Correction des Travaux dirigés de Probabilités et Statistiques - Vecteurs aléatoires

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 61

Énoncé

Le nombre de véhicules se présentant un lundi matin, jour ouvré, entre 8h et 9h, à la gare de péage autoroutier de Saint Quentin Fallavier, est une variable aléatoire X obéissant à la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Parmi ces véhicules, une proportion $p \in]0;1[$, utilise le télépéage. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de ces derniers, et par Z la variable aléatoire égale au nombre des autres véhicules, dont on suppose qu'ils se répartissent au hasard entre les r guichets de la gare. On désigne alors par T la variable aléatoire égale au nombre de véhicules se présentant au premier guichet.

1. Soit m un entier naturel donné. Déterminer la loi de Y sachant $\{X = m\}$.

2. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, Y).

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire T.

Remarque

La plus grande difficulté dans cet exercice est liée à la modélisation. En effet, l'énoncé contient un flou volontaire. On ne peut pas certifier que la **proportion** de voitures qui utilisent le télépéage est p. En fait, on suppose que chaque véhicule a une probabilité p de l'utiliser.

On pose donc $U_i = 1$ si le véhicule numéro i l'utilise et $U_i = 0$ sinon. On sait alors que U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Par ailleurs, on suppose que les variables aléatoires U_i sont mutuellement indépendantes. Enfin, on suppose que U_i est indépendante de X, le nombre total de véhicules.

On a alors $Y = \sum_{i=1}^{X} U_i$.

Correction

Correction du 1)

On a $\mathbb{P}(Y = n \mid X = m) = \frac{\mathbb{P}(X=m, Y=n)}{\mathbb{P}(X=m)}$. On calcule comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = n \mid X = m) =& \frac{\mathbb{P}(X = m, \sum_{i=1}^{X} U_i = n)}{\mathbb{P}(X = m)} \\
=& \frac{\mathbb{P}(X = m, \sum_{i=1}^{m} U_i = n)}{\mathbb{P}(X = m)} \\
=& \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{m} U_i = n)
\end{aligned}$$

par indépendance de X et des variables U_i. Enfin, comme U_i suit la loi $\mathcal{B}(p)$ et comme elles sont indépendantes, on obtient $\mathbb{P}(Y = n \mid X = m) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$. En d'autres termes, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = m\}$ est la loi binomiale de paramètres m et p.

Correction du 2)

Le couple aléatoire (X, Y) prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{S} := \{(m,n) \; : \; m \in \mathbb{N}, n \in [\![0; m]\!]\}$. De plus, pour tout $(m,n) \in \mathbb{S}$:

$$\mathbb{P}\left(X = m, Y = n\right) = \mathbb{P}(X = m)\mathbb{P}\left(Y = n \mid X = m\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \times \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}\,.$$

Correction du 3)

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = m, Y = n\right) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \times \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p^n}{n!} \sum_{m=n}^{\infty} \lambda^m \frac{(1-p)^{m-n}}{(m-n)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p^n}{n!} \lambda^n e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-p\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, Y suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Correction du 4)

On procède comme dans les questions 1), 2) et 3) avec une “proportion” égale à $\frac{1-p}{r}$ et l'on obtient que T suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{1-p}{r}\lambda$.

Exercice 62

Énoncé

Soit la fonction $f(x,y) = ke^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y)$.

1. Montrer qu'il faut $k = 1$ pour que f soit une densité de probabilité (d.d.p.) conjointe.

2. Donner les densités marginales de X et Y, variables aléatoires (v.a.) dont le couple (X,Y) suit une d.d.p. conjointe $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y)$. Sont-elles indépendantes ?

3. Calculer la covariance entre X et Y puis le coefficient de corrélation linéaire. Sont-elles corrélées linéairement ?

Rappels

Densité de probabilité conjointe

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une densité de probabilité (c'est-à-dire qu'il existe un couple de variables aléatoires (X,Y) dont la densité de probabilité conjointe est f) si et seulement si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, f(x,y) \geq 0\,, \tag{1}$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1\,. \tag{2}$$

Intégration dans $\mathbb{R}^2$

L'une des difficultés de l'exercice est l'intégration sur $\mathbb{R}^2$. Toutefois, cette intégration a été vue dans le cours de "Bases Indispensables des Mathématiques" (CM03). En effet, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right) dy && (3)\\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right) dx\,, && (4)
\end{aligned}$$

pour peu que la fonction f soit positive (c'est-à-dire $f(x,y) \geq 0$ pour **tous** les réels x et y).

Densités marginales

La densité marginale de X (c'est-à-dire la loi de la première coordonnée du vecteur aléatoire) est facile à obtenir à partir de la densité de probabilité conjointe. Comme on a vu dans le cours de "Probabilités et Statistiques" (CM07), on a :

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\,. \tag{5}$$

De même, on a

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx\,. \tag{6}$$

Indépendance de variables aléatoires

Il y a plusieurs méthodes pour montrer l'indépendance des variables aléatoires (ou leur non-indépendance).

On peut reprendre la définition pour montrer que deux variables ne sont pas indépendantes. En effet, si l'on exhibe deux ensembles (boréliens) $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ tels que

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{B}_1, Y \in \mathcal{B}_2\right) \neq \mathbb{P}\left(X \in \mathcal{B}_1\right)\mathbb{P}\left(Y \in \mathcal{B}_2\right)$$

alors on sait automatiquement que les deux variables aléatoires **ne sont pas** indépendantes.

Une autre méthode (plus simple) est la suivante. Les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. En d'autres termes, il suffit de prendre le produit des deux densités marginales. Si l'on retrouve la densité de probabilité conjointe, c'est que les variables aléatoires sont indépendantes. Sinon, elles ne le sont pas.

Corrélation linéaire

Par définition, le coefficient de corrélation linéaire est

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\,, \tag{7}$$

où la covariance entre X et Y est

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \tag{8}$$

et les écarts-types sont les racines des variances à savoir $\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Cov}(X,X)}$ et $\sigma_Y := \sqrt{\mathrm{Cov}(Y,Y)}$. Rappelons en effet que la variance de X est exactement la covariance de X avec elle-même. *En fait, la covariance est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique "variance".*

Il convient de noter que le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1 d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Plus sa valeur absolue est élevée, plus les deux variables sont corrélées linéairement.

Également, si le coefficient de corrélation linéaire est non-nul, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Néanmoins, la réciproque est fausse. Il existe des variables aléatoires non-indépendantes qui ne sont pas corrélées linéairement (voir exercice du cours de "Signaux Aléatoires").

Calcul de $\mathbb{E}[XY]$

La formule pour calculer l'espérance du produit de deux variables aléatoires à densité est la suivante :

$$\mathbb{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy\,. \tag{9}$$

En effet, comme pour le cas de la dimension un, on a

$$\mathbb{E}\left[\psi(X,Y)\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy\,.$$

Il suffit ici d'appliquer à la fonction $\psi(x,y) := xy$.

Correction

Correction du 1

On pose $g(x,y) := e^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y)$. On remarque que $g(x,y)$ est positif pour tous les réels x et y. On calcule désormais son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ en utilisant (3).

On peut d'abord remarquer $\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\mathbb{1}_{\{x\leq y\}}(x,y)$. En effet, les deux inéquations $0 \leq x$ et $x \leq y$ impliquent $0 \leq y$.

On a donc, en intégrant d'abord par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} g(x,y)dx\right) dy \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y)dx\right) dy \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\mathbb{1}_{\{x\leq y\}}(x,y)dx\right) dy \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{1}_{\{x\leq y\}}(x,y)dx\right) dy \\
&= \int_{y=0}^{\infty} e^{-y} \left(\int_{x=0}^{y} dx\right) dy \\
&= \int_{y=0}^{\infty} ye^{-y}dy \\
&= \left[-(y+1)e^{-y}\right]_0^{\infty} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve $k = \frac{1}{1} = 1$.

Remarque

On pouvait aussi commencer à intégrer par rapport à y :

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y} \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbb{1}_{\{x \le y\}}(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbb{1}_{\{x \le y\}}(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=x}^{\infty} e^{-y} dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} dx \\
&= \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} \\
&= 1\,.
\end{aligned}
$$

On obtenait à nouveau $k = \frac{1}{1} = 1$.

Correction du 2

Bien que la première question ne soit pas nécessaire pour résoudre la deuxième (vu que le résultat était donné dans l'énoncé), on peut remarquer que les calculs pour obtenir les deux lois marginales ont été effectués dans la correction précédente.

On calcule comme suit (voir (5) et (6)) :

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y} \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}(x,y)dy \\
&= \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbb{1}_{\{x \le y\}}(x,y)dy \\
&= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbb{1}_{\{x \le y\}}(x,y)dy\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi, si $x < 0$, on a $f_X(x) = 0$. Et, si $x \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{y=x}^{\infty} e^{-y} dy \\
&= \left[-e^{-y} \right]_x^{\infty} \\
&= e^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on obtient

$$
f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,.
$$

On fait de même pour Y.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y)dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\mathbb{1}_{\{x\leq y\}}(x,y)dx \\ &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)e^{-y}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{1}_{\{x\leq y\}}(x,y)dx\,. \end{aligned}$$

Ainsi, si $y < 0$, on a $f_Y(y) = 0$. Et, si $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= e^{-y}\int_{x=0}^{y} dx \\ &= ye^{-y}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$f_Y(y) = ye^{-y}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y)\,.$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, on a

$$f_X(x)f_Y(y) = ye^{-y-x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y) \neq e^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq y\}}(x,y) = f_{X,Y}(x,y)\,.$$

Or, il a été rappelé précédemment que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes. Pour s'en convaincre, on peut prendre $x = y = 0$. Alors, le produit $f_X(0)f_Y(0)$ est nul tandis que $f_{X,Y}(0,0) = 1$.

Remarque sur l'indépendance

On peut aussi obtenir la non-indépendance des variables X et Y en considérant des sous-ensembles (boréliens) bien choisis de $\mathbb{R}$. En effet, la simple lecture de la densité de probabilité conjointe nous donne une information précieuse : $X \leq Y$. Prenons maintenant $S_1 := [2;3]$ et $S_2 := [0;1]$.

Alors, on a immédiatement $\mathbb{P}(X \in S_1, Y \in S_2) = 0$. Pourtant $\mathbb{P}(X \in S_1) = \int_2^3 f_X(x)dx = \int_2^3 e^{-x}dx = e^{-2} - e^{-3} > 0$ et $\mathbb{P}(Y \in S_2) = \int_0^1 f_Y(y)dy = \int_0^1 ye^{-y}dy = 1 - 2e^{-1} > 0$.

On a donc $\mathbb{P}(X \in S_1, Y \in S_2) \neq \mathbb{P}(X \in S_1)\mathbb{P}(Y \in S_2)$ ce qui donne immédiatement la non-indépendance de X et Y.

Correction du 3

On commence par rappeler $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathrm{Var}[X] = 1$ (car X suit une loi exponentielle de paramètre 1 : $\mathcal{E}(1)$). On calcule maintenant l'espérance et la variance de Y :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty y f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy \\
&= \left[-(y^2+2y+2)e^{-y} \right]_0^\infty \\
&= 2\,,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \int_0^\infty y^2 f_Y(y) dy - 4 \\
&= \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy - 4 \\
&= \left[-(y^3+3y^2+6y+6)e^{-y} \right]_0^\infty - 4 \\
&= 2\,.
\end{aligned}
$$

On a donc $\sigma_X = 1$ et $\sigma_Y = \sqrt{2}$.
On calcule maintenant la covariance de X et de Y comme suit :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) :=&\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
=& \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy - 1 \times 2 \\
=& \int_{y=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} xye^{-y} \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}(x,y) dx \right) dy - 2 \\
=& \int_{y=-\infty}^{\infty} ye^{-y} \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} x \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}(x,y) dx \right) dy - 2 \\
=& \int_{y=0}^{\infty} ye^{-y} \left(\int_{x=0}^{y} x dx \right) dy - 2 \\
=& \int_{y=0}^{\infty} ye^{-y} \frac{1}{2} y^2 dy - 2 \\
=& \frac{1}{2} \int_{y=0}^{\infty} y^3 e^{-y} dy - 2 \\
=& \frac{1}{2} \left[-(y^3+3y^2+6y+6)e^{-y} \right]_0^\infty - 2 \\
=& 1\,.
\end{aligned}
$$

On a ainsi $\rho_{X,Y} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit que X et Y sont corrélées linéairement.

Remarque sur la corrélation

On aurait pu traiter la question deux (pour la partie sur l'indépendance) à partir de ce calcul. En effet, comme les variables aléatoires X et Y sont corrélées, on sait déjà qu'elles ne sont pas indépendantes. Néanmoins, ce n'était pas l'esprit de l'exercice de procéder ainsi.

Exercice 63

Énoncé

Soient deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(2)$. On admet que le couple (X, Y) est à densité.

1. Donner la densité de probabilité de X puis celle de Y.

2. Donner la densité de probabilité du couple (X, Y).

3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Correction

Correction du 1)

On a $f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $f_Y(y) = 2e^{-2y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$.

Correction du 2)

Comme X et Y sont indépendantes, on a $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = 2e^{-(x+2y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)$.

Correction du 3)

Par définition de la loi jointe du couple :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq Y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x \geq y} f_{(X,Y)}(x, y)dxdy \\
&= \int_{y=0}^{y=\infty} \left(\int_{x=y}^{x=\infty} e^{-x}dx \right) 2e^{-2y}dy \\
&= \int_{y=0}^{y=\infty} \left(e^{-y} \right) 2e^{-2y}dy \\
&= 2\int_0^{\infty} e^{-3y}dy \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 64

Énoncé

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Déterminer la densité de probabilité de $Z := \frac{X}{Y}$ et en déduire $\mathbb{E}[Z]$.

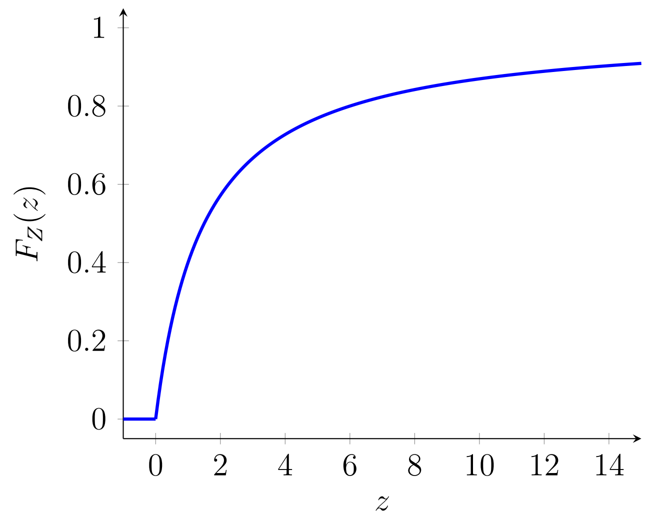
Correction

On regarde la fonction de répartition de Z. D'abord, si $z < 0$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$ vu que $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ presque sûrement. Ainsi, $F_Z(z) = 0$. Soit maintenant $z \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \leq zY\right) \\
&= \int_{y=0}^{\infty} \left(\int_{x=0}^{zy} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx\right) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \\
&= \int_{0}^{\infty} \left(1 - e^{-\lambda_1 z y}\right) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \\
&= \int_{0}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy - \lambda_2 \int_{0}^{\infty} e^{-(z\lambda_1 + \lambda_2) y} dy \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{z\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Ainsi : $F_Z(z) = \left[1 - \frac{\lambda_2}{z\lambda_1 + \lambda_2}\right] \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$ dont voici une représentation graphique avec $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$:

Figure 1 – Fonction de répartition de Z

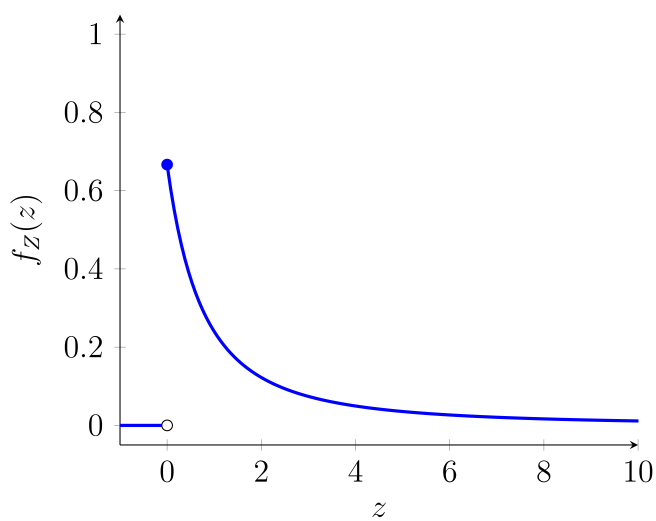


On dérive pour obtenir la densité de probabilité :

$$f_Z(z) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(z\lambda_1 + \lambda_2)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\,.$$

Voici une représentation graphique de f_Z avec $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$:

Figure 2 – Densité de probabilité de Z



Puis, l'on calcule l'espérance comme suit :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_{\mathbb{R}} z f_Z(z) dz \\
&= \lambda_2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda_1 z}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2} dz \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_0^{\infty} \frac{u}{(u + \lambda_2)^2} du \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit que Z n'admet pas de moment d'ordre un.

Remarque

Le quotient de X par Y n'est pas défini pour peu que Y soit égale à 0. Néanmoins, la probabilité d'un tel élèvement étant négligeable, on trouve que la variable aléatoire Z est définie presque sûrement.

On pourrait aussi définir Z de la façon suivante. Si $\omega \in \Omega$ est tel que $Y(\omega) = 0$, on pose $Z(\omega) := 0$ et si $Y(\omega) > 0$, alors $Z(\omega) := \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}$.

Exercice 65

Énoncé

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{U}_{[1;2]}$. Déterminer $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right]$.

Correction

On calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) &= \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=2} \frac{x}{y} dy dx \\
&= \left(\int_1^2 x dx\right) \times \left(\int_1^2 \frac{dy}{y}\right) \\
&= \frac{3\log(2)}{2} .
\end{aligned}$$

Exercice 66

Énoncé

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T := X - Y$ et $Z := \min(X, Y)$.

1. Rappeler la densité de probabilité de $f_X = f_Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition de Z et en déduire sa densité de probabilité.

3. Déterminer la densité de probabilité de $-Y$.

4. Calculer la densité de probabilité de T.

5. Donner la fonction de répartition de T.

On pose $W := (T, Z)$ et on note F_W sa fonction de répartition.

6. Établir, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_+^2$, la formule suivante :

$$F_W(t, z) = \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy + \int_z^{+\infty} \left(\int_0^z f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \,.$$

7. En déduire, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_+^2$, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de t et de z.

8. Établir, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, la formule suivante :

$$F_W(t, z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_{x-t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \right) dx \,.$$

9. En déduire, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, l'expression explicite de $F_W(t, z)$ en fonction de t et de z.

10. Montrer que Z et T sont indépendantes.

Correction

Correction du 1)

On a $f_X(x) = f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Correction du 2)

Par définition :

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z > z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min(X, Y) > z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) \\
&= 1 - e^{-2\lambda z} \,,
\end{aligned}$$

si $z \geq 0$ et $F_Z(z) = 0$ si $z \leq 0$. Il suffit ensuite de dériver pour obtenir $f_Z(z) = 2\lambda e^{-2\lambda z} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$.

Correction du 3)

Pour trouver la densité de probabilité de $-Y$, on utilise la technique habituelle avec la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}
F_{-Y}(x) &= \mathbb{P}(-Y \leq x) \\
&= \mathbb{P}(Y \geq -x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \leq -x) \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda(-x)})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(-x) \\
&= 1 - (1 - e^{\lambda x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

On dérive et il vient $f_{-Y}(x) = \lambda e^{\lambda x}\mathbb{1}_{]-\infty;0]}(x)$.

Correction du 4)

On a $T = X - Y$ donc $T = X + (-Y)$ ainsi la densité de T s'obtient en prenant le produit de convolution de f_X avec f_{-Y} :

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \left(f_X * f_{-Y}\right)(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_X(t-s) f_{-Y}(s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(t-s)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t-s)\lambda e^{\lambda s}\mathbb{1}_{]-\infty;0]}(s) ds \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_{s=-\infty}^{s=\min(0;t)} e^{2\lambda s} ds\,.
\end{aligned}$$

Si $t \leq 0$, on a donc $f_T(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_{s=-\infty}^{s=t} e^{2\lambda s} ds = \frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}$. Et, si $t \geq 0$, on a alors $f_T(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_{s=-\infty}^{s=0} e^{2\lambda s} ds = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t}$. De manière générale, on a

$$f_T(t) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}\,.$$

Correction du 5)

On intègre f_T de $-\infty$ à t et l'on trouve :

$$F_T(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}e^{\lambda t} & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}e^{-\lambda|t|} & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda|t|} & \text{si } t \geq 0 \end{array} \right. .$$

Correction du 6)

Par définition, si $t, z \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
F_W(t,z) &= \mathbb{P}(T \leq t, Z \leq z) \\
&= \mathbb{P}(T \leq t, Z \leq z, Z = X) + \mathbb{P}(T \leq t, Z \leq z, Z = Y) \\
&= \mathbb{P}(X - Y \leq t, X \leq z, Z = X) + \mathbb{P}(X - Y \leq t, Y \leq z, Z = Y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq Y + t, X \leq z, X \leq Y) + \mathbb{P}(X \leq Y + t, Y \leq z, Y \leq X) \\
&= \mathbb{P}(X \leq z, X \leq Y) + \mathbb{P}(Y \leq X \leq Y + t, Y \leq z)\,.
\end{aligned}$$

Regardons le premier terme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq z, X \leq Y) &= \int_0^\infty \left(\int_0^{\min(y,z)} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \\
&= \int_0^z \left(\int_0^{\min(y,z)} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy + \int_z^\infty \left(\int_0^{\min(y,z)} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \\
&= \int_0^z \int_0^y f_X(x)dx f_Y(y)dy + \int_z^\infty \left(\int_0^z f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy\,.
\end{aligned}$$

Regardons maintenant le second terme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq X \leq Y + t, Y \leq z) &= \int_0^z \left(\int_y^{y+t} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \\
&= \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy - \int_0^z \left(\int_0^y f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy \\
&= \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy - \int_0^z \int_0^y f_X(x)dx f_Y(y)dy\,.
\end{aligned}$$

En sommant les deux termes, on trouve bien

$$F_W(t,z) = \int_z^\infty \left(\int_0^z f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy + \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)dx \right) f_Y(y)dy\,.$$

Correction du 7)

On peut alors calculer en remplaçant f_X et f_Y par leurs expressions :

$$
\begin{aligned}
F_W(t,z) &= \int_0^z \left(\int_0^{y+t} f_X(x)dx\right) f_Y(y)dy + \int_z^\infty \left(\int_0^z f_X(x)dx\right) f_Y(y)dy \\
&= \lambda^2 \int_0^z \left(\int_0^{y+t} e^{-\lambda x}dx\right) e^{-\lambda y}dy + \lambda^2 \int_z^\infty \left(\int_0^z e^{-\lambda x}dx\right) e^{-\lambda y}dy \\
&= \lambda \left\{\int_0^z \left(1-e^{-\lambda(y+t)}\right) e^{-\lambda y}dy + \int_z^\infty \left(1-e^{-\lambda z}\right) e^{-\lambda y}dy\right\} \\
&= \lambda \int_0^z e^{-\lambda y}dy - \lambda e^{-\lambda t}\int_0^z e^{-2\lambda y}dy + e^{-\lambda z}\left(1-e^{-\lambda z}\right) \\
&= 1-e^{-\lambda z} - e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda z}\right) + e^{-\lambda z}\left(1-e^{-\lambda z}\right) \\
&= \left(1-e^{-2\lambda z}\right)\left(1-\frac{e^{-\lambda t}}{2}\right) .
\end{aligned}
$$

On remarque donc que pour $t, z \geq 0$, on a $F_W(t,z) = F_T(t)F_Z(z)$.

Correction du 8)

Ici, on suppose $t \leq 0$ et toujours $z \geq 0$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
F_W(t,z) &= \mathbb{P}(T \leq t, Z \leq z) \\
&= \mathbb{P}(T \leq t, Z \leq z, Z = X) + \mathbb{P}(T \leq t, Z \leq z, Z = Y) \\
&= \mathbb{P}(X - Y \leq t, X \leq z, Z = X) + \underbrace{\mathbb{P}(X - Y \leq t, Y \leq z, Z = Y)}_{=\mathbb{P}(X<Y, X\leq z, Y \leq X)=0} \\
&= \mathbb{P}(X \leq Y + t, X \leq z) \\
&= \int_{x=0}^z \left(\int_{y=x-t}^\infty f_Y(y)\right) f_X(x)dx \\
&= \int_0^z \int_{x-t}^\infty \lambda e^{-\lambda y}dy \lambda e^{-\lambda x}dx \,,
\end{aligned}
$$

ce qui est l'expression demandée.

Correction du 9)

On calcule et on obtient :

$$
F_W(t,z) = \int_0^z e^{-\lambda(x-t)}\lambda e^{-\lambda x}dx = e^{\lambda t}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda z}\right) .
$$

Correction du 10)

À nouveau, pour $t \leq 0$ et $z \geq 0$, on a $F_W(t,z) = F_T(t)F_Z(z)$. Il s'ensuit que l'on a $F_{(T,Z)}(t,z) = F_T(t)F_Z(z)$ pour tout $t, z \in \mathbb{R}$. Par conséquent, Z et T sont bien indépendantes.

Exercice 67 (*)

Énoncé

Soit l'espace fondamental $\Omega := \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. On munit cet espace de l'équiprobabilité que l'on note $\mathbb{P}$. On se donne les deux variables aléatoires X et Y définies par

$$X(\omega) = \omega_1 \quad \text{et} \quad Y(\omega) = \omega_2\,,$$

pour tout élément de l'espace fondamental $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. On remarque $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

1) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

2) Déterminer la loi de probabilité de $Z := X + Y$ ainsi que la fonction de répartition de Z.

3) Même question pour la variable aléatoire $T := XY$.

4) Calculer l'espérance et la variance des deux variables aléatoires Z et T.

Correction

Correction du 1)

Deux variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x, y, on a

$$\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right) = \mathbb{P}\left(X = x\right)\mathbb{P}\left(Y = y\right)\,.$$

Or, ici, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ donc pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a

$$\mathbb{P}\left(X = x\right)\mathbb{P}\left(Y = y\right) = \frac{1}{4}\,.$$

Comme Ω est muni de l'équiprobabilité, on a aussi

$$\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \ : \ X(\omega) = x\,, Y(\omega) = y\}\right) = \mathbb{P}\left(\{(x,y)\}\right) = \frac{1}{4}\,.$$

Les variables X et Y sont donc bien indépendantes.

Correction du 2) et du 3) simultanément

On utilise un tableau

ω	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$X(\omega)$	0	0	1	1
$Y(\omega)$	0	1	0	1
$Z(\omega) := X(\omega) + Y(\omega)$	0	1	1	2
$T(\omega) := X(\omega) \times Y(\omega)$	0	0	0	1

Ainsi, la loi de la variable aléatoire Z est $\mathbb{P}_Z = \frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2$. On reconnait d'ailleurs la loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$. Sa fonction de répartition est donc

$$F_Z(z) := \mathbb{P}(Z \leq z) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0;1[}(z) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[1;2[}(z) + \mathbb{1}_{[2;+\infty[}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq z < 2 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases}.$$

Et, la loi de T est $\mathbb{P}_T = \frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_1$. On reconnait d'ailleurs la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$. Sa fonction de répartition est donc

$$F_T(t) := \mathbb{P}(T \leq t) = \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[0;1[}(t) + \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Correction du 4)

On connait l'espérance et la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p où ici $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$. Donc $\mathbb{E}[Z] = np = 1$ et $\text{Var}[Z] = np(1-p) = \frac{1}{2}$.

De même, on connait l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p où ici $p = \frac{1}{4}$. Donc $\mathbb{E}[T] = p = \frac{1}{4}$ et $\text{Var}[T] = p(1-p) = \frac{3}{16}$.

Exercice 68 (*)

Énoncé

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on connaît la fonction densité conjointe $f_{X,Y}$. On cherche à déterminer la distribution $f_{R,\Theta}$ en coordonnées polaires.

1) Rappeler les expressions de x et de y en fonction de r et de θ.

2) Donner l'expression de la densité de probabilité conjointe $f_{R,\Theta}$ et de ses marginales f_R et f_Θ.

3) Que deviennent ces expressions dans le cas d'une distribution à symétrie circulaire ? En particulier, comment l'angle Θ est-il distribué ? Donner l'expression de f_Θ et f_R.

4) Dans le cas d'une distribution normale à symétrie circulaire, donner la marginale f_R.

5) Toujours dans le cas d'une distribution normale à symétrie circulaire, quelle est la probabilité pour qu'un point (x, y) choisi au hasard soit tel que $\sqrt{x^2 + y^2} < \mathbb{E}(R)$?

Correction

Correction du 1)

On a : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

Correction du 2)

On va appliquer la formule du changement de variable. Pour ça, on a besoin de connaître le Jacobien des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. On sait que l'on a $dxdy = rdrd\theta$. On a donc

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = rf_{X,Y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(r)\mathbb{1}_{]-\pi;\pi]}(\theta)\,.$$

Et, les densités marginales sont ainsi

$$f_R(r) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(r)\int_{-\pi}^{\pi} rf_{X,Y}\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)d\theta$$

et

$$f_\Theta(\theta) = \mathbb{1}_{]-\pi;\pi]}(\theta)\int_0^\infty rf_{X,Y}\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)dr\,.$$

Correction du 3)

Dans ce cas, la variable Θ est uniformément distribuée : $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi;\pi](\theta)}$.
De plus, à r fixé, la densité conjointe ne varie pas en fonction de θ. On a donc

$$f_{X,Y}(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = g(r)\,,$$

où g est une fonction positive. Il vient ainsi :

$$f_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} rg(r)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(r)d\theta = 2\pi rg(r)\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(r)\,.$$

Mais aussi :

$$f_\Theta(\theta) = \mathbb{1}_{[-\pi;\pi[}(\theta) \int_0^\infty rg(r)dr\,.$$

Or, $\int_0^\infty rg(r)dr$ est une constante. Ainsi, pour que l'intégrale de f_Θ sur $\mathbb{R}$ soit égale à 1, on obtient $\int_0^\infty rg(r)dr = \frac{1}{2\pi}$ d'où

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi;\pi[}(\theta)\,.$$

Correction du 4)

On a ici :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,.$$

d'où $g(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ si bien que l'on a

$$f_R(r) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(r)\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Correction du 5)

On calcule d'abord l'espérance de R :

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty r\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr\,.$$

On procède à une intégration par parties et il vient $\mathbb{E}(R) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Puis, on a

$$\mathbb{P}\left(R \leq \mathbb{E}(R)\right) = \int_0^{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0.544\,.$$

Exercice 69 (*)

Énoncé

Soit la fonction densité $f_{X,Y}$ définie par

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}},$$

où $\rho \in]-1;1[$.

1) Déterminer les densités marginales des variables aléatoires X et Y.

2) En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

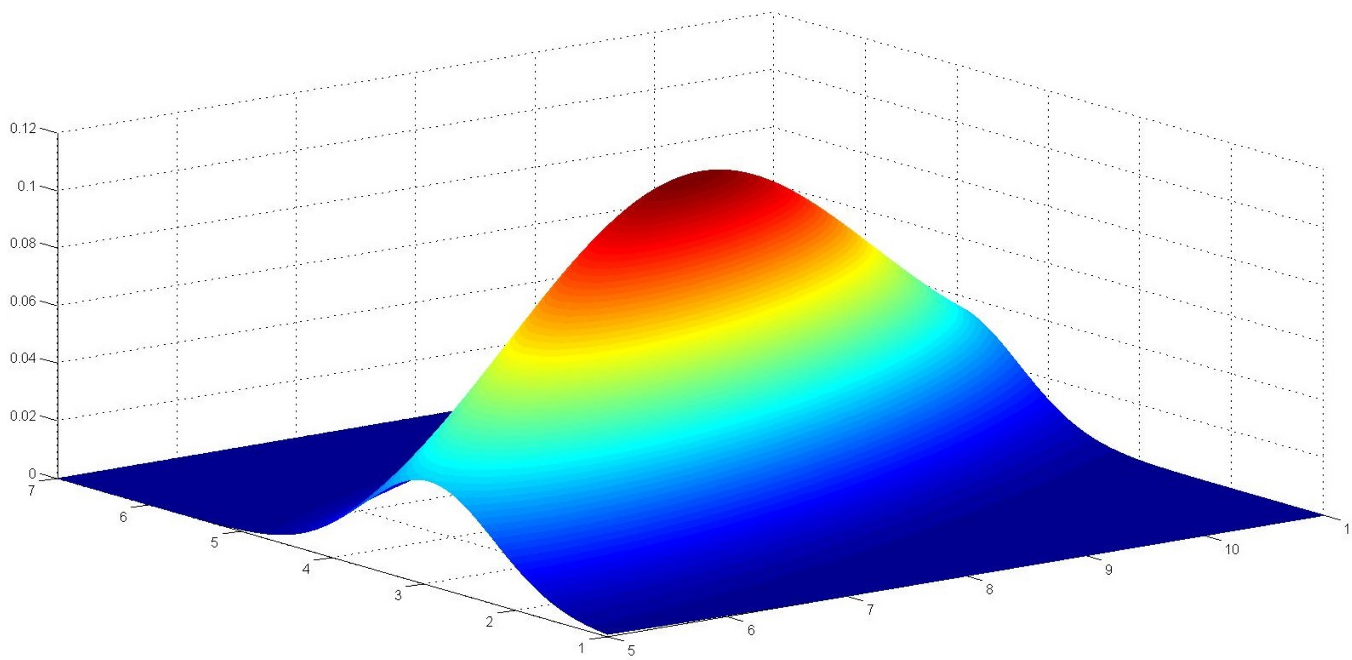
3) Déterminer l'expression de la densité conditionnelle $f_Y(y|X=x)$.

4) Déterminer $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[Y^2]$ en posant $\mathbb{E}[X]=0$ et $\mathbb{E}[Y]=0$.

5) Déterminer $\mathbb{E}[XY]$ en posant $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]=0$ et $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{E}[Y^2]=1$.

Représentation graphique

Voici une représentation graphique de $f_{X,Y}$ avec $m_X = 8$, $m_Y = 4$, $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 1$ et $\rho = 0.7$:



Correction

Correction du 1)

On a par définition

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx\,.$$

Posons $C := 2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$ et $\xi(x,y) := \frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}$. On a donc

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{\xi(x,y)}{2(1-\rho^2)}\right\}}{C}\,.$$

On remarque

$$\xi(x,y) = \left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - \rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2 + (1-\rho^2)\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{C}\int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left[(1-\rho^2)\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - \rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2\right]}{2(1-\rho^2)}\right\}dy \\ &= \frac{1}{C}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}\int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{y-h(x)}{\sigma_Y}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dy\,, \end{aligned}$$

où $h(x) := m_Y + \sigma_Y\rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}$. On procède au changement de variable $y := z + h(x)$ et l'on aboutit à

$$f_X(x) = \frac{1}{C}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}\underbrace{\int_{z=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)\sigma_Y^2}\right\}dz}_{=\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho^2)}}\,.$$

Or, $C = \sqrt{2\pi\sigma_X^2}\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho^2)}$. Il vient

$$f_X(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\,.$$

De même, on a

$$f_Y(y) = \frac{\exp\left\{-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\,.$$

Correction du 2)

Comme X suit la loi $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et comme Y suit la loi $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$, on a immédiatement $\mathbb{E}[X] = m_X$ et $\mathbb{E}[Y] = m_Y$.

Correction du 3)

Par définition, $f_Y(y|X=x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$. On a donc

$$f_Y(y|X=x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - \rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}.$$

Correction du 4)

D'après la question 1, on en déduit immédiatement $\mathbb{E}[X^2] = \sigma_X^2$ et $\mathbb{E}[Y^2] = \sigma_Y^2$.

Correction du 5)

Ici, on a

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{xy}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dy\right) dx\,.
\end{aligned}$$

Puis, on procède au changement de variable $y := z + \rho x$. On en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dy \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{z}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dz}_{=0} + \rho x \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dz}_{=1}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \rho \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx}_{=\mathbb{E}[X^2]=1} \\
&= \rho\,.
\end{aligned}$$

Remarque

En dimension $d \geq 2$, une loi normale d'espérance $m \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance $K \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ a pour densité de probabilité :

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{|K|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}-m\right)^T K^{-1}(\vec{x}-m)\right\}.$$

Ici, $|K|$ désigne le déterminant de la matrice de covariance K. Dans le cadre de l'exercice, on a

$$K = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $|K| = \sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2) > 0$. Et, l'inverse de K est :

$$K^{-1} = \frac{1}{\sigma_X^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\rho\sigma_X\sigma_Y \\ -\rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en dimension 2, la quantité dans l'exponentielle est :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\vec{x}-m\right)^T K^{-1}(\vec{x}-m) &= \begin{pmatrix} x-m_X & y-m_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-m_X \\ y-m_Y \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right], \end{aligned}$$

et l'on retrouve bien l'expression dans l'énoncé.