Correction des Travaux dirigés de Probabilités et Statistiques - Fonctions caractéristiques

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 55

Énoncé

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles telles que X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Z suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. *Calculer l'espérance et la variance de X en utilisant sa fonction caractéristique.*

2. *Calculer l'espérance et la variance de Y en utilisant sa fonction caractéristique.*

3. *Calculer l'espérance et la variance de Z en utilisant sa fonction caractéristique.*

Rappels

On rappelle que l'on a
$$\varphi_X(t) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$$
ainsi que
$$\varphi_Y(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right] .$$

Enfin :
$$\varphi_Z(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} .$$

Remarque

On pourrait calculer l'espérance ainsi que la variance de X, de Y et de Z sans passer par les fonctions caractéristiques.

Correction

Correction du 1)

On sait que l'on a
$$\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}[X] .$$
Donc, $\mathbb{E}[X] = -i\varphi'_X(0)$. Or le calcul nous donne
$$\varphi'_X(t) = nipe^{it}\left(pe^{it} + 1 - p\right)^{n-1} .$$
D'où $\varphi'_X(0) = nip$. Il vient $\mathbb{E}[X] = np$.
De même, on a
$$\varphi''_X(0) = -\mathbb{E}[X^2] .$$
Donc, $\mathbb{E}[X^2] = -\varphi''_X(0)$. Or le calcul nous donne
$$\varphi''_X(t) = -n(n-1)p^2e^{2it}\left(pe^{it} + 1 - p\right)^{n-2} - npe^{it}\left(pe^{it} + 1 - p\right)^{n-1} .$$
D'où $\varphi''_X(0) = -np((n-1)p+1)$. Il vient $\mathbb{E}[X^2] = np((n-1)p+1)$. Puis, il s'ensuit
$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = np((n-1)p+1) - n^2p^2 = np(1-p) .$$

Correction du 2)

On procède de même avec la loi de Poisson de paramètre λ.

On sait que l'on a

$$\varphi'_Y(0) = i\mathbb{E}[Y]\,.$$

Donc, $\mathbb{E}[Y] = -i\varphi'_Y(0)$. Or le calcul nous donne

$$\varphi'_Y(t) = i\lambda e^{it} \exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]\,.$$

D'où $\varphi'_Y(0) = i\lambda$. Il vient $\mathbb{E}[Y] = \lambda$.

De même, on a

$$\varphi''_Y(0) = -\mathbb{E}[Y^2]\,.$$

Donc, $\mathbb{E}[Y^2] = -\varphi''_Y(0)$. Or le calcul nous donne

$$\varphi''_Y(t) = -\lambda^2 e^{2it} \exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right] - \lambda e^{it} \exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right]\,.$$

D'où $\varphi''_Y(0) = -\lambda^2 - \lambda$. Il vient $\mathbb{E}[Y^2] = \lambda^2 + \lambda$. Puis, il s'ensuit

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\,.$$

Correction du 3)

On procède de même avec la loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que l'on a

$$\varphi'_Z(0) = i\mathbb{E}[Z]\,.$$

Donc, $\mathbb{E}[Z] = -i\varphi'_Z(0)$. Or le calcul nous donne

$$\varphi'_Z(t) = \frac{\lambda i}{(\lambda - it)^2}\,.$$

D'où $\varphi'_Z(0) = \frac{i}{\lambda}$. Il vient $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\lambda}$.

De même, on a

$$\varphi''_Z(0) = -\mathbb{E}[Z^2]\,.$$

Donc, $\mathbb{E}[Z^2] = -\varphi''_Z(0)$. Or le calcul nous donne

$$\varphi''_Z(t) = -\frac{2\lambda}{(\lambda - it)^3}\,.$$

D'où $\varphi''_Z(0) = -\frac{2}{\lambda^2}$. Il vient $\mathbb{E}[Z^2] = \frac{2}{\lambda^2}$. Puis, il s'ensuit

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Exercice 56

Énoncé

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit ϵ une variable aléatoire de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. On suppose que X et ϵ sont indépendantes. On pose $Y := \epsilon X$. On dit que Y suit la loi de Laplace.

1. Montrer que la loi de Laplace est une loi à densité.

2. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Laplace.

Correction

Correction du 1)

Pour ce faire, on regarde la fonction de répartition de Y :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\epsilon X \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\epsilon X \leq y, \epsilon = 1\right) + \mathbb{P}\left(\epsilon X \leq y, \epsilon = -1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq y, \epsilon = 1\right) + \mathbb{P}\left(X \geq -y, \epsilon = -1\right) . \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'indépendance puis la loi de ϵ :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq -y) \\ &= \frac{1}{2}\left(F_X(y) + 1 - F_X(-y)\right) . \end{aligned}$$

Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable presque partout (vu que X est à densité), on en déduit qu'il en est de même pour F_Y. De plus, $f_Y(y) = \frac{1}{2}\left(f_X(y) + f_X(-y)\right) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$.

Correction du 2)

On calcule comme suit :

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{itY}] \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} e^{-|y|} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ity} e^{y} dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{ity} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{it+1}(1-0) + \frac{1}{it-1}(0-1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{it+1} + \frac{1}{1-it}\right] \\
&= \frac{1}{1+t^2}\,.
\end{aligned}
$$

Remarque 1

Dans la première question, on peut noter une “erreur” concernant la densité de probabilité de Y. En effet, en 0, la valeur est 1 et non pas $\frac{1}{2}$. Néanmoins, comme on ne manipule pas des fonctions mais des classes d'équivalence de fonctions, il n'y a pas d'erreur.

Remarque 2

Comme la densité de probabilité est paire, sa transformée de Fourier (modulo le signe et le 2π) est une fonction à valeurs réelles et paire. Ceci est très important au second semestre dans les cours “Signaux et Systèmes discrets” ainsi que “Signaux aléatoires”.

Remarque 3

On note que la transformée de Fourier de la loi de Laplace est une loi de Cauchy (modulo une constante) et donc la transformée de Fourier de la loi de Cauchy est une loi de Laplace (modulo une constante).

Remarque 4

On peut calculer la fonction caractéristique de Y sans passer par sa densité de probabilité :

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{itY}] \\
&= \mathbb{E}[e^{it\epsilon X}] \\
&= \mathbb{E}[e^{it\epsilon X}\mathbb{1}_{\{\epsilon=-1\}}] + \mathbb{E}[e^{it\epsilon X}\mathbb{1}_{\{\epsilon=1\}}] \\
&= \mathbb{E}[e^{-itX}\mathbb{1}_{\{\epsilon=-1\}}] + \mathbb{E}[e^{itX}\mathbb{1}_{\{\epsilon=1\}}] \\
&= \mathbb{E}[e^{-itX}]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\epsilon=-1\}}] + \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\epsilon=1\}}] \\
&= \mathbb{E}[e^{-itX}]\mathbb{P}(\epsilon=-1) + \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{P}(\epsilon=1) \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi_X(-t) + \varphi_X(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-i(-t)} + \frac{1}{1-it}\right] \\
&= \frac{1}{1+t^2}\,.
\end{aligned}
$$

On pouvait d'ailleurs en déduire directement que la variable aléatoire Y est à densité. En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ étant intégrable, il vient que Y est à densité et que sa densité est

$$
f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi_Y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ity}}{1+t^2}dt\,.
$$

Pour calculer, on fait ensuite appel à de l'analyse complexe...

Exercice 57

Énoncé

Donner un exemple de variable aléatoire X telle que $\varphi_{2X} = (\varphi_X)^2$. En déduire que la propriété $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y.

Correction

On pose $f(x) := e^{-|x|}$. On calcule maintenant $\hat{f}(u)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} e^{-|x|} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(iu-1)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(iu+1)x} dx \\
&= \frac{1}{1-iu} + \frac{1}{iu+1} \\
&= \frac{2}{1+u^2} \,.
\end{aligned}$$

D'après la formule d'inversion (que l'on peut appliquer vu que $u \mapsto \frac{2}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$), on en déduit, pour presque tout x :

$$e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-ixt} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{ixt} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt = \varphi_X(x) \,,$$

où X suit la loi de Cauchy de densité $f_X(t) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$.

Or, $\varphi_{2X}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i2Xt}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iX2t}\right] = \varphi_X(2t) = e^{-|2t|} = \varphi_X(t)^2$. On a bien $\varphi_X(t)\varphi_X(t) = \varphi_{X+X}(t)$ bien que X ne soit pas indépendante d'elle-même (car ce n'est pas une constante).

Remarque 1

Pour l'indépendance de X et Y, il ne suffit pas d'avoir $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ comme nous venons de le démontrer. Il faut en fait avoir $\varphi_{X+\alpha Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(\alpha t)$ pour tous les réels t et α.

Remarque 2

Comment pouvait-on deviner qu'il fallait partir de $e^{-|x|}$? Nous allons tenter de donner une idée intuitive. Soit f la fonction qui à t associe $\varphi_X(t)$. On a immédiatement, comme remarqué plus haut : $f(2t) = f(t)^2$.

On suppose que la densité de probabilité de X est paire (comme toutes les lois les plus simples). Alors, la fonction f est à valeurs réelles et elle est paire. Supposons de plus qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dérive et on obtient $2f'(2t) = 2f'(t)f(t)$ d'où $f'(2t) = f'(t)f(t)$. En particulier, on a bien $f'(0) = f(0)f'(0)$ ce qui est vrai puisque $f(0) = 1$.

On dérive à nouveau et il vient : $2f''(2t) = f''(t)f(t)+f'(t)^2$ d'où $f''(0) = f'(0)^2$. Montrons par récurrence que l'on a $f^{(n)}(0) = f'(0)^n$. La propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2. Supposons la vraie aux rangs $0 \leq k \leq n$ pour $n \geq 2$. Alors, on a, en dérivant $n + 1$ fois l'équation $f(2t) = f(t)^2$:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} f^{(n+1)}(0) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(0) f^{(n+1-k)}(0) \\
&= \binom{n+1}{0} f(0) f^{(n+1)}(0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \left(f'(0)\right)^k \left(f'(0)\right)^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(0) f(0) \\
&= 2f^{(n+1)}(0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \left(f'(0)\right)^{n+1} \\
&= 2f^{(n+1)}(0) + \left(f'(0)\right)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n+1} \right) \\
&= 2f^{(n+1)}(0) + \left(f'(0)\right)^{n+1} \left(2^{n+1} - 2\right) .
\end{aligned}$$

On en déduit $\left(2^{n+1} - 2\right) f^{(n+1)}(0) = \left(2^{n+1} - 2\right) \left(f'(0)\right)^{n+1}$. Comme $n \geq 2$, il s'ensuit $f^{(n+1)}(0) = \left(f'(0)\right)^{n+1}$.

On conclut donc par : $f^{(n)}(0) = f'(0)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin, en supposant que la fonction f soit développable en série entière, on aboutit à

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(0)^n}{n!} x^n \\
&= e^{f'(0)x} .
\end{aligned}$$

On remarque que cette fonction satisfait bien l'hypothèse. Néanmoins, elle n'est pas paire.

On doit donc la modifier un peu et une fonction qui ressemble est $e^{-\lambda|x|}$ avec $\lambda > 0$ (il faut que le module de $f(x)$ soit inférieur ou égal à 1. On reconnait là la loi de Laplace (à une constante multiplicative près). Ainsi, il fallait chercher du côté de X telle que $\varphi_X(t) = e^{-\lambda|t|}$.

Remarque 3

Il convient de noter qu'il n'y a pas grand-chose de rigoureux dans la remarque 2 mais elle correspond au cheminement de pensée à effectuer sur le brouillon.

Remarque 4

Ici, $\mathbb{E}[e^{2itX}] = \mathbb{E}[e^{itX}]^2$. On pourrait alors être tenté de dire que $\mathrm{Var}\left(e^{itX}\right) = 0$ d'où e^{itX} est une constante. Ce serait une erreur. En effet, avec les variables aléatoires complexes, la variance (qui est toujours une forme quadratique positive) est définie ainsi : $\mathrm{Var}(Z) := \mathbb{E}[|Z|^2] - |\mathbb{E}[Z]|^2$.

Remarque 5

On dit que X est une variable aléatoire constante si et seulement si elle est indépendante d'elle-même. Prouvons-le. Si X est indépendante d'elle-même, alors $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X) = 0$. Ensuite, on se donne $\delta > 0$. Alors, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \delta) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\delta^2} = 0$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, il vient $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \in [\mathbb{E}(X) - \frac{1}{n}; \mathbb{E}(X) + \frac{1}{n}]) = \liminf_{n\to\infty} \Big(1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \frac{1}{n})\Big) = 1$.

Supposons maintenant que $X = a$ presque sûrement où a est un réel. Soient deux domaines raisonnables (boréliens) $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ de $\mathbb{R}$. Alors $\mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1 \bigcap \mathcal{I}_2) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \;:\; a \in \mathcal{I}_1 \bigcap \mathcal{I}_2\}$. Soit $a \in \mathcal{I}_1 \bigcap \mathcal{I}_2$ auquel cas la probabilité vaut 1. Soit $a \notin \mathcal{I}_1 \bigcap \mathcal{I}_2$ et alors la probabilité vaut 0. Si la probabilité vaut 1, cela signifie que $a \in \mathcal{I}_1$ et $a \in \mathcal{I}_2$ d'où $\mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_2) = 1$ donc on a bien $1 = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) \times \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_2) = 1^2 = 1$.

Au contraire, si $a \notin \mathcal{I}_\infty$, alors $\mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) = 0$ d'où $\mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1 \bigcap \mathcal{I}_2) = 0 = 0 \times \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_2) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) \times \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_2)$. De même, si $a \notin \mathcal{I}_2$, alors $\mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1 \bigcap \mathcal{I}_2) = 0 = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) \times 0 = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) \times \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_2)$.

Dans tous les cas, on a $\mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_1) \times \mathbb{P}(X \in \mathcal{I}_2)$ ce qui prouve que la variable aléatoire X est indépendante d'elle-même.

Exercice 58

Énoncé

Soit X qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

Correction

Si X suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Cette fonction étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que X admet des moments de tout ordre. De plus : $\mathbb{E}[X^r] = \frac{1}{i^r}\varphi_X^{(r)}(0)$.

Or, on peut effectuer le développement en série entière de φ_X :

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} t^{2n} .$$

Par unicité du développement en série entière, on identifie avec le développement en série entière de Taylor :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} t^{2n} &= \varphi_X(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \mathbb{E}[X^{2n}]}{(2n)!} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \mathbb{E}[X^{2n+1}]}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbb{E}[X^{2n}]}{(2n)!} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \mathbb{E}[X^{2n+1}]}{(2n+1)!} t^{2n+1} .
\end{aligned}$$

Par identification, il s'ensuit : $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce que l'on savait déjà car la fonction $x \mapsto x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire).

Et : $\frac{(-1)^n \mathbb{E}[X^{2n}]}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n!2^n}$ si bien que l'on a $\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

Remarque

La présence des factorielles et de l'exponentielle nous faisait penser à utiliser les séries entières.

Exercice 59 (*)

Énoncé

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Notons φ la fonction caractéristique de X_0. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Nous supposons que les variables Y et X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendantes. Posons

$$Z := \sum_{n=1}^{Y} X_n \,,$$

avec pour convention $\sum_{n=1}^{0} X_n = 0$.

1. *Déterminer la fonction caractéristique de Z.*

2. *Supposons que X_0 admet des moments de tout ordre.*

(a) *Soit $p \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire Z admet-elle un moment d'ordre p ?*

(b) *Déterminer, si elle existe, la variance de Z.*

Remarque

On peut calculer la variance de Z sans passer par la fonction caractéristique mais les calculs sont beaucoup plus simples en l'utilisant.

Il convient de noter que les variables aléatoires X_n ne sont pas forcément à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, on ne pouvait pas utiliser les fonctions génératrices.

Correction

Correction du 1)

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition, on a

$$\varphi_Z(t) := \mathbb{E}\left\{\exp\left(itZ\right)\right\} \,.$$

Puis, l'on remarque

$$\exp\left(itZ\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \exp\left(it\sum_{n=1}^{p} X_n\right) \mathbb{1}_{Y=p} \,.$$

Ainsi, il vient, après application de Fubini :

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}\left\{\exp\left(it\sum_{n=1}^{p} X_n\right) \mathbb{1}_{Y=p}\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{Y=0}\right\} + \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{p} \mathbb{E}\left\{\exp\left(itX_n\right)\right\} \mathbb{E}\left\{\mathbb{1}_{Y=p}\right\}
\end{aligned}$$

car les variables aléatoires réelles X_n et Y sont indépendantes et que $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. Puis, comme X_n a même loi que X_0, il s'ensuit

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}\left(Y = 0\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi(t)^p \mathbb{P}\left(Y = p\right) \,.$$

On peut alors écrire

$$\varphi_Z(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} e^{-\lambda} \varphi(t)^p = \exp\left\{\lambda\left(\varphi(t) - 1\right)\right\} .$$

Correction du 2)(a)

Comme la variable aléatoire X_0 admet des moments de tout ordre, on en déduit que φ est indéfiniment dérivable. Puis, la fonction $t \mapsto \exp\left\{\lambda\left(\varphi(t) - 1\right)\right\}$ est aussi indéfiniment dérivable d'où la variable aléatoire Z admet des moments de tout ordre.

Correction du 2)(b)

On a $\mathbb{E}[Z] = -i\varphi_Z'(0)$ et $\mathbb{E}[Z^2] = -\varphi_Z''(0)$. Le calcul nous donne

$$\varphi_Z'(t) = \lambda\varphi'(t) \exp\left\{\lambda\left(\varphi(t) - 1\right)\right\} .$$

On en déduit $\mathbb{E}[Z] = -i\lambda\varphi'(0) = \lambda\mathbb{E}[X_0]$.
On dérive à nouveau :

$$\varphi_Z''(t) = \lambda\varphi''(t) \exp\left\{\lambda\left(\varphi(t) - 1\right)\right\} + \lambda^2\varphi'(t)^2 \exp\left\{\lambda\left(\varphi(t) - 1\right)\right\} .$$

Conséquemment, $\mathbb{E}[Z^2] = -\lambda\varphi''(0) - \lambda^2\varphi'(0)^2 = \lambda\mathbb{E}[X_0^2] + \lambda^2\mathbb{E}[X_0]^2$. Il vient $\mathrm{Var}[Z] = \lambda\mathbb{E}[X_0^2]$.

Exercice 60 (*)

Énoncé

Soit un évènement aléatoire H_0. On appelle H_1 son complémentaire. Soit maintenant une variable aléatoire X continue qui dépend de H_0 de la façon suivante :

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{I} \mid H_0\right) = \int_{\mathcal{I}} p_0(x)dx\,,$$

et

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{I} \mid H_1\right) = \int_{\mathcal{I}} p_1(x)dx\,,$$

où p_0 et p_1 sont deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}$ et où $\mathcal{I}$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On introduit le rapport de vraisemblance comme suit : $L(x) := \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note maintenant la variable aléatoire $Y := L(X) = \frac{p_1(X)}{p_0(X)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mu_k := \mathbb{E}\left[Y^k \mid H_0\right]$ et $\nu_k := \mathbb{E}\left[Y^k \mid H_1\right]$.

1. *Établir une relation entre la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la suite $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Calculer ν_0.*
2. *Soit φ (respectivement ψ) la fonction caractéristique de Y conditionnellement à H_0 (respectivement à H_1). Trouver une relation entre φ et ψ.*
3. *En déduire une relation entre q_0, la densité de probabilité de Y conditionnellement à H_0, et q_1, la densité de probabilité de Y conditionnellement à H_1.*

Correction

Correction du 1)

Par définition, on a

$$\mu_k := \mathbb{E}\left[Y^k \mid H_0\right] = \mathbb{E}\left[L(X)^k \mid H_0\right] = \int_{\mathbb{R}} L(x)^k p_0(x)dx\,.$$

On remplace ensuite L par son expression en fonction de p_0 et de p_1 :

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)^k p_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} p_1(x)^k p_0(x)^{1-k}dx\,.$$

De même, on calcule ν_k comme suit.

$$\nu_k := \mathbb{E}\left[Y^k \mid H_1\right] = \mathbb{E}\left[L(X)^k \mid H_1\right] = \int_{\mathbb{R}} L(x)^k p_1(x)dx\,.$$

On remplace ensuite L par son expression en fonction de p_0 et de p_1 :

$$\nu_k = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\right)^k p_1(x)dx = \int_{\mathbb{R}} p_1(x)^{k+1} p_0(x)^{-k}dx = \mu_{k+1}\,.$$

On trouve donc $\nu_k = \mu_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le calcul de ν_0 est immédiat : $\nu_0 = \mathbb{E}\left[Y^0 \mid H_1\right] = 1$.

Correction du 2)

Par définition, on a

$$\varphi(t) := \mathbb{E}\left[e^{itY} \mid H_0\right] = \mathbb{E}\left[e^{itL(X)} \mid H_0\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itL(x)} p_0(x)dx\,.$$

De même, on calcule ψ comme suit.

$$\psi(t) := \mathbb{E}\left[e^{itY} \mid H_1\right] = \mathbb{E}\left[e^{itL(X)} \mid H_1\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itL(x)} p_1(x)dx\,.$$

On remplace ensuite p_1 par son expression en fonction de p_0 et de L :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itL(x)} L(x)p_0(x)dx\,.$$

En utilisant à nouveau le théorème de dérivation sous le signe somme, on trouve ainsi

$$\psi(t) = -i\varphi'(t)\,,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Correction du 3)

Première méthode Pour obtenir un tel résultat, on se sert de la transformation inverse. En effet, on a

$$q_0(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi(t)dt\,,$$

mais aussi

$$q_1(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\psi(y)dy = -\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi'(t)dt\,.$$

On procède alors à une intégration par parties :

$$q_1(y) = -\frac{i}{2\pi}\left[e^{-ity}\varphi(t)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} -iye^{-ity}\varphi(t)dt\,.$$

On admet $\varphi(+\infty) = 0 = \varphi(-\infty)$. (On prouve d'abord cette assertion avec les fonctions en escalier dans L^1 puis l'on se sert de la densité de l'ensemble des fonctions en escalier intégrables pour la topologie L^1.)
Il vient ainsi

$$q_1(y) = yq_0(y)\,.$$

Seconde méthode Une autre manière de procéder est la suivante. On dérive φ :

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} e^{ity}q_0(y)dy = i\int_{\mathbb{R}} ye^{ity}q_0(y)dy\,.$$

Or, d'après la question 2, on a aussi

$$\varphi'(t) = i\psi(t) = i\int_{\mathbb{R}} e^{ity}q_1(y)dy\,.$$

Deux mesures de probabilité ayant une même fonction caractéristique sont égales donc on obtient $q_1(y) = yq_0(y)$.

Remarque 1

On aurait pu se douter de $q_1(y) = yq_0(y)$ vu que l'on a $\nu_k = \mu_{k+1}$. Toutefois, il fallait réellement le prouver. Ce n'est pas parce que les deux densités de probabilité q_1 et $y \mapsto yq_0(y)$ ont les mêmes moments qu'elles sont égales. En effet, étant donné une suite $(m_n)_n$ de réels, l'unicité de la mesure de probabilité η telle que $\int_{\mathbb{R}} x^n \eta(dx) = m_n$ relève du problème des moments et se traite avec des théorèmes (Fourier, Carleman...).

Remarque 2

Pour pouvoir utiliser la transformée de Fourier inverse dans la première méthode, il faudrait en fait d'abord s'assurer que les fonctions φ et ψ sont intégrables.