 est la seconde harmonique tandis que 150 en est la troisième.

Pour calculer la Transformée de Fourier, il suffit ensuite de faire appel à la formule d'Euler sur les sinus pour réécrire comme suit :

$$x(t) = 0.2 + \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{2j\pi f_\alpha t} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{-2j\pi f_\alpha t} + 0.25 \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{2j\pi f_\beta t} - 0.25 \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-2j\pi f_\beta t}.$$

La linéarité de la Transformée de Fourier donne directement

$$\widehat{X}(f) = 0.2\delta_0(f) + \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} \delta_{f_\alpha}(f) - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} \delta_{-f_\alpha}(f) + 0.25 \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}} \delta_{f_\beta}(f) - 0.25 \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta_{-f_\beta}(f).$$

Par conséquent, si $f \neq \pm f_\alpha$, $f \neq \pm f_\beta$ et $f \neq 0$, on a $\widehat{X}(f) = 0$.

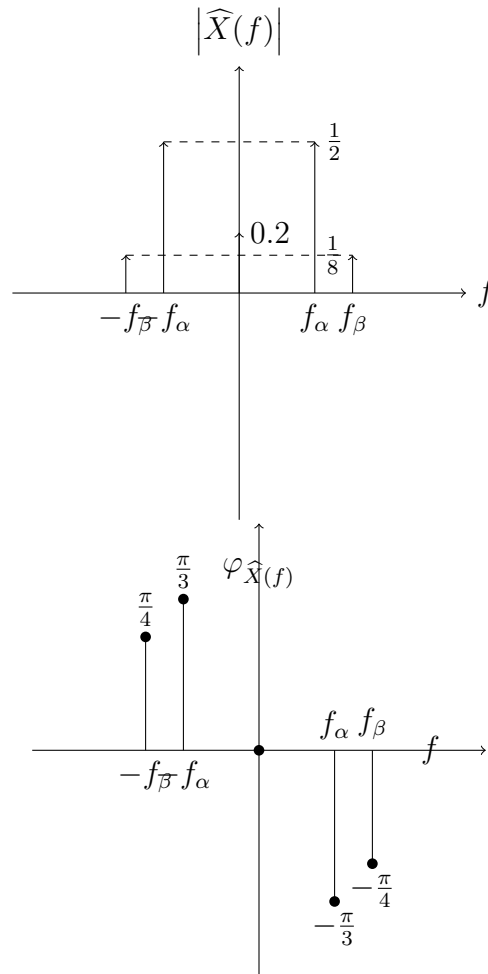
Puis, $|\widehat{X}(0)| = 0.2$ et $\varphi_{\widehat{X}}(0) = 0$.

De même, $|\widehat{X}(\pm f_\alpha)| = \frac{1}{2}$ tandis que $\varphi_{\widehat{X}}(f_\alpha) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$ puis $\varphi_{\widehat{X}}(-f_\alpha) = +\frac{\pi}{3}$.

Enfin, $|\widehat{X}(\pm f_\beta)| = \frac{1}{8}$ tandis que $\varphi_{\widehat{X}}(f_\beta) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ puis $\varphi_{\widehat{X}}(-f_\beta) = +\frac{\pi}{4}$.

On aboutit ainsi à la représentation graphique suivante :

FIGURE 5 – Module et phase de la Transformée de Fourier



Remarque

On constate que le module est pair. Et, la phase est impaire. Ceci est dû au fait que le signal x est réel.

Correction du 4

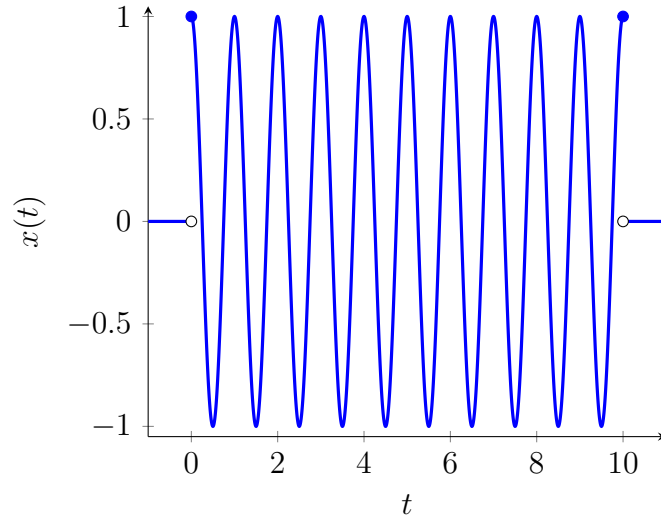
Représentation graphique du signal

Par définition, $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) \mathbf{1}_{[0; D]}(t)$.

En effet, si $t < 0$, $\frac{t-D}{D} < -\frac{1}{2}$ d'où $x(t) = 0$. Il en est de même si $t > D$. Enfin, si $t \in [0; D]$, alors $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ vu que $\frac{t-D}{D} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Voici donc une représentation graphique du signal x :

FIGURE 6 – Signal x



Remarque

Il peut sembler curieux *a priori* d'introduire une fonction rect alors qu'il suffirait de mettre l'indicatrice entre 0 et D . En fait, l'intérêt de la fonction rect est justement que l'on connaît sa Transformée de Fourier et que celle-ci est relativement simple à représenter à la main puisqu'il s'agit d'un sinus cardinal.

Représentation graphique du module de la Transformée de Fourier

On a ici

$$x(t) = u(t)v(t),$$

avec $u(t) := \cos(2\pi f_1 t)$ et $v(t) = \text{rect}\left(\frac{t-D}{D}\right)$. On utilise alors les propriétés (rappelées à la fin de l'exercice) de la Transformée de Fourier.

On a ainsi :

$$\widehat{X}(f) = (\widehat{U} * \widehat{V})(f).$$

Or, $v(t) = v_1\left(t - \frac{D}{2}\right)$ avec $v_1(s) = \text{rect}\left(\frac{s}{D}\right)$.

On a donc $\widehat{V}(f) = \widehat{V}_1(f)e^{-j\pi Df}$. Or, $v_1(s) = \text{rect}\left(\frac{s}{D}\right)$ d'où $\widehat{V}_1(f) = D\widehat{V}_2(Df) = D\text{sinc}(\pi f D)$.

Par conséquent :

$$\widehat{V}(f) = D\text{sinc}(\pi f D)e^{-j\pi Df}.$$

Et, $\widehat{U}(f) = \frac{1}{2}\delta_{f_1}(f) + \frac{1}{2}\delta_{-f_1}(f)$ d'après la formule d'Euler sur les cosinus.

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\widehat{X}(f) &= \frac{1}{2}\widehat{V}(f - f_1) + \frac{1}{2}\widehat{V}(f + f_1) \\ &= \frac{D}{2}e^{j\pi Df_1}e^{-j\pi Df}\text{sinc}(\pi(f - f_1)D) + \frac{D}{2}e^{-j\pi Df_1}e^{-j\pi Df}\text{sinc}(\pi(f + f_1)D).\end{aligned}$$

Or, $D = \frac{10}{f_1}$. Ainsi, on peut écrire comme suit :

$$\widehat{X}(f) = \frac{D}{2}e^{10j\pi}e^{-10j\pi\frac{f}{f_1}}\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)\right) + \frac{D}{2}e^{-10j\pi}e^{10j\pi\frac{f}{f_1}}\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} + 1\right)\right),$$

puis comme $e^{2jk\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il vient :

$$X(f) = \frac{D}{2}\left\{e^{-10j\pi\frac{f}{f_1}}\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)\right) + e^{10j\pi\frac{f}{f_1}}\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} + 1\right)\right)\right\}.$$

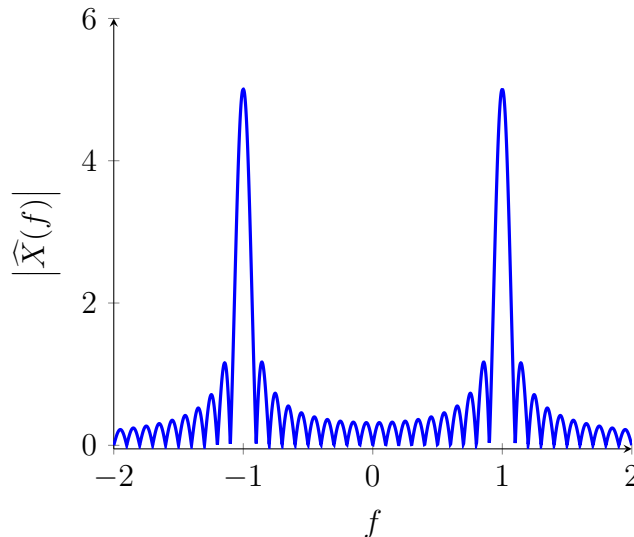
On a donc une somme de deux sinus cardinal déphasés. Cela dit, le calcul du module de la somme est simplifié par la remarque suivante. Si f est loin de f_1 , alors $\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)\right)$ est relativement petit. Par exemple, pour $f \leq 0$, on aura $\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)\right) \leq \frac{1}{10\pi} \approx 0.0318$. On peut donc considérer que les rebonds avant 0 sont négligeables pour $\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)\right)$ et de même que les rebonds après 0 le sont pour $\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} + 1\right)\right)$.

Conséquemment, bien que la formule suivante soit fautive, elle est une bonne approximation de la réalité :

$$|\widehat{X}(f)| = \frac{D}{2}\left\{\left|\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} - 1\right)\right)\right| + \left|\text{sinc}\left(10\pi\left(\frac{f}{f_1} + 1\right)\right)\right|\right\}$$

On aboutit ainsi à la représentation graphique suivante :

FIGURE 7 – Module de la Transformée de Fourier avec $D = 10$ (et donc $f_1 = 1$)



Remarque 1

On constate que le module est pair. Ceci est dû au fait que le signal x est réel.

Exercice 2

Rappels

Un signal échantillonné est un signal multiplié par un peigne de Dirac $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT_e}$ donc sa transformée de Fourier est la Transformée de Fourier du signal non échantillonné dont on prend le produit de convolution avec $f_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nf_e}$.

Correction du 1

Ici,

$$x[n] = \cos\left(2\pi f_1 n T_e + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(6\pi f_1 n T_e + \frac{\pi}{6}\right).$$

On pose ainsi

$$x(t) := \cos\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(6\pi f_1 t + \frac{\pi}{6}\right).$$

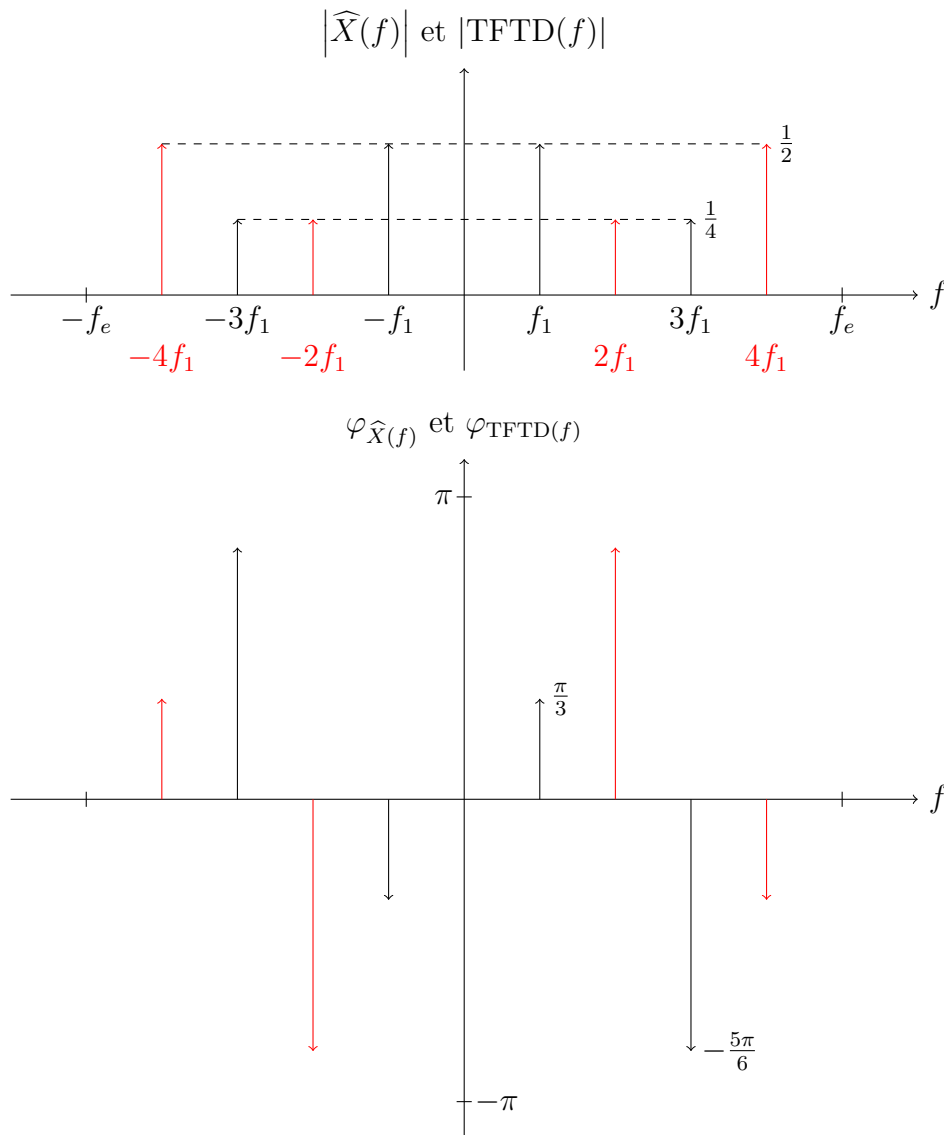
On note $\widehat{X}(f)$ la Transformée de Fourier du signal à temps continu $t \mapsto x(t)$. Alors :

$$\widehat{X}(f) = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(f - f_1) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(f + f_1) - \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{6}} \delta(f - 3f_1) - \frac{1}{4} e^{-j\frac{\pi}{6}} \delta(f + 3f_1).$$

Pour représenter la Transformée de Fourier à Temps Discret pour tout $f \in [-f_e; f_e]$, il suffit ensuite de représenter $f_e \widehat{X}(f)$ puis de translater de $+f_e$ et de $-f_e$ en ne gardant que les valeurs de f comprises entre $-f_e$ et $+f_e$.

On aboutit ainsi à la représentation graphique suivante :

FIGURE 8 – Module et phase de la Transformée de Fourier à Temps Discret



On note en particulier qu'un phénomène de repliement de spectre a lieu (les raies rouges dans $[-\frac{f_e}{2}; \frac{f_e}{2}]$). En effet, on dispose de deux fréquences positives : $f_1 = 100$ et $3f_1 = 300$. Or, $f_e = 500 < 2 \times 300$.

Il s'agit bien d'un signal périodique vu que $t \mapsto x(t)$ est la somme de deux signaux périodiques de périodes $\frac{1}{f_1}$ et $\frac{1}{3f_1}$. En effet, $\frac{3f_1}{f_1} = 3 \in \mathbb{Q}$.

Correction du 2 avec $\nu_1 = 0.1$

D'abord, on note que le signal n'est pas périodique. En effet, il s'agit de la somme de deux signaux périodiques de périodes $\frac{1}{\nu_1}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}\nu_1}$. Or, $\frac{\sqrt{2}\nu_1}{\nu_1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ici,

$$x[n] = -\frac{1}{4} \sin\left(2\pi\nu_1 n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi\sqrt{2}\nu_1 n + \frac{\pi}{3}\right).$$

On pose ainsi

$$x(t) := -\frac{1}{4} \sin\left(2\pi\nu_1 t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi\sqrt{2}\nu_1 t + \frac{\pi}{3}\right).$$

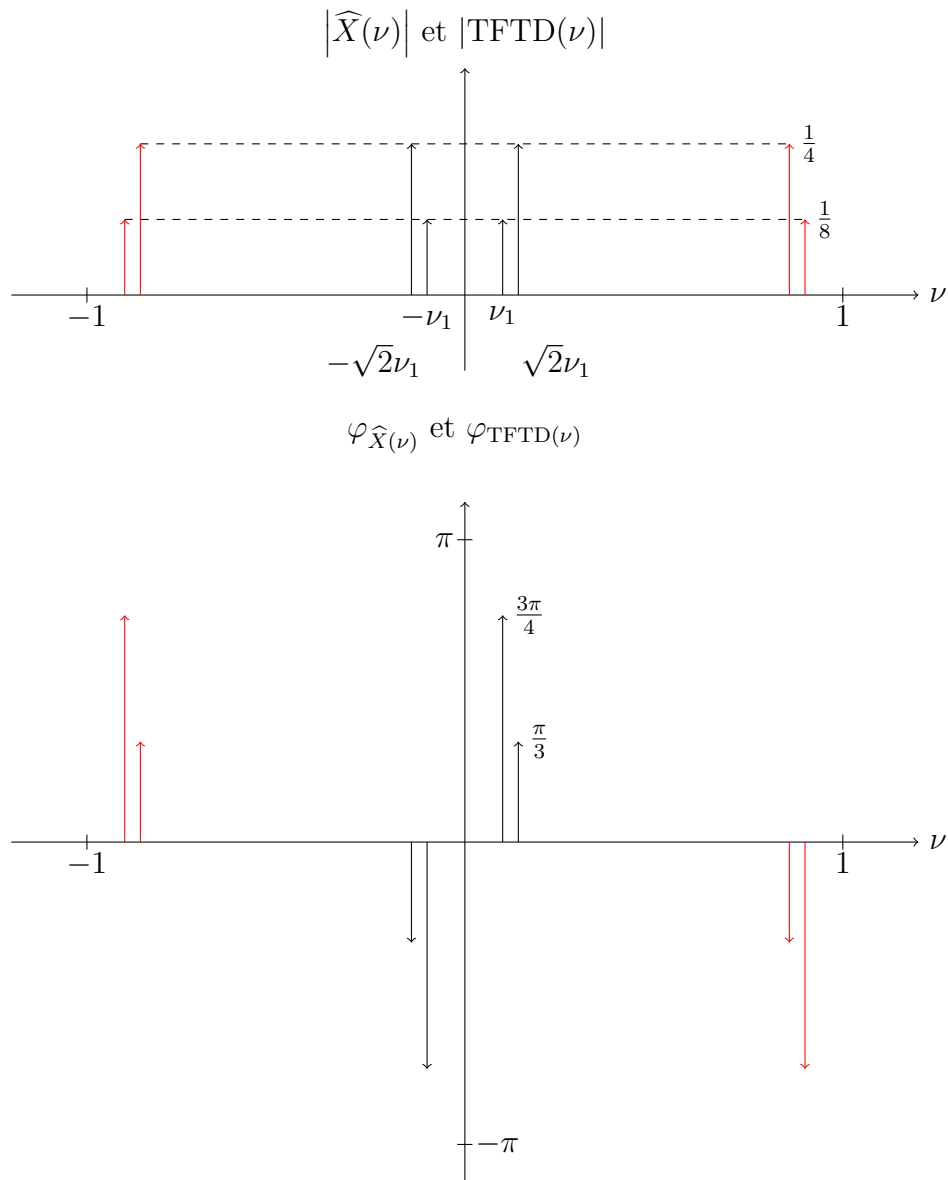
On note $\widehat{X}(\nu)$ la Transformée de Fourier du signal à temps continu $t \mapsto x(t)$. Alors :

$$\widehat{X}(\nu) = -\frac{1}{8j} e^{j\frac{\pi}{4}} \delta(\nu - \nu_1) + \frac{1}{8j} e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(\nu + \nu_1) + \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(\nu - \sqrt{2}\nu_1) + \frac{1}{4} e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(\nu + \sqrt{2}\nu_1).$$

Pour représenter la Transformée de Fourier à Temps Discret pour tout $\nu \in [-1; 1]$, il suffit ensuite de représenter $\widehat{X}(\nu)$ puis de translater de $+1$ et de -1 en ne gardant que les valeurs de ν comprises entre -1 et $+1$.

On aboutit ainsi à la représentation graphique suivante :

FIGURE 9 – Module et phase de la Transformée de Fourier à Temps Discret



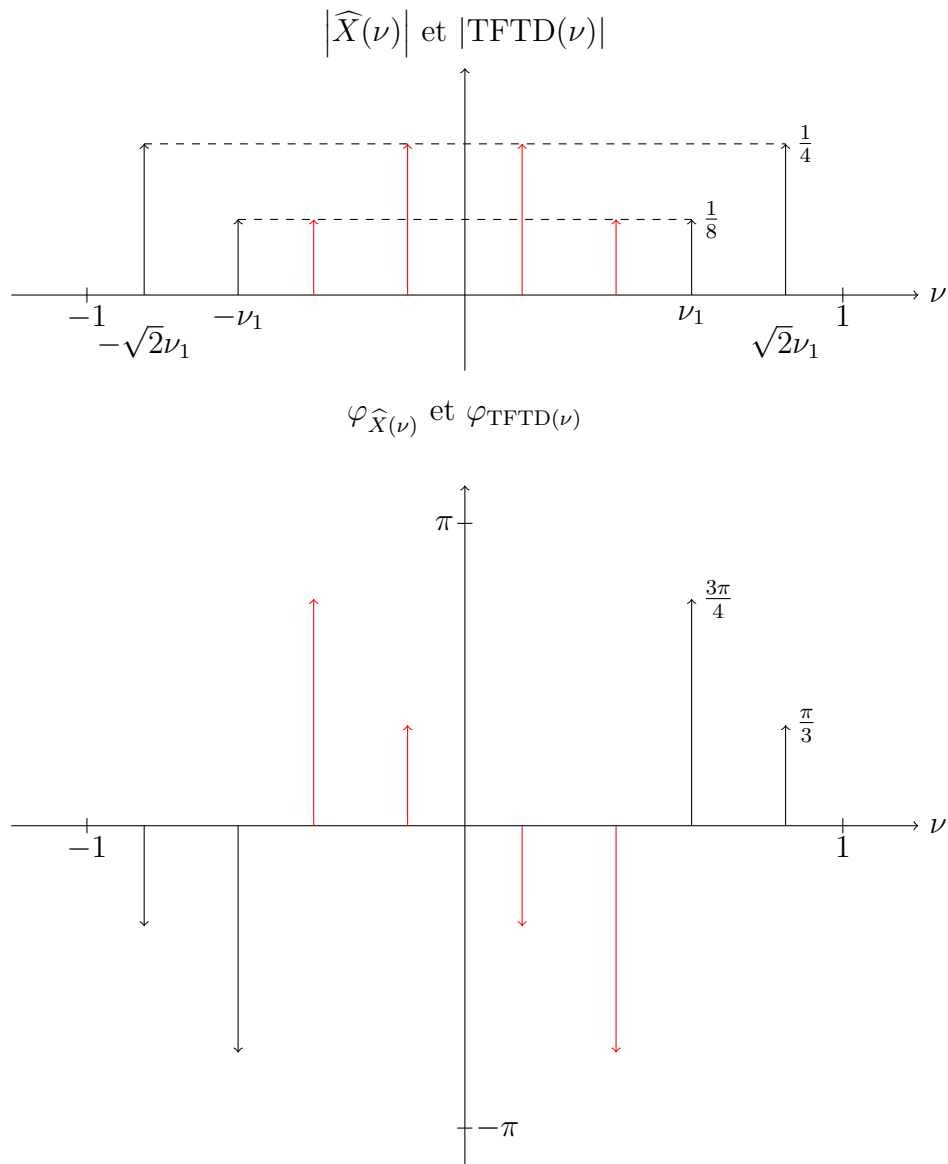
On remarque qu'il n'y a pas de phénomène d'aliasing. En effet, $\sqrt{2}\nu_1 < 0.2 < \frac{1}{2}$.

Correction du 2 avec $\nu_1 = 0.6$

Comme dans le cas où $\nu_1 = 0.1$, le signal n'est pas périodique et ceci pour les mêmes raisons.

La représentation graphique s'obtient comme dans le cas précédent. Néanmoins, un phénomène d'aliasing se produit vu que $\nu_1 > \frac{1}{2}$ et aussi vu que $\sqrt{2}\nu_1 > \frac{1}{2}$. On aboutit ainsi à

FIGURE 10 – Module et phase de la Transformée de Fourier à Temps Discret



Exercice 3

Correction du 1

On note $t \mapsto x(t)$ le signal utile analogique. On note $t \mapsto b(t)$ le bruit. On s'intéresse donc au spectre d'amplitude de $t \mapsto y(t) := x(t) + b(t)$. Or, par linéarité de la Transformée de Fourier, $\widehat{Y}(f) = \widehat{X}(f) + \widehat{B}(f)$. On cherche ici $|\widehat{Y}(f)| = |\widehat{X}(f) + \widehat{B}(f)|$.

La formule suivante, fautive en général, s'avère vraie vu que les fréquences sont séparées :

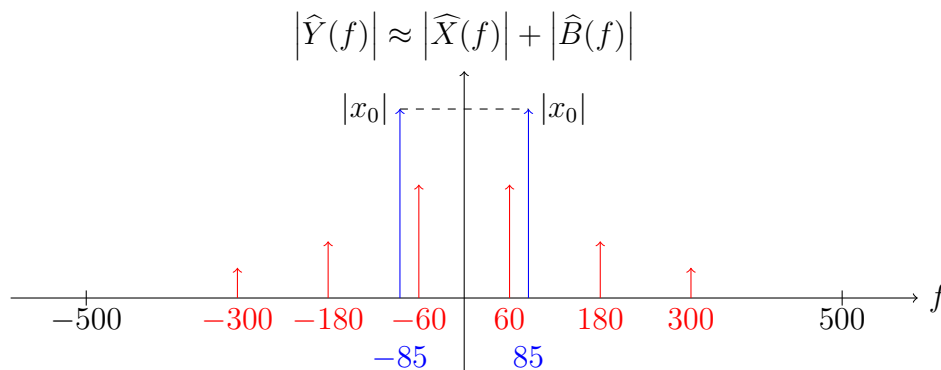
$$|\widehat{Y}(f)| = |\widehat{X}(f)| + |\widehat{B}(f)|.$$

Or, $\widehat{X}(f) = x_0\delta(f - 85) + x_0^*\delta(f + 85)$. On suppose ici que la fréquence est située en 85, sans rien changer à la généralité.

Puis, $\widehat{B}(f) = b_1\delta(f - 60) + b_1^*\delta(f + 60) + b_3\delta(f - 180) + b_3^*\delta(f + 180) + b_5\delta(f - 300) + b_5^*\delta(f + 300)$.

Le signal bruité analogique y a donc le spectre d'amplitude suivant :

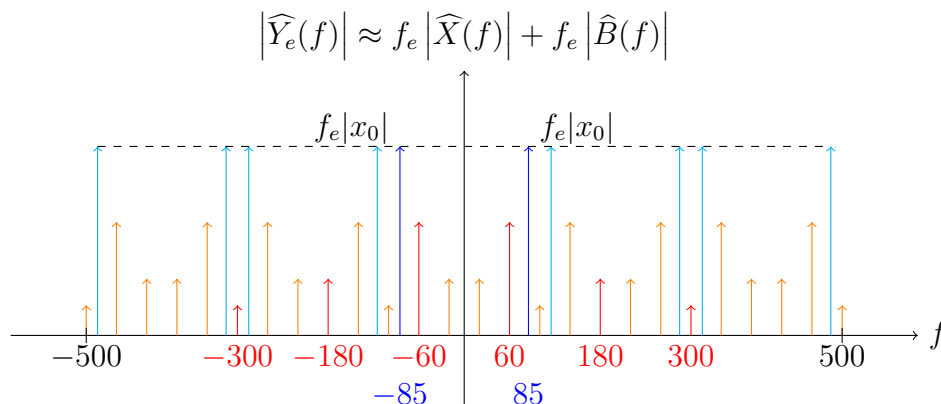
FIGURE 11 – Spectre d'amplitude du signal bruité Y



Les raies bleues correspondent au signal non bruité et les raies rouges au bruit.

En utilisant la périodicité du spectre d'amplitude du signal échantillonné, il vient :

FIGURE 12 – Spectre d'amplitude du signal bruité échantillonné



Les raies de couleur cyan correspondent aux répétitions périodiques de $f_e|\widehat{X}(f)|$ et les raies rouges à celles de $f_e|\widehat{B}(f)|$.

Remarque

Il ne faut pas oublier que l'on a

$$\widehat{X}_e(f) = f_e \left(\widehat{X} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nf_e} \right) (f),$$

ce qui explique que l'on multiplie le module par f_e et que l'on ait f_e -périodicité.

Correction du 2

La fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée pour éviter l'aliasing du signal non bruité. Malheureusement, il y a bien aliasing puisque le bruit a des composantes (harmoniques de rang 3 et 5) trop élevées.

Néanmoins, la composante qui nous intéresse est celle entre 80 et 90 Hertz. Dans cette optique, la fréquence d'échantillonnage est bonne puisqu'il n'y a pas de perturbation de la fréquence par le repliement de spectre.

Pour éliminer le bruit, il faut ensuite utiliser un filtre passe-bande entre 80 et 90 Hertz dont voici une forme idéale de son module :

FIGURE 13 – Forme idéale du module du filtre

