Énoncés des Travaux Dirigés de

Probabilités et Statistiques

Julian Tugaut

FISE 1

Version du 23 octobre 2023

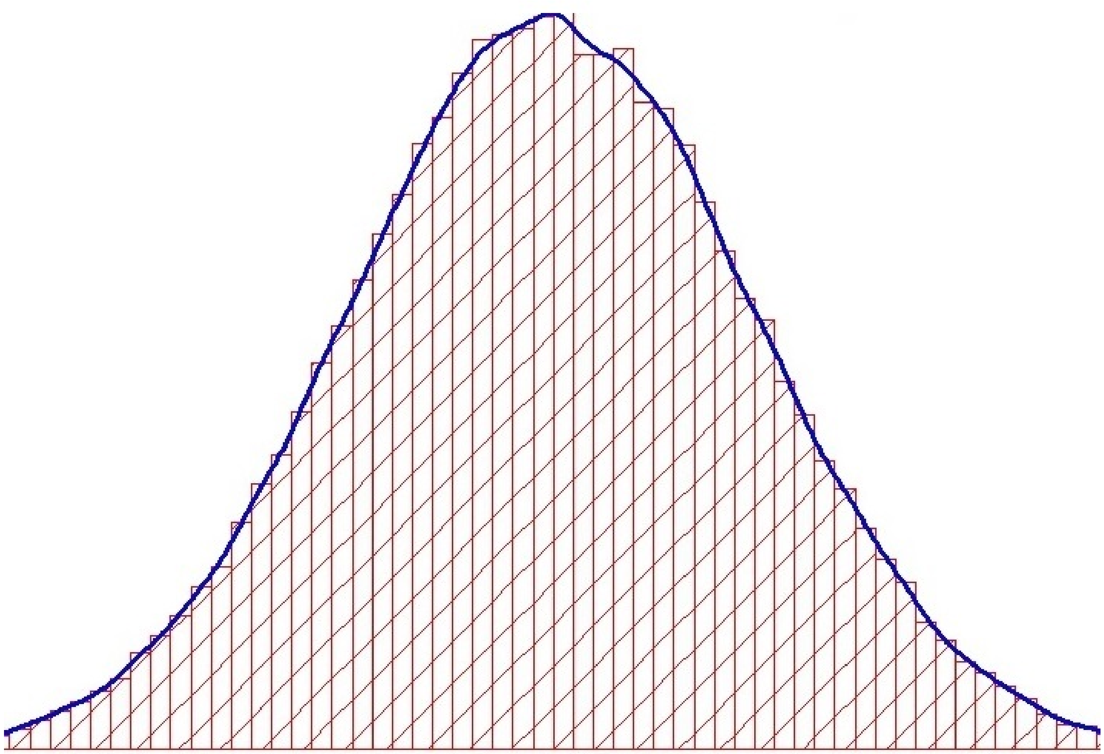


Table des matières

Lois discrètes et fonctions génératrices (une séance)

Exercice 1

X désigne une variable aléatoire réelle.

1. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(20, 0.3)$. Calculer $\mathbb{P}(3 < X < 12)$ et $\mathbb{P}(X \leq 6)$.

2. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(30, 0.3)$. Calculer $\mathbb{P}(4 \leq X < 8)$ et $\mathbb{P}(X < 5)$.

3. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(30, 0.8)$. Calculer $\mathbb{P}(12 < X < 16)$ et $\mathbb{P}(X = 16)$.

Exercice 2

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2, indépendantes. On suppose qu'elles suivent respectivement les lois $\mathcal{B}(10, 0.4)$ et $\mathcal{B}(20, 0.4)$.

Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 < 8)$.

Exercice 3

X désigne une variable aléatoire réelle.

1. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(0.4)$. Calculer $\mathbb{P}(11 < X < 42)$.

2. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(0.9)$. Calculer $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.

Exercice 4

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2, indépendantes. On suppose qu'elles suivent respectivement les lois $\mathcal{P}(0.4)$ et $\mathcal{P}(0.6)$.

Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 < 4)$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ et Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. *Calculer l'espérance et la variance de X en utilisant sa fonction génératrice.*

2. *Calculer l'espérance et la variance de Y en utilisant sa fonction génératrice.*

Exercice 6

1. Soit U suivant une loi uniforme discrète sur $[\![1;n]\!]$ avec $n \geq 1$ c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{P}_U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k$. Calculer la fonction génératrice de U.
2. On lance deux dés (à six faces) de façon indépendante et on note S le résultat de la somme des deux résultats obtenus. Calculer la fonction génératrice de S.

Exercice 7 (*)

On modélise la désintégration radioactive d'un élément instable par un PPP (Processus Ponctuel de Poisson). Pour tout intervalle de temps $\mathcal{I}$, $N_{\mathcal{I}}$ désigne le nombre de désintégrations durant l'intervalle $\mathcal{I}$. Ce processus admet les trois propriétés fondamentales suivantes :

1. Soient $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux intervalles disjoints. Alors, les évènements "il y a k_1 désintégrations dans I_1" et "il y a k_2 désintégrations dans I_2" sont indépendants pour tous k_1, k_2.
2. La probabilité de désintégration au cours d'un intervalle de temps infiniment petit $[t; t+h]$ est petite d'ordre 1 : $\lambda(t)h + o(h)$.
3. La probabilité de plus d'une désintégration au cours d'un intervalle de temps petit $[t; t+h]$ est petite d'ordre strictement supérieur à 1 : $o(h)$.

Le processus peut se déterminer de la manière suivante. Soit $P_n(t_1,t_2) := \mathbb{P}\left(N_{[t_1,t_2]} = n\right)$ la probabilité de n désintégrations dans l'intervalle $[t_1; t_2]$. Alors, on a

$$\mathbb{P}\left(N_{[t,t+h]} = 1\right) = P_1(t,t+h) = \lambda(t)h + o(h)\,,$$

ainsi que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}\left(N_{[t,t+h]} = n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(t,t+h) = o(h)\,.$$

Ici, λ est une fonction positive. Soit t_0 l'instant initial. On pose $P_n(t) := P_n(t_0,t)$ pour tout $t \geq t_0$.

1. *En calculant $P_0(t+h)$ avec h petit, trouver une relation entre P_0' et P_0.*

2. *En calculant $P_m(t+h)$ avec h petit, trouver une relation entre P_m', P_m, P_{m-1} et λ.*

3. *Résoudre cette équation différentielle pour $m=0$, $m=1$ et $m=2$. Puis, généraliser la solution. On peut procéder à un raisonnement par récurrence.*

On suppose maintenant que la fonction λ est constante : $\lambda(t) = \lambda$ et $t_0 := 0$.

4. *Montrer que l'on a alors : $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$.*

5. *Donner l'espérance mathématique et la variance de cette loi.*

On suppose maintenant $\lambda := 10^5$.

6. *Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement* 10^6 *désintégrations durant un laps de temps de dix secondes ?*

7. *Trouver un majorant simple de la probabilité que le nombre de désintégrations en dix secondes soit d'au moins* 2.10^6.

Exercice 8 (*)

Une poule pond N œufs, et N est une distribution de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf éclôt avec probabilité p et les éclosions sont des évènements indépendants. Soit K le nombre de poussins. Calculer la fonction génératrice de K et en déduire que K suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 9 (*)

Le nombre N de clients entrant pendant une journée dans un grand magasin est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les probabilités respectives pour chaque client d'acheter zéro, un ou deux articles de marque A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Le nombre d'articles en question achetés pendant une journée est une variable aléatoire S. On étudie la loi de S grâce à sa fonction génératrice.

On modélise le problème de façon plus précise de la manière suivante. Soit une variable aléatoire N de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, de même loi (X_n représente le nombre d'articles achetés par le n-ième client) définie par $\mathbb{P}X_1^{-1} = \frac{1}{6}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2$. On suppose de plus que N et les X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, constituent une famille de variables aléatoires indépendantes. On définit enfin la variable aléatoire S par

$$S := \mathbb{1}_{\{N\geq 1\}} \sum_{j=1}^{N} X_j \,,$$

où on fait la convention d'écriture $\sum_{j=1}^{0} = 0$.

1. *Calculer la fonction génératrice* G_S *de la variable aléatoire* S*, en tout* $s \in [-1;1]$.

2. *En déduire la probabilité* $\mathbb{P}(S = 3)$ *et la calculer numériquement dans le cas* $\lambda = 6$.

3. *Justifier l'existence de la moyenne* $\mathbb{E}[S]$ *et de la variance* σ_S^2*. Les calculer numériquement dans le cas* $\lambda = 6$.

Exercice 10 (*)

On étudie la propagation d'un nom de famille à travers les générations. On note Z_n le nombre d'hommes de la génération n portant ce nom. On suppose $Z_0 = 1$. On suppose que le $i^{\text{ème}}$ homme donne naissance à X_i garçons portant le même nom. On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi. On note G la fonction génératrice de X_1. On note H_n celle de Z_n. On suppose par ailleurs qu'il n'y a ni immigration ni mortalité infantile. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que le nom s'éteigne, c'est-à-dire la probabilité $p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$.

1. Donner une relation de récurrence reliant H_n à H_{n-1}.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = x_0$ où $x_0 := \inf\{x \in [0;1] \ : \ G(x) = x\}$.
4. Montrer que si $\mathbb{E}(X_1) < 1$, alors $p_n \longrightarrow 1$ quand n tend vers l'infini.

Variables aléatoires à densité (cinq séances)

Exercice 11

Trouver la constante c telle que la fonction $x \mapsto cx^{-3}$ soit une densité sur l'intervalle $[1; +\infty[$ puis sur l'intervalle $[-2; -1[$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := Ke^{-|x|} \, ,$$

où K est une constante réelle.

1. *Déterminer la constante K pour que f soit la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire réelle X.*

2. *Déterminer sa fonction de répartition F_X. Tracer son graphe.*

3. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.*

Exercice 13

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := \frac{K}{(x+1)^4} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \, ,$$

où K est une constante réelle.

1. *Déterminer la constante K pour que f soit la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire réelle X.*

2. *Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.*

3. *Trouver $q_{\frac{7}{8}} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}\left(X \leq q_{\frac{7}{8}}\right) = \frac{7}{8}$.*

4. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.*

Exercice 14

On considère la fonction F définie par

$$F(x) := \frac{1}{1+e^{-x}}\,.$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X.

2. Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(-x < X \leq x\right) = \frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\,.$$

où $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. En déduire $\mathbb{P}\left(-\log(2) < X \leq \log(2)\right) = \frac{1}{3}$.

Exercice 15

La durée de vie en années d'un composant électronique est une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité $f_X(x) := xe^{-x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}\,[X]$.

Exercice 16

Soient a et b deux constantes réelles et une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par $f(x) := (ax+bx^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(x)$. On suppose $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{5}$. Déterminer $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{Var}\,[X]$.

Exercice 17

La durée de vie d'une ampoule est distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif, de densité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)\,.$$

1. Tracer le graphe de f.

2. Calculer la probabilité que la durée de vie soit comprise entre -3 et 4.

3. Calculer la probabilité que la durée de vie soit inférieure à t. On appelle $F(t)$ cette quantité. Tracer le graphe de F.

4. Déterminer t_0 tel que 50% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_0.

5. Déterminer t_1 tel que 75% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_1.

Soit X la variable aléatoire associée à la durée de vie d'une ampoule.

6. Calculer le moment d'ordre n de X. En déduire la durée de vie moyenne et la variance de la durée de vie.

Exercice 18

La loi normale est la loi la plus importante de la statistique. De nombreux caractères sont approximativement distribués suivant une loi normale et cette loi intervient comme loi-limite.
Soit une variable aléatoire réelle absolument continue X, de densité de probabilité

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
3. Calculer $\mathrm{Var}[X]$.
Soit σ un nombre réel strictement positif et m un nombre réel quelconque. On considère la variable aléatoire réelle $Y := \sigma X + m$.
4. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire la densité de Y et tracer son graphe.
5. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
6. Calculer $\mathrm{Var}[Y]$.
7. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $L := e^Y$ (on dit que L suit la loi log-normale de paramètres m et σ^2).
8. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $\chi := X^2$ (on dit que χ suit la loi du khi-deux à un degré de liberté).

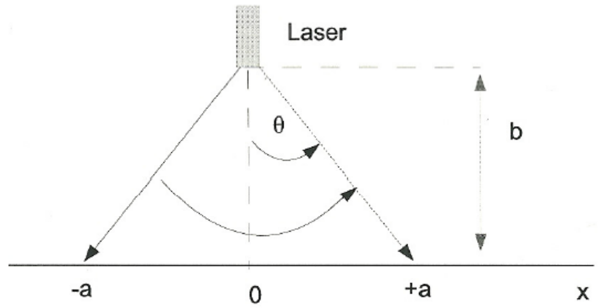
Exercice 19

Trouver la valeur du réel α tel que la fonction f définie par $f(x) := \alpha x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ soit une densité de probabilité.

Exercice 20

Pendant un procédé de gravure, un faisceau laser balaye une fois et à vitesse de rotation ω constante un axe horizontal. Le déplacement s'effectue de $x = -a$ à $x = +a$. La distance du laser à l'axe balayé est notée b.

FIGURE 1 – Schéma du graveur laser



1. *Quelle est la durée T_0 du balayage complet ?*

Le dispositif tombe en panne à l'instant $T \in [0; T_0]$. On suppose que T est une variable aléatoire uniformément distribuée sur cette période.

2. *Quelle est la probabilité que le faisceau tombe en panne avant qu'il ait atteint $x = \frac{a}{2}$?*

3. *Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X où X est la position où s'arrête le faisceau.*

Exercice 21

Un tremblement de Terre de magnitude M libère une énergie E telle que $M = \log(E)$ où log désigne le logarithme népérien. Pour des tremblements de terre de magnitude $M > 3$, on suppose que la variable aléatoire $Y := M - 3$ suit une loi exponentielle de moyenne égale à 2. Par la suite, on néglige les tremblements de terre dont la magnitude est inférieure à 3.

1. *Calculer la moyenne et la variance de M.*

2. *Calculer la densité de probabilité de M.*

3. *Calculer la fonction de répartition de E et sa densité de probabilité.*

4. *On s'intéresse à deux tremblements de terre indépendants et dont la magnitude suit la même loi que celle de M. Démontrer que l'on a*

$$\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq m\right) = \mathbb{P}\left(M \geq m\right)^2 ,$$

pour tout $m > 3$.

5. *En particulier, calculer $\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq 4\right)$.*

Exercice 22

Une résistance électrique a une valeur R de dix ohms plus ou moins vingt pourcents. On suppose que la variable aléatoire R est uniformément distribuée. Cette résistance est alimentée par une tension constante $U := 10V$. L'objet de l'exercice est d'étudier l'intensité I qui traverse la résistance.

1. *Déterminer la fonction de répartition F_I de la variable aléatoire I.*

2. *Déterminer la densité de probabilité f_I de la variable aléatoire I.*

3. *Quelle est la probabilité d'avoir un courant d'intensité I supérieur à un ampère ?*

4. *Quelle est l'intensité moyenne du courant ? Comparer cette valeur à $\frac{U}{\mathbb{E}[R]}$.*

5. *Quels sont la variance et l'écart-type du courant ? Comparer ces valeurs à $\frac{U^2}{\sigma^2(R)}$ et à $\frac{U}{\sigma(R)}$.*

6. *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de la probabilité pour que le courant I s'écarte de plus de* 0.15 *ampère de sa valeur moyenne.*

Exercice 23

Deux résistances R_1 et R_2 de 10Ω à $\pm 20\%$ (uniformément distribuées) sont montées en série. La tension d'alimentation est égale à $U = 20V$. On s'interroge sur la valeur du courant I obtenu.

1. Déterminer la densité de probabilité de la résistance équivalente R.

2. Déterminer la fonction de répartition de la résistance équivalente R.

3. Déterminer la fonction de répartition du courant obtenu I.

4. Déterminer la densité de probabilité du courant obtenu I.

5. Calculer le courant moyen et la variance de I.

Exercice 24

U suit la loi uniforme sur $[0; 1]$. Soient $X := \cos(2\pi U)$ et $Y := \sin(2\pi U)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

3. En déduire la covariance Cov (X, Y).

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 25

La variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Y est une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{1}{2}$. On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Z := XY$.

2. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}\,(X,Z)$.

3. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 26

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) := \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[0;3]}(x)$. Soit $Y := \max\{2;X\}$. Trouver la fonction de répartition et l'espérance de Y. La variable aléatoire Y admet-elle une densité ?

Exercice 27

Une variable aléatoire X suit une loi Log-normale s'il existe des constantes $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ telles que la densité f_X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}} \exp\left[-\frac{(\log(x)-m)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Log-normale. Soient $c, \alpha > 0$. Montrer que $Y := cX^\alpha$ suit aussi une loi Log-normale.

Exercice 28

Soient U et X deux variables aléatoires indépendantes à valeurs positives. On suppose que U suit la loi uniforme sur $[0;1]$ et que X est à densité. On suppose de plus que sa densité $f = f_X$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $A := \log(X)$ en fonction de f.

2. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $B := \log(U)$.

3. Montrer que la variable aléatoire $C := \log(UX)$ est à densité. Exprimer de plus $f_C(t)$ en fonction de $\int_t^{+\infty} f(e^s)ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que la variable aléatoire $Y := UX$ est à densité. Déterminer de plus la densité f_Y.

On suppose dorénavant que X suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

5. Déterminer la densité de probabilité de Y.

Exercice 29

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) := \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;1]}(x)$. On pose $Y := |4X^2 - 1|$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{E}\left((Y+4X^2)^3\right)$.

Exercice 30 (*)

$R(t)$, le taux de retour en % au cours du temps d'un produit au SAV d'une entreprise est aléatoire. En effet, il dépend de la clientèle du produit, des pays concernés... On suppose qu'il est donné par la relation suivante :

$$R(t) = -Yt^2 + 3t + \frac{1}{2},$$

où Y est une variable aléatoire admettant la densité $f_Y(y) := \frac{1}{5}\mathbb{1}_{[0;5]}(y)$. L'entreprise ne souhaite pas que le taux $R(t)$ dépasse 1%. Calculer la probabilité de cet évènement.

Exercice 31 (*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ c'est-à-dire telle que sa densité de probabilité est égale à $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. Soit $Y := \frac{1}{X}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que X et Y aient la même loi.

Exercice 32 (*)

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. Trouver la constante m telle que

$$\mathbb{E}\left[(X-m)^2\right] = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right].$$

Exercice 33 (*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et possédant une densité f. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt.$$

Exercice 34 (*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Calculer l'espérance de X^2e^X.

Exercice 35 (*)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction de répartition de X_1 est continue et dérivable.

1. Le but de cette question est de montrer que pour tout couple d'entiers positifs distincts i et j, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$.
(a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où X_i, X_j sont compris entre -1 et 1.
(b) On se place dans le cas de **(a)**. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(X_i = X_j) \leq \sum_{k=-n}^{k=n-1} \mathbb{P}\left(\frac{k}{n} < X_i \leq \frac{k+1}{n}; \frac{k}{n} < X_j \leq \frac{k+1}{n}\right) .$$

(c) En utilisant l'inégalité du **(b)**, prouver le résultat annoncé.
(d) En déduire que pour n fixé, $A_n := \{\omega \in \Omega \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n \Rightarrow X_i \neq X_j\}$ est un évènement de probabilité 1.

Soit n fixé. On définit $\mathbb{P}$-presque sûrement la permutation aléatoire π_n de $[\![1; n]\!]$ par la condition

$$X_{\pi_n(1)} < \cdots < X_{\pi_n(n)} .$$

2. Justifier que pour toute permutation σ de $[\![1; n]\!]$, la loi de $\left(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)}\right)$ est égale à la loi de $(X_1, \cdots, X_n)$.

3. En déduire que la permutation aléatoire π_n est uniformément distribuée sur l'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$.

4. On suppose de plus que $F_{X_1}(0) = 0$. Montrer que les X_i sont positives.

On définit la fonction de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}$, N par

$$N := \inf \{n \geq 2 \ : \ X_n > X_1\} .$$

5. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n(n-1)} ,$$

et que $\mathbb{P}$-presque sûrement, $N < \infty$.

Exercice 36 (*)

On admet que la vitesse V d'une molécule d'un gaz en équilibre est une variable aléatoire réelle absolument continue dont la densité de probabilité est égale à

$$f_V(v) := \frac{4b\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-bv^2} \mathbb{1}_{v \geq 0} ,$$

avec $b := \frac{m}{2kT}$, m étant la masse de la molécule, k la constante de Boltzmann et T la température.

1. Calculer la vitesse moyenne d'une molécule de ce gaz.

2. On appelle énergie cinétique la quantité $\frac{1}{2}mV^2$. Calculer l'énergie cinétique moyenne. On donne : $\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}} e^{-u} du = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Exercice 37 (*)

Soit X une variable aléatoire positive de densité f. Montrer que la variable aléatoire $\sqrt{X}$ admet comme densité $x \mapsto 2xf(x^2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Lois de probabilités continues usuelles (quatre séances)

Exercice 38

X désigne une variable aléatoire réelle.

1. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $\mathbb{P}(-2.52 < X < 1.26)$ et $\mathbb{P}(0.63 \leq X \leq 2.32)$.

2. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $\mathbb{P}(X > 1.452)$.

3. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(|X| < t) = 0.95$.

4. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer t tel que $\mathbb{P}(|X| \geq t) = 0.10$.

5. Soit $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(5,16)$. Calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 6)$, $\mathbb{P}(X < 3)$, $\mathbb{P}(X > 4)$, $\mathbb{P}(X < 7)$ et $\mathbb{P}(X > 6)$.

Exercice 39

Soient deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2, indépendantes. On suppose qu'elles suivent respectivement les lois $\mathcal{N}(2,10)$ et $\mathcal{N}(3,10)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 < 5)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 + 3X_2 < 10)$.

Exercice 40

Dans une compagnie de messagerie disposant de cent camions de livraison, on suppose que le nombre de colis livrés par camion en une journée est distribué suivant la loi normale de moyenne 80 et d'écart-type 15.

Quelle est la loi du nombre de colis livrés en une journée par la compagnie ?

Exercice 41

On considère des assemblages mécaniques de quatre pièces, devant avoir respectivement pour longueur : $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$ et $l_4 = 5$.

Il est matériellement impossible d'obtenir ces valeurs exactes. Les longueurs sont en fait aléatoires et on accepte qu'elles soient distribuées suivant des lois normales ayant pour moyennes respectives les longueurs l_1, l_2, l_3 et l_4. Et, l'écart-type est 0.02 pour chacune des quatre variables aléatoires. On suppose également que les fabrications des quatre pièces se font de façon indépendante.

Pour qu'un assemblage puisse être utilisé, la somme des longueurs doit être comprise entre 13.9 et 14.1.

Calculer la probabilité qu'un assemblage soit défectueux.

Exercice 42

Une confiture est qualifiée de "pur sucre" lorsqu'elle contient entre 420 et 520 grammes de sucre par kilogramme. Chez un fabricant, le poids de sucre par kilogramme est approximativement distribué suivant la loi normale de moyenne 465 grammes et d'écart-type 30 grammes. Calculer la probabilité qu'un kilogramme de confiture ne soit pas "pur sucre".

Exercice 43

On suppose que la température T pendant le mois de juin suit une loi normale de moyenne 20^o et d'écart-type 3^o.

Calculer la probabilité pour que la température pendant le mois de juin soit comprise entre 21^o *et* 26^o *?*

Exercice 44

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[1;3]$. Chercher la loi de la variable aléatoire $Y := \frac{1}{2}\left(|X-1| + |X|\right)$.

Exercice 45

Soit Y une variable aléatoire uniforme sur $]0;5[$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation $4x^2 + 4xY + Y + 4 = 0$ soient réelles ?

Exercice 46

On suppose que $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$. Calculer $\mathbb{E}\left(\max\left\{X_1, \cdots, X_n\right\}\right)$.

Exercice 47

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X est sans mémoire c'est-à-dire que pour tout $s, t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

Exercice 48

Un électron est émis par une cathode à un instant $T > 0$. Ce temps est une variable aléatoire réelle positive et à densité. On suppose que la probabilité qu'il soit émis dans un intervalle de temps $[t_1; t_2] \subset \mathbb{R}_+$ est donnée par

$$\mathbb{P}(t_1 \leq T \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(s) ds\,,$$

où la fonction α est supposée continue. On suppose de plus que le temps d'émission T est sans mémoire, en d'autres termes que l'on a

$$\mathbb{P}(T > t_1) = \mathbb{P}(T > t_1 + t_2 \mid T > t_2)\ ,$$

pour tout t_1, t_2 dans $\mathbb{R}_+$.

1. Exprimer $f_T(t)$.

2. Déterminer la fonction de survie $A(t) := \mathbb{P}(T > t)$ pour $t \geq 0$.

3. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\alpha(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ c'est-à-dire que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

4. Calculer la moyenne et la médiane de cette loi exponentielle.

5. Estimer la probabilité que l'instant d'émission T soit supérieur à la moyenne $\mathbb{E}[T]$ puis à la médiane.

Exercice 49

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $a > 0$. Calculer $\mathbb{E}(\max\{X, Y\})$ et $\mathbb{E}(\min\{X, Y\})$.

Exercice 50

On considère une requête informatique. Deux serveurs A et B peuvent la traiter. Le routeur envoie la requête au serveur A dans une proportion x des cas, sinon à B. Le serveur B traite la requête selon un temps T_B qui suit une loi $\mathcal{E}(1)$ et le serveur A fait le même travail selon un temps T_A qui suit une loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Quel serveur est le plus rapide en moyenne ?

2. On note T le temps de traitement de la requête. Déterminer la loi de T.

3. Quelle valeur donner à x pour qu'en moyenne, le temps T soit inférieur à $\frac{5}{4}$?

Exercice 51 (*)

Un ascenseur peut porter une charge de 500 kilos. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids P. On admet aussi que P est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $m := 75$ et d'écart-type $\sigma := 16$.

Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter si on veut que le risque de surcharge n'excède pas 10^{-2} *?*

Exercice 52 (*)

On admet que l'on sait simuler les variables aléatoires réelles qui suivent la loi uniforme sur $[0;1]$, $\mathcal{U}([0;1])$. Soit une variable aléatoire réelle U qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$. Soit une loi de probabilité μ de fonction de répartition F. On suppose F continue. On introduit la variable aléatoire $X := F^{-1}(U)$, où F^{-1} désigne la réciproque de la fonction F sur $[0;1[$. Montrer que la fonction de répartition de X est F et en déduire que X suit la loi μ. Suggérer un protocole pour simuler une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 53 (*)

On étudie un produit qui est fabriqué en deux étapes. D'abord, la structure est assemblée par un robot, cette phase prenant un temps aléatoire E suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (en minutes). Ensuite, la structure assemblée passe entre les mains d'un opérateur humain choisi au hasard qui doit vérifier la validité des câblages. On estime qu'il y a de grosses différences d'efficacité des opérateurs : 80% d'entre eux mettent trois minutes à vérifier le produit, 10% mettent deux minutes et 10% mettent une minute. On admet que les deux étapes sont indépendantes.

Déterminer la loi suivie par le temps global nécessaire à la fabrication du produit.

Exercice 54 (*)

Tous les matins, un employé de bureau joue à la dame de pique. Il se met à jouer à une heure U au hasard entre 8 h et 12 h. Il joue toujours durant 30 minutes. Le chef de service de cet employé passe une fois dans la matinée pour le surveiller. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité p que l'employé soit surpris par son chef en train de jouer.

1. On suppose que le chef passe à une heure $t \in [8;12]$ déterministe. Calculer p en fonction de t.

2. On suppose maintenant qu'il y a un nouveau chef, qui passe à une heure T aléatoire. On suppose que T suit la loi uniforme sur $[8;12]$. Calculer la nouvelle probabilité p en admettant que T et U sont indépendantes.

3. Quelle est finalement la situation la plus avantageuse pour l'employé ?

Fonctions caractéristiques (une séance)

Exercice 55

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles telles que X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Z suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. *Calculer l'espérance et la variance de X en utilisant sa fonction caractéristique.*

2. *Calculer l'espérance et la variance de Y en utilisant sa fonction caractéristique.*

3. *Calculer l'espérance et la variance de Z en utilisant sa fonction caractéristique.*

Exercice 56

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit ϵ une variable aléatoire de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. On suppose que X et ϵ sont indépendantes. On pose $Y := \epsilon X$. On dit que Y suit la loi de Laplace.

1. Montrer que la loi de Laplace est une loi à densité.

2. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Laplace.

Exercice 57

Donner un exemple de variable aléatoire X telle que $\varphi_{2X} = (\varphi_X)^2$. En déduire que la propriété $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y.

Exercice 58

Soit X qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

Exercice 59 (*)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Notons φ la fonction caractéristique de X_0. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Nous supposons que les variables Y et X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendantes. Posons

$$Z := \sum_{n=1}^{Y} X_n \,,$$

avec pour convention $\sum_{n=1}^{0} X_n = 0$.

1. *Déterminer la fonction caractéristique de Z.*

2. *Supposons que X_0 admet des moments de tout ordre.*

(a) *Soit $p \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire Z admet-elle un moment d'ordre p ?*

(b) *Déterminer, si elle existe, la variance de Z.*

Exercice 60 (*)

Soit un évènement aléatoire H_0. On appelle H_1 son complémentaire. Soit maintenant une variable aléatoire X continue qui dépend de H_0 de la façon suivante :

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{I} \,|\, H_0\right) = \int_{\mathcal{I}} p_0(x)dx \,,$$

et

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{I} \,|\, H_1\right) = \int_{\mathcal{I}} p_1(x)dx \,,$$

où p_0 et p_1 sont deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}$ et où $\mathcal{I}$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On introduit le rapport de vraisemblance comme suit : $L(x) := \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note maintenant la variable aléatoire $Y := L(X) = \frac{p_1(X)}{p_0(X)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mu_k := \mathbb{E}\left[Y^k \,|\, H_0\right]$ et $\nu_k := \mathbb{E}\left[Y^k \,|\, H_1\right]$.

1. *Établir une relation entre la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la suite $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Calculer ν_0.*

2. *Soit φ (respectivement ψ) la fonction caractéristique de Y conditionnellement à H_0 (respectivement à H_1). Trouver une relation entre φ et ψ.*

3. *En déduire une relation entre q_0, la densité de probabilité de Y conditionnellement à H_0, et q_1, la densité de probabilité de Y conditionnellement à H_1.*

Vecteurs aléatoires (deux séances)

Exercice 61

Le nombre de véhicules se présentant un lundi matin, jour ouvré, entre 8h et 9h, à la gare de péage autoroutier de Saint Quentin Fallavier, est une variable aléatoire X obéissant à la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Parmi ces véhicules, une proportion $p \in]0;1[$, utilise le télépéage. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de ces derniers, et par Z la variable aléatoire égale au nombre des autres véhicules, dont on suppose qu'ils se répartissent au hasard entre les r guichets de la gare. On désigne alors par T la variable aléatoire égale au nombre de véhicules se présentant au premier guichet.

1. Soit m un entier naturel donné. Déterminer la loi de Y sachant $\{X = m\}$.

2. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, Y).

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire T.

Exercice 62

Soit la fonction $f(x, y) = ke^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x, y)$.

1. Montrer qu'il faut $k = 1$ pour que f soit une densité de probabilité (d.d.p.) conjointe.

2. Donner les densités marginales de X et Y, variables aléatoires (v.a.) dont le couple (X, Y) suit une d.d.p. conjointe $f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x, y)$. Sont-elles indépendantes ?

3. Calculer la covariance entre X et Y puis le coefficient de corrélation linéaire. Sont-elles corrélées linéairement ?

Exercice 63

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(2)$. On admet que le couple (X, Y) est à densité.

1. Donner la densité de probabilité de X puis celle de Y.

2. Donner la densité de probabilité du couple (X, Y).

3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Exercice 64

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Déterminer la densité de probabilité de $Z := \frac{X}{Y}$ et en déduire $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 65

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[1;2]}$. Déterminer $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right]$.

Exercice 66

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T := X - Y$ et $Z := \min(X, Y)$.

1. Rappeler la densité de probabilité de $f_X = f_Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition de Z et en déduire sa densité de probabilité.

3. Déterminer la densité de probabilité de $-Y$.

4. Calculer la densité de probabilité de T.

5. Donner la fonction de répartition de T.

On pose $W := (T, Z)$ et on note F_W sa fonction de répartition.

6. Établir, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_+^2$, la formule suivante :

$$F_W(t,z) = \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)dx\right) f_Y(y)dy + \int_z^{+\infty} \left(\int_0^z f_X(x)dx\right) f_Y(y)dy\,.$$

7. En déduire, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_+^2$, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de t et de z.

8. Établir, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, la formule suivante :

$$F_W(t,z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_{x-t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy\right) dx\,.$$

9. En déduire, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de t et de z.

10. Montrer que Z et T sont indépendantes.

Exercice 67 (*)

Soit l'espace fondamental $\Omega := \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. On munit cet espace de l'équiprobabilité que l'on note $\mathbb{P}$. On se donne les deux variables aléatoires X et Y définies par

$$X(\omega) = \omega_1 \quad \text{et} \quad Y(\omega) = \omega_2\,,$$

pour tout élément de l'espace fondamental $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. On remarque $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

1) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

2) Déterminer la loi de probabilité de $Z := X + Y$ ainsi que la fonction de répartition de Z.

3) Même question pour la variable aléatoire $T := XY$.

4) Calculer l'espérance et la variance des deux variables aléatoires Z et T.

Exercice 68 (*)

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on connaît la fonction densité conjointe $f_{X,Y}$. On cherche à déterminer la distribution $f_{R,\Theta}$ en coordonnées polaires.

1) Rappeler les expressions de x et de y en fonction de r et de θ.

2) Donner l'expression de la densité de probabilité conjointe $f_{R,\Theta}$ et de ses marginales f_R et f_Θ.

3) Que deviennent ces expressions dans le cas d'une distribution à symétrie circulaire ? En particulier, comment l'angle Θ est-il distribué ? Donner l'expression de f_Θ et f_R.

4) Dans le cas d'une distribution normale à symétrie circulaire, donner la marginale f_R.

5) Toujours dans le cas d'une distribution normale à symétrie circulaire, quelle est la probabilité pour qu'un point (x, y) choisi au hasard soit tel que $\sqrt{x^2 + y^2} < \mathbb{E}(R)$?

Exercice 69 (*)

Soit la fonction densité $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\,,$$

où $\rho \in]-1;1[$.

1) Déterminer les densités marginales des variables aléatoires X et Y.

2) En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

3) Déterminer l'expression de la densité conditionnelle $f_Y\,(y|X = x)$.

4) Déterminer $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[Y^2]$ en posant $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[Y] = 0$.

5) Déterminer $\mathbb{E}[XY]$ en posant $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ et $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 1$.

Convergences, LGN et TCL (deux séances)

Exercice 70

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi exponentielle de paramètre 1*. On pose* $X_n := X\mathbb{1}_{[0;n[}(X) + e^{2n}\mathbb{1}_{[n;+\infty[}(X)$.

1. Vérifier que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X.

2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

3. Est-il vrai que $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers $\mathbb{E}(X)$?

Exercice 71

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2}\delta_{-\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\delta_{\sqrt{n}}$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Démontrer que $\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge vers 0 en probabilité.

Exercice 72

Soit $(p_n)_n$ une suite de réels dans $]0;1[$ telle que $\lim\limits_{n\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles telle que pour tout n, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers Y.

Exercice 73

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0;1)$. Déterminer la limite en loi de la suite $(Y_n)_n$ avec

$$Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}X_k\,.$$

Exercice 74

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi uniforme sur l'ensemble fini

$$\mathbb{A}_n := \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \cdots; \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 75

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On note $Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

Exercice 76

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 77

Un logiciel doit faire un calcul comportant cinquante nombres. Il arrondit chacun de ces nombres à l'entier le plus proche et effectue leur somme.

Si les erreurs d'arrondi individuelles sont distribuées uniformément sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, calculer la probabilité pour que la somme obtenue ait un écart de plus de trois par rapport à la somme exacte.

Exercice 78

Une entreprise fabrique des briquets. Elle envoie à ses revendeurs des cartons comportant 30 briquets. Néanmoins, l'emballage est fait à la main si bien que seuls 95% des cartons contiennent effectivement 30 briquets. 3% en contiennent 28 et 2% en contiennent 31.

1. En notant X le nombre de briquets que contient un carton pris au hasard à la sortie de l'usine, donner la loi de X, son espérance et sa variance σ^2.

2. Un magasin a commandé 12 000 briquets c'est-à-dire 400 cartons. Calculer la probabilité que le magasin en reçoive moins de 12 000. On utilisera l'approximation $\frac{1}{\sigma} \approx 2.6875$.

Exercice 79 (*)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que, pour tout n, X_n est de fonction de répartition F_n définie par

$$F_n(x) := \left(1 - \frac{1}{n+x}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\,.$$

On note $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n := \frac{S_n}{n}$.
Démontrer que la suite $(X_n)_n$ converge vers 0 en probabilité mais que la suite $(Y_n)_n$ ne converge pas vers 0 en probabilité.

Exercice 80 (*)

On tente d'organiser le planning des entretiens de recrutement dans une école d'ingénieurs. On a constaté que 10% des personnes convoquées ne viennent pas à l'entretien. 250 personnes ont été convoquées pour les entretiens. On note X le nombre de personnes effectivement présentes pour passer l'entretien.

1. Déterminer la loi exacte de X.
2. Calculer de façon approchée $\mathbb{P}(X \leq 230)$. On prendra l'approximation $\sqrt{10} \approx 3.15$.

Exercice 81 (*)

Une société d'assurance A doit assurer 100 véhicules identiques, dont la valeur est de 10 000 euros. Sur un an, la probabilité pour qu'un véhicule soit accidenté et irréparable est de $p = 0.01$. Les accidents des voitures sont supposés indépendants. On suppose que A doit payer le 31 décembre sur son fonds de roulement tous les sinistres de l'année.

1. À combien doit s'élever le fonds de roulement si on veut que A puisse indemniser tous les sinistres dans 99% des cas ?
2. Une autre société d'assurance, la société B, doit effectuer le même travail que A dans les mêmes conditions (mais sur 100 autres véhicules). Les sociétés A et B projettent de fusionner. Elles assureraient les 200 véhicules. Calculer la valeur du fonds de roulement que devrait posséder la nouvelle société (dans les mêmes conditions que précédemment).
3. La fusion permet-elle de réaliser des économies ?

Exercice 82 (*)

Une machine doit percer une pièce métallique. Mais ce perçage est très technique et la probabilité qu'elle réussisse à faire le trou n'est que de $\frac{1}{2}$. La machine traite n pièces, de façon indépendante. On note p_n la proportion de pièces correctes :

$$p_n := \frac{\#\,\{\text{pièces correctement percées}\}}{n}\,.$$

1. Calculer p_∞, la limite de p_n pour n tendant vers l'infini.
2. Soit $\epsilon > 0$. Combien de pièces la machine doit-elle traiter pour être sûr à 95% que p_n soit proche à ϵ près de la probabilité limite p_∞ ?

Exercice 83 (*)

On considère une fonction f positive sur l'intervalle $[a;b]$ avec $b > a$. On suppose de plus qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$. On note $\mathcal{S}$ la surface sous la courbe de f entre a et b. On réalise l'expérience suivante : on tire de façon indépendante n points $A_1 := (X_1, Y_1), \cdots, A_n := (X_n, Y_n)$ au hasard dans le rectangle $[a;b] \times [0;M]$. En d'autres termes, les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[a;b]}$ et les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[0;M]}$. De plus, X_i est indépendante de Y_j pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
1. Quelle est la densité de probabilité du couple (X_1, Y_1) ?
2. Calculer la probabilité que le point A_1 soit dans la surface $\mathcal{S}$.
3. On pose $p_n := \frac{\#\{i \in [\![1;n]\!]\ :\ A_i \in \mathcal{S}\}}{n}$. Montrer que p_n converge presque sûrement vers la quantité $\frac{\int_a^b f(x)dx}{M(b-a)}$.
4. En déduire une façon de calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$.
5. On prend $a = 1$, $b = 2$ et $M = 4$. Quelle valeur donner à n pour être sûr à 95% d'obtenir une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ à 10^{-2} près par la méthode précédente ?

Statistiques descriptives (deux séances)

Exercice 84

À la suite d'une interrogation portant sur 40 étudiants, on a relevé les notes suivantes :

$$14, 14, 6, 14, 11, 10, 15, 7, 14, 9, 9, 13, 12, 9, 10, 15,$$
$$8, 10, 16, 8, 12, 9, 7, 11, 10, 12, 11, 16, 11, 10, 10, 9,$$
$$7, 10, 13, 10, 9, 9, 16, 12\,.$$

1. Présenter cette série sous la forme d'une série à valeurs isolées.
2. Déterminer les fréquences.
3. Construire le diagramme en bâtons des effectifs.
4. Déterminer les effectifs cumulés.
5. Déterminer les fréquences cumulées
6. Construire le diagramme en bâtons des effectifs cumulés.
7. Calculer la moyenne arithmétique.
8. Déterminer graphiquement la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.
9. Déterminer le(s) mode(s).
10. Déterminer la variance et l'écart-type.

Exercice 85

Dans un ensemble de 53 710 familles de huit enfants, on a observé le nombre de garçons par famille :

Nombre de garçons	Nombre de familles
0	215
1	1 485
2	5 331
3	10 649
4	14 959
5	11 959
6	6 678
7	2 092
8	342

1. Déterminer les fréquences.

2. Construire le diagramme en bâtons des effectifs.

3. Déterminer les effectifs cumulés.

4. Déterminer les fréquences cumulées.

5. Construire le diagramme en bâtons des effectifs cumulés.

6. Calculer la moyenne arithmétique.

7. Déterminer graphiquement la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.

8. Déterminer la variance et l'écart-type.

Exercice 86

On a mesuré la taille (x) et le poids (y) de 300 adultes extraits par un tirage au hasard non exhaustif d'une population. Les données sont présentées dans le tableau de contingence suivant :

Table 1 – Tableau de contingence (poids/taille)

Taille (cm) / Poids (kg)	$[150;160[$	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180;190[$	$[190;200[$
$[45;55[$	2	1	0	0	0
$[55;65[$	7	8	4	2	0
$[65;75[$	5	15	22	7	1
$[75;85[$	2	12	63	19	5
$[85;95[$	0	7	28	32	12
$[95;105[$	0	2	10	20	7
$[105;115[$	0	0	1	4	2

1) *Construire une représentation graphique des effectifs de chaque série marginale.*

2) *Calculer la moyenne et la variance de chaque série marginale.*

3) *Construire la courbe des moyennes conditionnelles du caractère y par rapport au caractère x dans cet échantillon.*

4) *Déterminer l'équation de la droite de régression au sens des moindres carrés du caractère y par rapport au caractère x dans cet échantillon.*

5) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire des caractères x et y dans cet échantillon.*

Exercice 87

On a noté sur 6 800 individus les couleurs des cheveux et des yeux. On a construit le tableau de contingence :

TABLE 2 – Tableau de contingence

couleur des cheveux / couleur des yeux	blond	châtain	noir	roux
bleu	1 768	807	189	47
gris ou vert	946	1 387	746	53
marron	115	438	288	16

Calculer les fréquences conditionnelles des couleurs des yeux par rapport aux couleurs des cheveux dans cet échantillon. La couleur des yeux est-elle indépendante de celle des cheveux dans cet échantillon ?

Tests statistiques (une séance)

Exercice 88

On observe le nombre de filles dans 320 fratries de cinq enfants :

Nombre de filles	Nombre de fratries
0	18
1	56
2	110
3	88
4	40
5	8

1) *En supposant que le genre d'un enfant suit une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$*, quelle est la loi du nombre de filles dans une fratrie de cinq enfants ?*
2) *La distribution du nombre de filles suit-elle une loi binomiale de paramètres* $m := 5$ *et* $p := 0.5$ *au seuil de risque de* 5% *? Conclure.*

Exercice 89

Au départ d'une course de chevaux, il y a habituellement huit positions de départ et la position numéro un est la plus proche de la palissade. On soupçonne qu'un cheval a plus de chances de gagner quand il porte un numéro faible, c'est-à-dire quand il est plus proche de la palissade intérieure. Voici les données de 144 courses :

Numéro de départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de victoires d'un cheval ayant ce numéro	31	17	16	27	15	12	13	13

L'hypothèse nulle (H_0) est l'hypothèse d'équiprobabilité des numéros de départ dans les places de premier à l'arrivée.

Nous prendrons comme hypothèse alternative (H_1) la non équiprobabilité des numéros de départ.

Nous supposons que l'échantillon de 144 courses est un échantillon aléatoire.

Tester l'hypothèse (H_0) contre l'hypothèse (H_1) au risque d'erreur 5%.

Exercice 90

On a noté sur 6 800 individus les couleurs des cheveux et des yeux. On a construit le tableau de contingence :

Table 3 – Tableau de contingence

couleur des yeux \ couleur des cheveux	blond	châtain	noir	roux
bleu	1 768	807	189	47
gris ou vert	946	1 387	746	53
marron	115	438	288	16

Effectuer un test du khi-deux d'indépendance pour vérifier que la couleur des yeux n'est pas indépendante de la couleur des cheveux.