Correction des Travaux dirigés de Probabilités et Statistiques - Variables aléatoires réelles continues

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 11

Énoncé

Trouver les constantes c_1 et c_2 telles que les deux fonctions $x \mapsto c_1 x^{-3} \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$ et $x \mapsto c_2 x^{-3} \mathbb{1}_{[-2;-1[}(x)$ soient des densités de probabilité.

Correction

Correction du premier cas

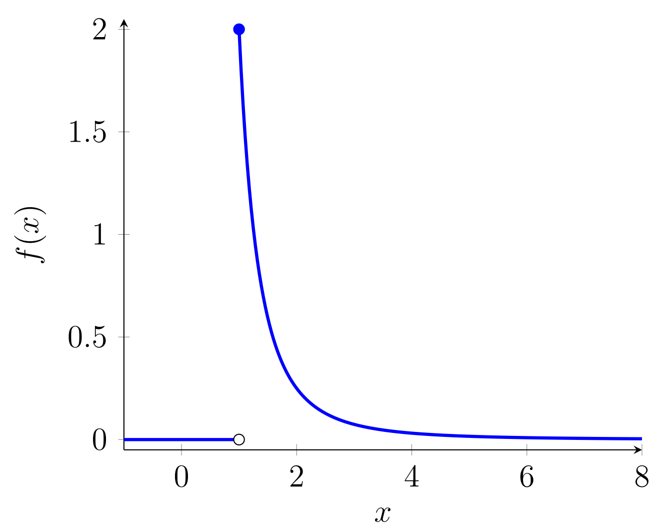
D'abord, il faut que c_1 soit positive ou nulle pour que la fonction soit positive ou nulle vu que $x^{-3} > 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$. Ensuite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_1^{+\infty} c_1 x^{-3} dx = 1 \,.$$

Or, $\int_1^{+\infty} x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} \left[x^{-2}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{2}\left(0-1\right) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit : $c_1 = 2 > 0$.

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

FIGURE 1 – Densité de probabilité sur $[1;+\infty[$



Correction du second cas

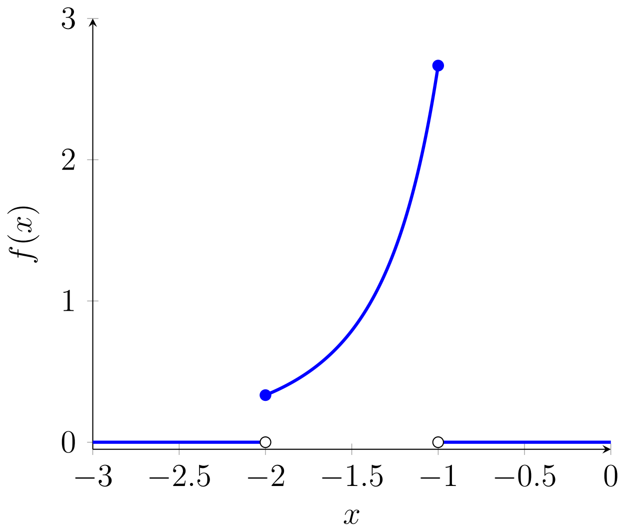
D'abord, il faut que c_2 soit négative ou nulle pour que la fonction soit positive ou nulle vu que $x^{-3} < 0$ pour tout $x \in [-2;-1[$. Ensuite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{-2}^{-1} c_2 x^{-3} dx = 1 \,.$$

Or, $\int_{-2}^{-1} x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} \left[x^{-2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$. Il s'ensuit : $c_2 = -\frac{8}{3} < 0$.

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

FIGURE 2 – Densité de probabilité sur $[-2; -1[$



Exercice 12

Énoncé

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := Ke^{-|x|}\,,$$

où K est une constante réelle.

1. *Déterminer la constante K pour que f soit la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire réelle X.*

2. *Déterminer sa fonction de répartition F_X. Tracer son graphe.*

3. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.*

Rappel

Une fonction f est la densité d'une variable aléatoire réelle si et seulement si elle est positive et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.

Correction

Correction du 1)

La positivité de f implique la positivité de la constante K. On doit maintenant résoudre

$$K\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}dx = 1\,.$$

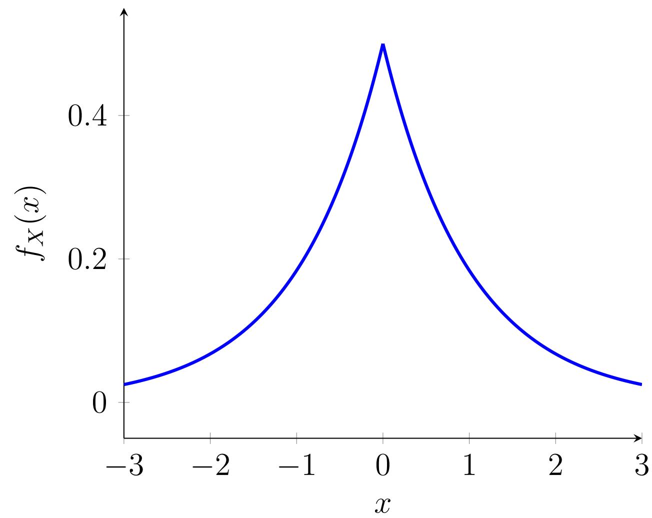
La parité de la fonction nous donne

$$2K\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1\,.$$

L'intégration donne immédiatement $K = \frac{1}{2}$, ce qui est compatible avec la condition $K \geq 0$.

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

Figure 3 – Densité de probabilité de la loi de Laplace



Correction du 2)

Par définition de la fonction de répartition, on a

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|t|} dt\,.$$

Si $x \leq 0$, on peut écrire

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{t} dt = \frac{e^x}{2} = \frac{e^{-|x|}}{2}\,.$$

Si maintenant $x \geq 0$, on a :

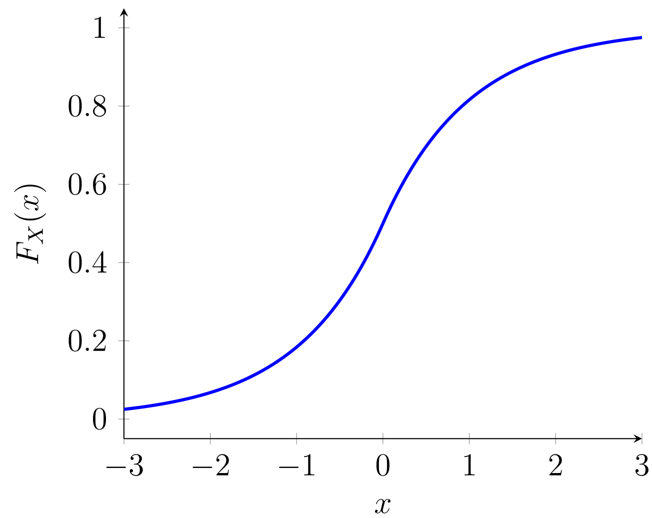
$$\begin{aligned} F_X(x) =& \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{t} dt}_{=\frac{1}{2}} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-t} dt \\ =& 1 - \frac{e^{-x}}{2} \\ =& 1 - \frac{e^{-|x|}}{2}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-|x|}}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-|x|}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}\,.$$

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

Figure 4 – Fonction de répartition de la loi de Laplace



Correction du 3)

Comme la fonction $x \mapsto xe^{-|x|}$ est impaire, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 0. On rappelle que la variance est égale à

$$\sigma^2(X) := \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2]\,.$$

La parité de la fonction $x \mapsto x^2e^{-|x|}$ nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty x^2e^{-x}dx \\ &= \left[\left(-x^2 - 2x - 2\right)e^{-x}\right]_0^\infty \\ &=2\,.\end{aligned}$$

Il s'ensuit $\sigma^2(X) = 2$.

Remarque

Pour la troisième question, on pouvait aussi utiliser l'Exercice 17 qui nous donnait directement le moment d'ordre 2 d'une loi exponentielle avec paramètre $\lambda = 1$: $\mathbb{E}[Y] = \frac{2!}{1^2} = 2$ où Y est une telle variable.

Exercice 13

Énoncé

On considère la fonction f définie par

$$f(x) := \frac{K}{(x+1)^4} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,,$$

où K est une constante réelle.

1. *Déterminer la constante K pour que f soit la densité de probabilité f_X d'une variable aléatoire réelle X.*

2. *Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.*

3. *Trouver $q_{\frac{7}{8}} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}\left(X \le q_{\frac{7}{8}}\right) = \frac{7}{8}$.*

4. *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.*

Rappel

Une fonction f est la densité d'une variable aléatoire réelle si et seulement si elle est positive et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.

Correction

Correction du 1)

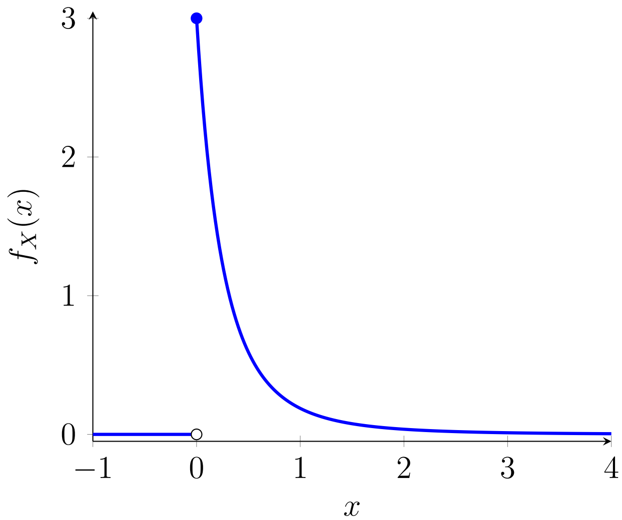
La positivité de f implique la positivité de la constante K. On doit maintenant résoudre

$$K \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^4} = 1\,.$$

L'intégration donne immédiatement $K = 3$, ce qui est compatible avec la condition $K \ge 0$.

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

Figure 5 – Densité de probabilité



Correction du 2)

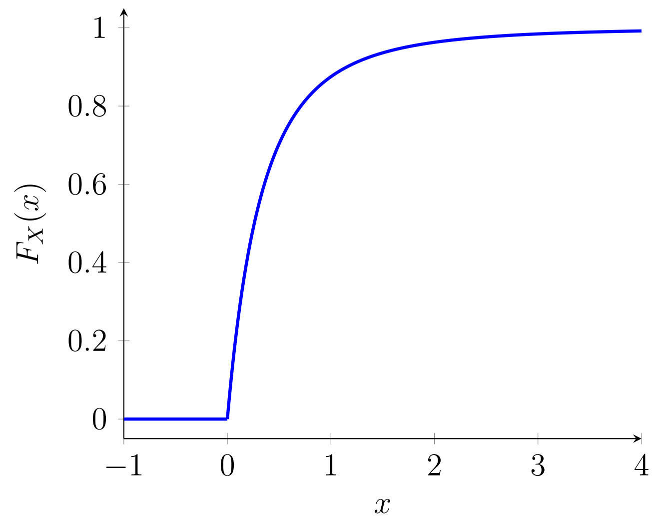
On calcule ici la fonction de répartition de X, c'est-à-dire $F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$. Si $x \leq 0$, cette intégrale est nulle. Et, si x est positif, on a

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^3} \,.$$

Par conséquent, on a $F_X(x) = \left(1 - \frac{1}{(x+1)^3}\right) \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$.

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

Figure 6 – Fonction de répartition



Correction du 3)

On cherche ici à résoudre $F_X\left(q_{\frac{7}{8}}\right) = \frac{7}{8}$. Cela revient à résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation

$$1 - \frac{1}{\left(q_{\frac{7}{8}} + 1\right)^3} = \frac{7}{8},$$

ce qui donne $q_{\frac{7}{8}} = 1$

Correction du 4)

On calcule maintenant l'espérance comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \frac{3x}{(x+1)^4} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{3(x+1)-3}{(x+1)^4} dx \\
&= 3\int_0^\infty (x+1)^{-3} dx - 3\int_0^\infty (x+1)^{-4} dx \\
&= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On calcule maintenant $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty \frac{3x^2}{(x+1)^4}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{3\left((x+1)-1\right)^2}{(x+1)^4}dx \\
&= 3\int_0^\infty (x+1)^{-2}dx - 6\int_0^\infty (x+1)^{-3}dx + 3\int_0^\infty (x+1)^{-4}dx \\
&= 3 - 3 + 1 = 1\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\sigma^2[X] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Remarque

Pour la quatrième question, on pouvait aussi procéder en utilisant des intégrations par parties.

Exercice 14

Énoncé

On considère la fonction F définie par

$$F(x) := \frac{1}{1+e^{-x}}\,.$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X.
2. Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(-x < X \leq x\right) = \frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\,.$$

où $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
4. Calculer $\mathbb{P}\left(-\log(2) < X \leq \log(2)\right) = \frac{1}{3}$.

Correction

Correction du 1)

Pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X, il faut et il suffit de vérifier les quatre axiomes suivants :

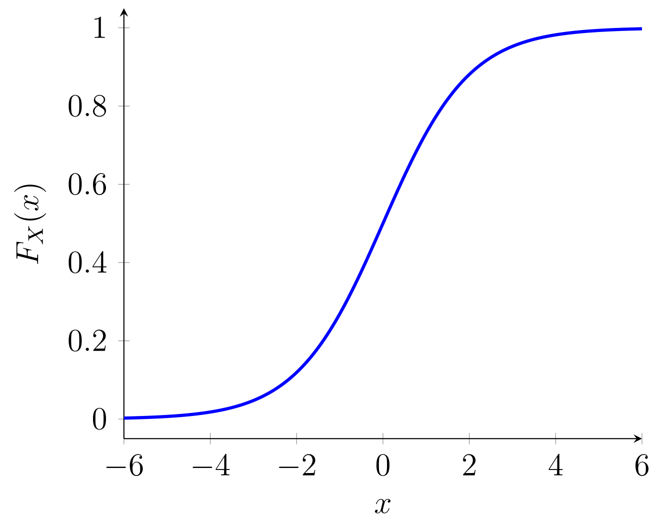
1. F est càdlàg.
2. F est croissante.
3. $F(-\infty) = 0$.
4. $F(+\infty) = 1$.

Le calcul des limites nous permet de vérifier immédiatement les axiomes 3 et 4. La fonction F est continue donc càdlàg. Enfin, la fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ est décroissante d'où son inverse, la fonction F, est croissante.

Il s'ensuit que F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.

Voici par ailleurs une représentation graphique de F

Figure 7 – Fonction de répartition de la loi logistique



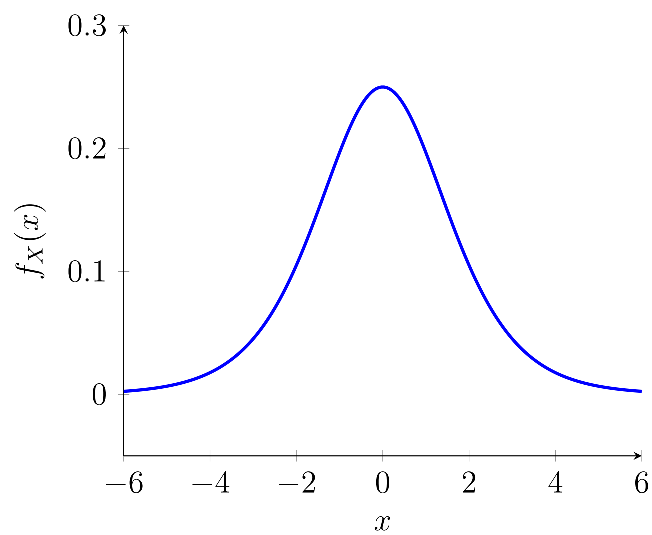
Correction du 2)

On calcule ici la dérivée de la fonction de répartition, laquelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il vient :

$$\boxed{f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,.}$$

Voici par ailleurs une représentation graphique de la densité de probabilité f_X :

Figure 8 – Densité de probabilité de la loi logistique



Correction du 3)

On utilise ici la fonction de répartition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-x < X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x) &= \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{x}} \\
&= \frac{(1+e^x) - (1+e^{-x})}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{1+e^{-x}+e^x+1} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} \\
&= \boxed{\frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)} = \mathbb{P}(-x < X \leq x)\,.}
\end{aligned}$$

Correction du 4)

En particulier, on a

$$\mathbb{P}(-\log(2) < X \leq \log(2)) = \frac{\sinh(\log(2))}{1+\cosh(\log(2))}\,.$$

Or, $\sinh(\log(2)) = \frac{e^{\log(2)} - \frac{1}{e^{\log(2)}}}{2} = \frac{3}{4}$ et $\cosh(\log(2)) = \frac{5}{4}$. D'où

$$\mathbb{P}(-\log(2) < X \leq \log(2)) = \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{1}{3} = \mathbb{P}(-\log(2) < X \leq \log(2))\,.}$$

Exercice 15

Énoncé

La durée de vie en années d'un composant électronique est une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité de densité $f_X(x) := xe^{-x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et Var $[X]$.

Correction

On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}]_0^{\infty} = 2\,.$$

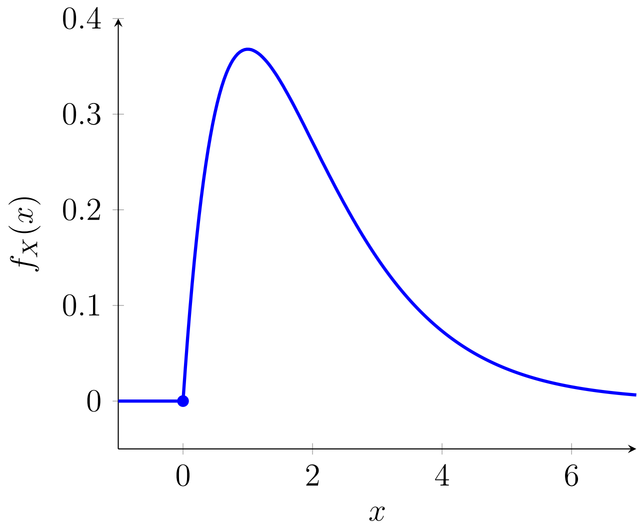
Et, Var $[X] = \mathbb{E}[X^2] - 4$. On calcule maintenant $\mathbb{E}[X^2]$ comme suit.

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = [(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}]_0^{\infty} = 6\,.$$

On a donc Var $[X] = 2$.

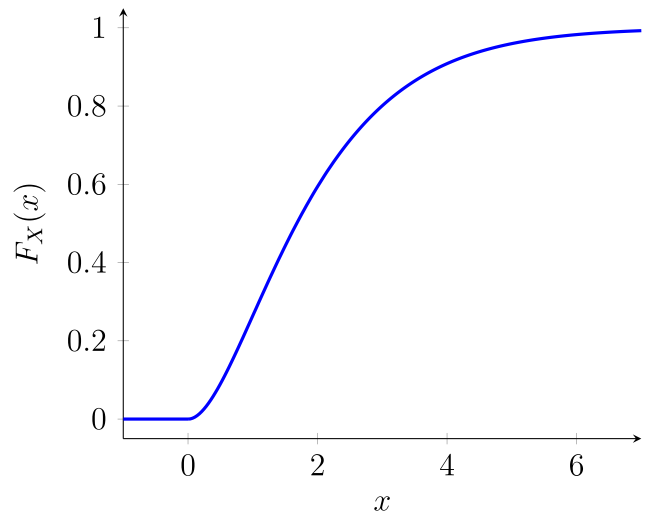
Voici par ailleurs une représentation graphique de la densité de probabilité :

FIGURE 9 – Densité de probabilité



Et voici la fonction de répartition associée :

Figure 10 – Fonction de répartition



Exercice 16

Énoncé

Soient a et b deux constantes réelles et une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par $f(x) := (ax + bx^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(x)$. On suppose $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{5}$. Déterminer $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{Var}\,[X]$.

Correction

Il faut d'abord déterminer a et b. Pour cela, on utilise les deux formules suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1\,,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \frac{3}{5}\,.$$

La première formule nous donne $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$. La seconde implique $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5}$. On a donc $a = \frac{18}{5}$ et $b = -\frac{12}{5}$. On peut vérifier que $ax + bx^2$ est toujours positif ou nul pour tout $x \in [0; 1]$.

On calcule maintenant la première quantité comme ceci :

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (ax + bx^2)dx = \frac{a}{8} + \frac{b}{24} = \frac{7}{20}\,.$$

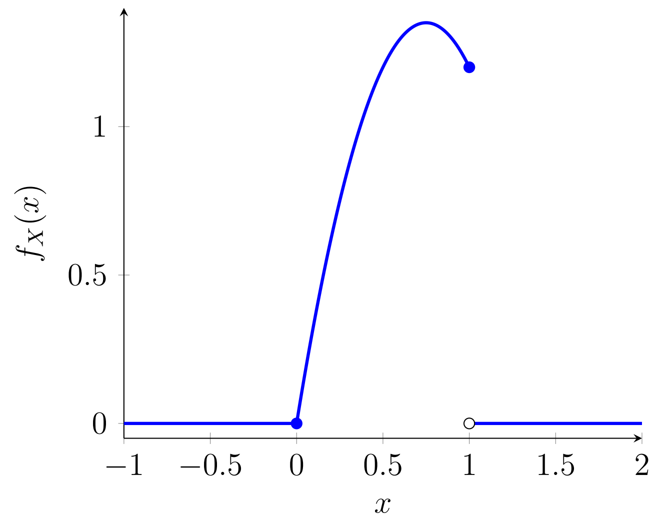
De même, on a $\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \frac{9}{25}$. On calcule le deuxième moment :

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 (ax^3 + bx^4)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{21}{50}\,.$$

On trouve donc $\mathrm{Var}\,[X] = \frac{3}{50}$.

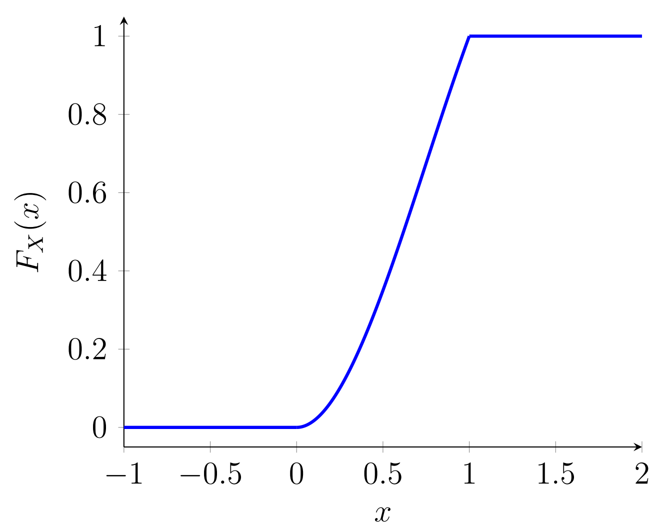
Voici par ailleurs une représentation graphique de la densité de probabilité :

Figure 11 – Densité de probabilité



Et voici la fonction de répartition associée :

Figure 12 – Fonction de répartition



Exercice 17

Énoncé

La durée de vie d'une ampoule est distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif, de densité :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t) .$$

1. Tracer le graphe de f.

2. Calculer la probabilité que la durée de vie soit comprise entre -3 et 4.

3. Calculer la probabilité que la durée de vie soit inférieure à t. On appelle $F(t)$ cette quantité. Tracer le graphe de F.

4. Déterminer t_0 tel que 50% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_0.

5. Déterminer t_1 tel que 75% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_1.

Soit X la variable aléatoire associée à la durée de vie d'une ampoule.

6. Calculer le moment d'ordre n de X. En déduire la durée de vie moyenne et la variance de la durée de vie.

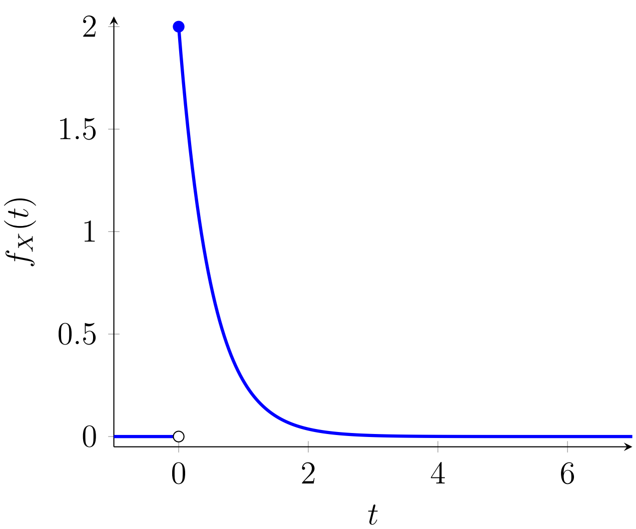
Correction

On appelle X la variable aléatoire .

Correction du 1)

La courbe est tracée pour $\lambda = 2$:

FIGURE 13 – Densité de probabilité de la loi exponentielle



Correction du 2)

Comme f est la densité de la variable aléatoire X, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-3 < X < 4) =& \int_{-3}^{4} f(t)dt \\ =& \int_{-3}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} \lambda e^{-\lambda t}dt \\ =& 0 + \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^4 \\ =& 1 - e^{-4\lambda}\,.\end{aligned}$$

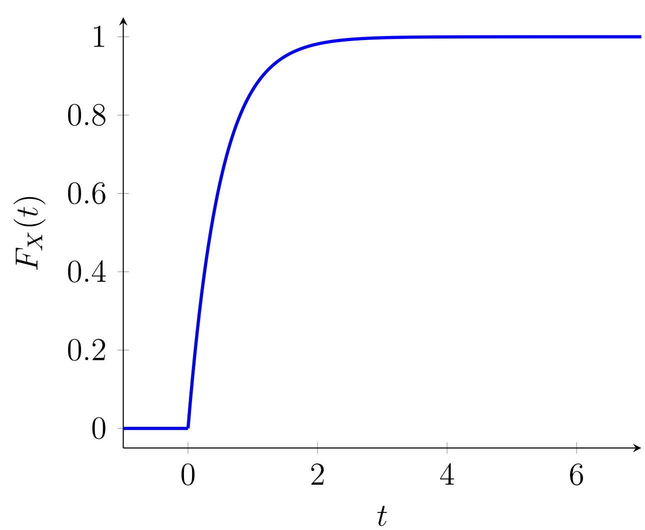
Correction du 3)

Par définition, $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda\, e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(s)ds$. D'abord, si $t \leq 0$, l'intégrale vaut 0. Puis, si $t \geq 0$, elle est égale à

$$\begin{aligned}F(t) =& \int_{0}^{t} \lambda\, e^{-\lambda s}ds \\ =& \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^t \\ =& 1 - e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Ainsi, $F(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$. Voici le graphe de F pour $\lambda = 2$:

FIGURE 14 – Fonction de répartition de la loi exponentielle



Correction du 4)

On cherche donc t_0 tel que $F(t_0) = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $(1 - e^{-\lambda t_0})\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t_0) = \frac{1}{2} > 0$ d'où $t_0 \geq 0$ ce qui implique $1 - e^{-\lambda t_0} = \frac{1}{2}$. Par conséquent, $t_0 = \frac{\log(2)}{\lambda}$.

Correction du 5)

De même, on cherche t_1 tel que $F(t_1) = \frac{3}{4}$ c'est-à-dire $(1 - e^{-\lambda t_1})\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t_1) = \frac{3}{4} > 0$ d'où $t_1 \geq 0$ ce qui implique $1 - e^{-\lambda t_1} = \frac{3}{4}$. Par conséquent, $t_1 = \frac{2\log(2)}{\lambda} = 2t_0$.

Correction du 6)

On utilise la densité et il vient directement $\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty x^n \times \lambda e^{-\lambda x} dx$. On procède par des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n] &= \int_0^\infty x^n \times \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \Big[x^n \times (-e^{-\lambda x})\Big]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{n}{\lambda} \times \mathbb{E}[X^{n-1}] \\
&= \frac{n}{\lambda} \times \frac{(n-1)}{\lambda} \times \mathbb{E}[X^{n-2}] \\
&= \frac{n \times \cdots \times 1}{\lambda^n} \times \mathbb{E}[X^0] \\
&= \frac{n!}{\lambda^n} .
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$. Et, $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2!}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 18

Énoncé

La loi normale est la loi la plus importante de la statistique. De nombreux caractères sont approximativement distribués suivant une loi normale et cette loi intervient comme loi-limite. Soit une variable aléatoire réelle absolument continue X, de densité de probabilité

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

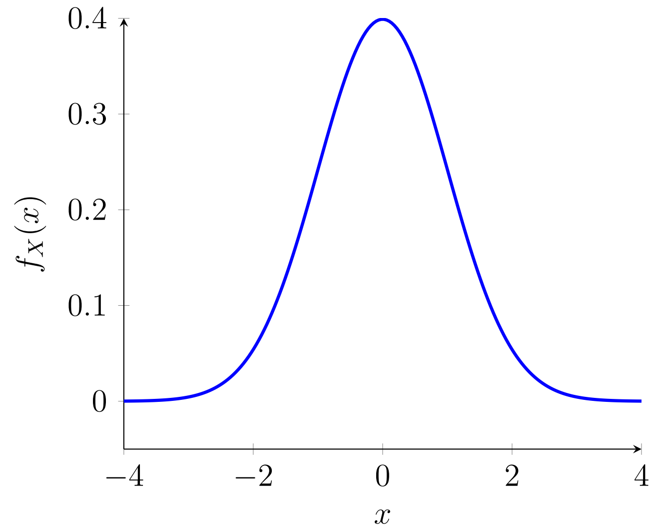
1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
3. Calculer $\mathrm{Var}[X]$.
Soit σ un nombre réel strictement positif et m un nombre réel quelconque. On considère la variable aléatoire réelle $Y := \sigma X + m$.
4. Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire la densité de Y et tracer son graphe.
5. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
6. Calculer $\mathrm{Var}[Y]$.
7. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $L := e^Y$ (on dit que L suit la loi log-normale de paramètres m et σ^2).
8. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $\chi := X^2$ (on dit que χ suit la loi du khi-deux à un degré de liberté).

Correction

Correction du 1)

Voici le graphe de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite :

Figure 15 – Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite



Correction du 2)

L'espérance de la variable aléatoire X est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} te^{-\frac{t^2}{2}}dt$. La fonction $t \to te^{-\frac{t^2}{2}}$ est impaire donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle d'où $\mathbb{E}[X] = 0$. Notons que cette fonction est bien intégrable.

Correction du 3)

Comme l'espérance de X est nulle, on en déduit $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2]$. On calcule comme suit :

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,.$$

Pour calculer, on utilise une intégration par parties ainsi que l'astuce $t^2 = (-t)\times(-t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(-t)\times(-t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underbrace{\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0-0=0} - \int_{\mathbb{R}}(-1)\times e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
=& \int_{\mathbb{R}} f(t)dt\,.
\end{aligned}$$

Or, f étant une densité de probabilité, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Ainsi, $\text{Var}[X] = 1$.

Correction du 4)

On note F_Y la fonction de répartition de Y et F_X celle de X ainsi que f_X la densité de X et f_Y celle de Y. Alors :

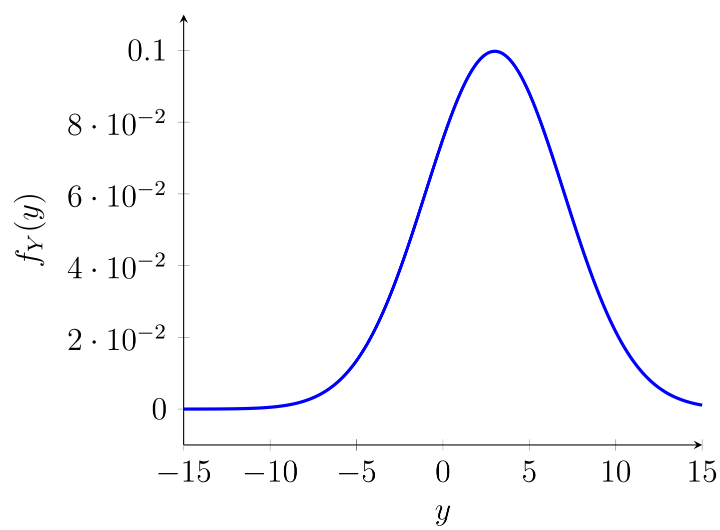
$$\begin{aligned} F_Y(y) =& \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) \\ =& \mathbb{P}\left(\sigma X + m \leq y\right) \\ =& \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-m}{\sigma}\right) \\ =& F_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

On remarque donc que la fonction F_Y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& \frac{1}{\sigma} \times f_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Voici son graphe lorsque $m = 3$ et $\sigma = 4$:

FIGURE 16 – Densité de probabilité de la loi normale



Correction du 5)

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sigma X + m\right] = \sigma\mathbb{E}[X] + m = m$ d'après la linéarité de l'espérance, car $\mathbb{E}[X] = 0$.

Correction du 6)

$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}\left[\sigma X + m\right] = \mathrm{Var}\left[\sigma X\right] = \sigma^2\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

Correction du 7)

On procède comme précédemment. On regarde la fonction de répartition de L :

$$\begin{aligned} F_L(\ell) :=& \mathbb{P}\left(L \leq \ell\right) \\ =& \mathbb{P}\left(e^Y \leq \ell\right) . \end{aligned}$$

Si $\ell \leq 0$, l'évènement $\left\{e^Y \leq \ell\right\}$ est impossible d'où $F_L(\ell) = 0$. Dorénavant, ℓ est strictement positif.

$$\begin{aligned} F_L(\ell) =& \mathbb{P}\left(e^Y \leq \ell\right) \\ =& \mathbb{P}\left(Y \leq \log(\ell)\right) \\ =& F_Y\left(\log(\ell)\right) . \end{aligned}$$

Ainsi, $F_L(\ell) = F_Y\left(\log(\ell)\right) \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(\ell)$. La continuité sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ est immédiate. La continuité en 0 découle de :

$$\lim_{x\to 0^+} F_L(\ell) = \lim_{x\to 0^+} F_Y(\log(\ell)) = F_Y(-\infty) = 0 = F_L(0) \,.$$

De même, on peut montrer la dérivabilité en tout point non nul de $\mathbb{R}$ ce qui achève de prouver que L est une variable aléatoire à densité. On dérive maintenant et on obtient

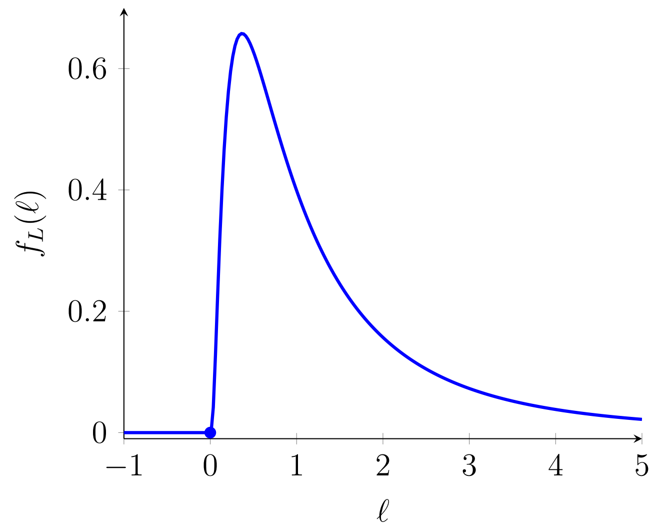
$$\begin{aligned} f_L(\ell) =& \frac{1}{\ell} f_Y\left(\log(\ell)\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\ell^2}} e^{-\frac{(\log(\ell)-m)^2}{2\sigma^2}} . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout $\ell \in \mathbb{R}$:

$$f_L(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\ell^2}} e^{-\frac{(\log(\ell)-m)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(\ell) \,.$$

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction pour $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$:

Figure 17 – Densité de probabilité de la loi log-normale



Correction du 8)

On regarde d'abord la fonction de répartition de χ :

$$F_\chi(x) := \mathbb{P}\left(\chi \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq x\right) .$$

Or, si $x < 0$, l'évènement $\{\chi \leq x\}$ est impossible donc de probabilité nulle. Et, $\mathbb{P}\left(X^2 \leq 0\right) = \mathbb{P}\left(X = 0\right) = 0$ car X est une variable aléatoire continue. Ainsi, $F_\chi(x) = 0$ si $x \leq 0$. Dorénavant, $x > 0$.

$$\begin{aligned} F_\chi(x) =& \mathbb{P}\left(X^2 \leq x\right) \\ =& \mathbb{P}\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) \\ =& \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{x}\right) - \underbrace{\mathbb{P}\left(X < -\sqrt{x}\right)}_{=\mathbb{P}\left(X \leq -\sqrt{x}\right) \text{ car la variable aléatoire } X \text{ est } \textit{continue}} \\ =& F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) . \end{aligned}$$

La fonction F_χ s'écrit donc $F_\chi(x) = \left(F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right)\right) \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$. La continuité sur $]-\infty;0[$ est immédiate. De même, comme F_X et $x \mapsto \pm\sqrt{x}$ sont continues, F_χ est continue sur $]0;+\infty[$. Finalement, $F_\chi(0^-) = 0$ et $F_\chi(0^+) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ donc la fonction F_χ est continue sur $\mathbb{R}$. On peut ensuite montrer facilement qu'elle est dérivable en tout point non nul de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que χ est bien une variable aléatoire à densité. Il nous suffit maintenant de dériver pour obtenir sa densité. On considère $x > 0$:

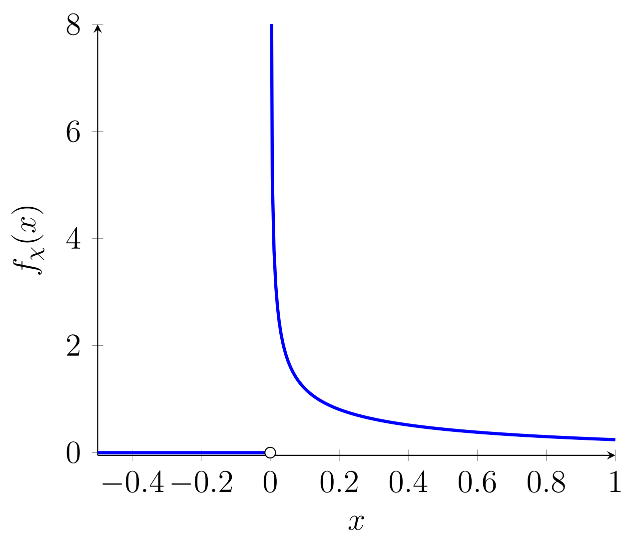
$$\begin{aligned}
f_\chi(x) :=& \frac{d}{dx} F_\chi(x) \\
=& \frac{d}{dx}\left(F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right)\right) \\
=& \frac{d}{dx}\sqrt{x} \times f_X\left(\sqrt{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{x}\right) \times f_X\left(-\sqrt{x}\right) \\
=& \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(-\sqrt{x}\right)^2}{2}\right] \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left[-\frac{x}{2}\right] .
\end{aligned}$$

Et, quand $x \leq 0$, $\frac{d}{dx}F_\chi(x) = \frac{d}{dx}0 = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x) .$$

On remarque que f_χ tend vers $+\infty$ en 0.
Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

Figure 18 – Densité de probabilité de la loi du Khi-deux à un degré de liberté



Exercice 19

Énoncé

Trouver la valeur du réel α tel que la fonction f définie par $f(x) := \alpha x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ soit une densité de probabilité.

Correction

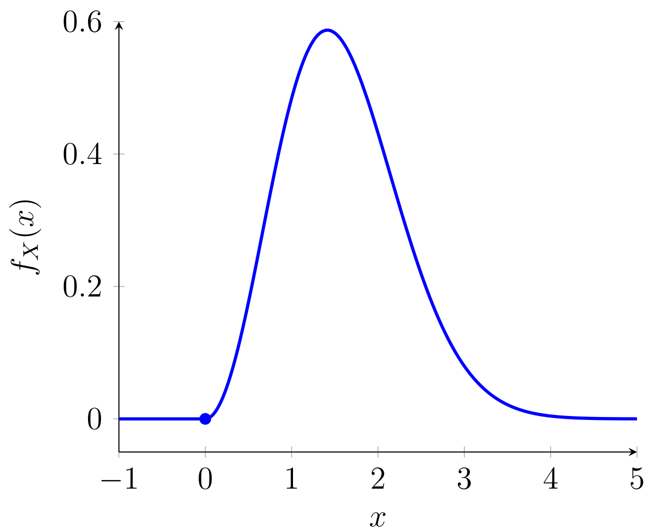
D'abord, il faut que α soit positif ou nul pour que la fonction soit positive ou nulle vu que $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ensuite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx = 1 \, .$$

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\mathrm{Var}(X_0)$ où X_0 est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée et réduite. Il s'ensuit : $\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} > 0$.

Voici par ailleurs le graphe de cette fonction :

FIGURE 19 – Densité de probabilité

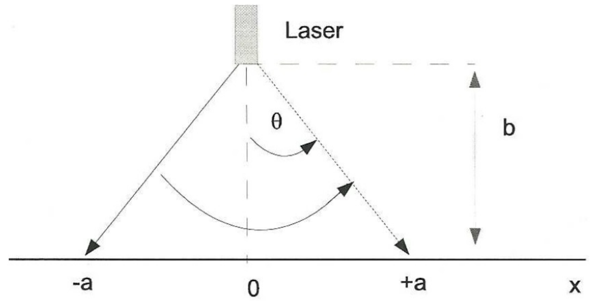


Exercice 20

Énoncé

Pendant un procédé de gravure, un faisceau laser balaye une fois et à vitesse de rotation ω constante un axe horizontal. Le déplacement s'effectue de $x = -a$ à $x = +a$. La distance du laser à l'axe balayé est notée b.

Figure 20 – Schéma du graveur laser



1. *Quelle est la durée T_0 du balayage complet ?*

Le dispositif tombe en panne à l'instant $T \in [0; T_0]$. On suppose que T est une variable aléatoire uniformément distribuée sur cette période.

2. *Quelle est la probabilité que le faisceau tombe en panne avant qu'il ait atteint $x = \frac{a}{2}$?*

3. *Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X où X est la position où s'arrête le faisceau.*

Remarque

Il est important de comprendre que les variables aléatoires réelles X et T sont fortement liées même si l'une est spatiale et l'autre temporelle.

Correction

Correction du 1)

Il s'agit d'une question de physique mathématique. Le temps pour tout balayer est égal à l'angle balayé sur la vitesse de rotation. On a donc

$$T_0 = \frac{2\theta}{\omega}.$$

On peut calculer θ en remarquant

$$\tan(\theta) = \frac{a}{b}.$$

D'où $T_0 = \frac{2}{\omega} \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ car a et b sont tous les deux strictement positifs.

Correction du 2)

On note φ l'angle formé entre la verticale issue de 0 et le faisceau laser au moment de sa panne, compté algébriquement.

La question ici posée est de savoir la probabilité pour que l'angle φ soit inférieur ou égal à l'angle φ_0. Par définition, on a

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{a}{2b}\right) .$$

L'angle φ tel qu'il est défini est une variable aléatoire réelle continue uniformément distribuée sur $[-\theta;\theta]$. On a donc

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{a}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\varphi \leq \varphi_0\right) = \frac{\theta + \varphi_0}{2\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{a}{2b}\right)}{2\arctan\left(\frac{a}{b}\right)} .$$

Correction du 3)

Généralisons maintenant. On remarque que l'angle parcouru par le laser en un temps t est ωt car la vitesse angulaire est ω. Ensuite, l'angle en question est égal à $\theta + \arctan\left(\frac{x}{b}\right)$ où x est la position atteinte par le laser après le temps t. On peut ainsi relier X à T comme suit : $T = \frac{1}{\omega}\left(\theta + \arctan\left(\frac{X}{b}\right)\right)$.

Or, $f_T(t) = \frac{1}{T_0}\mathbb{1}_{[0;T_0]}(t)$. On en déduit :

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \mathbb{P}\left(T \leq \frac{1}{\omega}\left(\theta + \arctan\left(\frac{x}{b}\right)\right)\right) .$$

Or, pour tout $x \in [-a;a]$, on a $\frac{1}{\omega}\left(\theta + \arctan\left(\frac{x}{b}\right)\right) \in [0;T_0]$ d'où

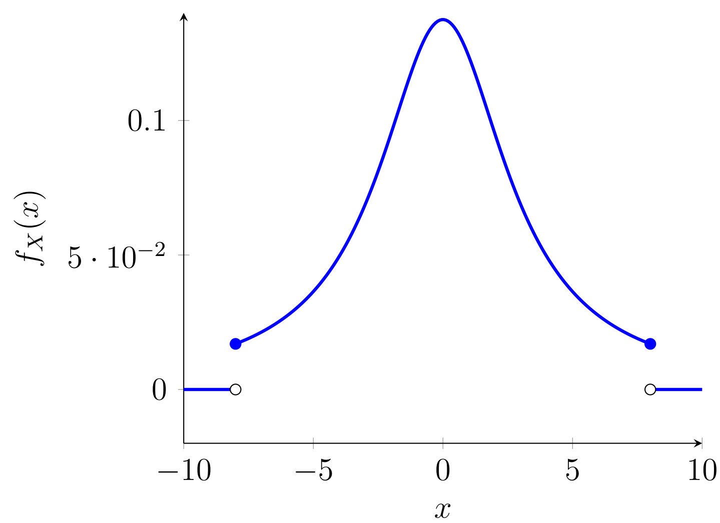
$$F_X(x) = \frac{1}{\omega T_0}\left(\theta + \arctan\left(\frac{x}{b}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{b}\right)}{2\arctan\left(\frac{a}{b}\right)} .$$

On observe $F_X(x) = 0$ si $x \leq -a$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geq a$. On peut vérifier $F_X(-a) = 0$ et $F_X(a) = 1$. On obtient la densité de probabilité en dérivant :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\arctan\left(\frac{a}{b}\right)}\frac{b}{x^2 + b^2}\mathbb{1}_{[-a;a]}(x) .$$

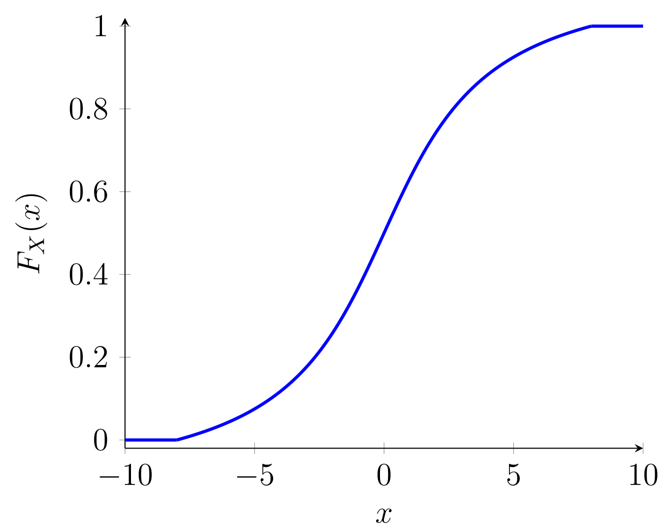
Voici par ailleurs le graphe de cette fonction avec $a = 8$ et $b = 3$:

FIGURE 21 – Densité de probabilité de la loi de Cauchy



Et, la fonction de répartition associée est :

FIGURE 22 – Fonction de répartition de la loi de Cauchy



Remarque

Dans la question deux, on cherchait en fait $\mathbb{P}(X < \frac{a}{2})$. Néanmoins, la variable aléatoire réelle X étant continue, cela revient au même.

Pour aller plus loin

Si l'on prend $b = 1$ et $a = +\infty$, on retrouve la loi de Cauchy dont l'une des particularités est de ne pas avoir d'espérance.

Exercice 21

Énoncé

Un tremblement de Terre de magnitude M libère une énergie E telle que $M = \log(E)$ où log désigne le logarithme népérien. Pour des tremblements de terre de magnitude $M > 3$, on suppose que la variable aléatoire $Y := M - 3$ suit une loi exponentielle de moyenne égale à 2. Par la suite, on néglige les tremblements de terre dont la magnitude est inférieure à 3.

1. *Calculer la moyenne et la variance de M.*

2. *Calculer la densité de probabilité de M.*

3. *Calculer la fonction de répartition de E et sa densité de probabilité.*

4. *On s'intéresse à deux tremblements de terre indépendants et dont la magnitude suit la même loi que celle de M. Démontrer que l'on a*

$$\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq m\right) = \mathbb{P}\left(M \geq m\right)^2 \ ,$$

pour tout $m > 3$.

5. *En particulier, calculer $\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq 4\right)$.*

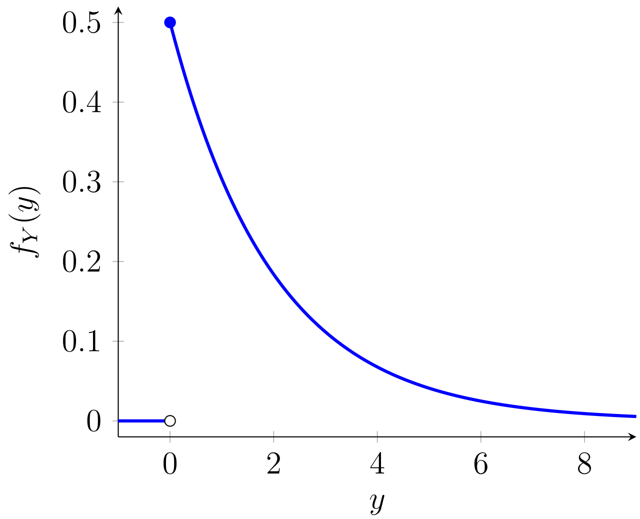
Correction

Correction du 1)

D'après l'énoncé, on a $M = Y + 3$ donc $\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[Y] + 3 = 5$. On cherche maintenant la variance de M. Comme M et Y ne diffèrent que d'une constante, elles ont même variance. On cherche ainsi à calculer la variance de M. Pour cela, on se sert de son espérance. En effet, Y est une variable exponentielle, de paramètre λ. Donc, d'après les résultats classiques de la loi exponentielle, $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}$. On a donc $\lambda = \frac{1}{2}$. Puis, on sait que la variance d'une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda^2}$. Ainsi, la variance de M est égale à $\sigma^2[M] = 4$.
On aurait aussi pu refaire tous les calculs si l'on ne connaissait pas le cours.

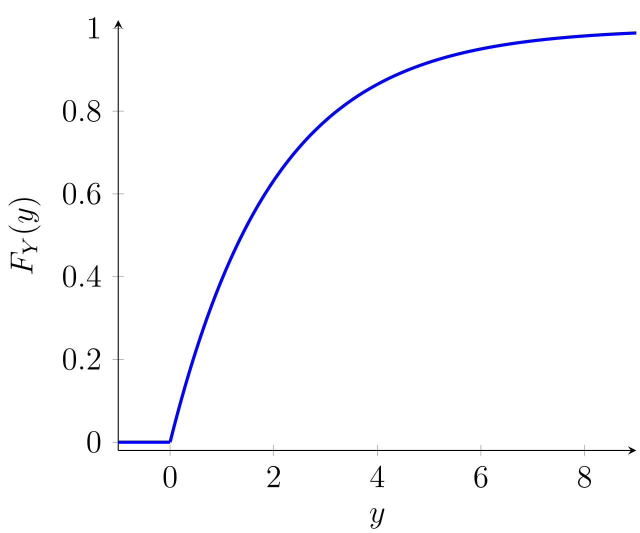
Ainsi, Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Voici par ailleurs le graphe de sa densité de probabilité :

FIGURE 23 – Densité de probabilité de la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$



Et voici celui de sa fonction de répartition :

FIGURE 24 – Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$



Correction du 2)

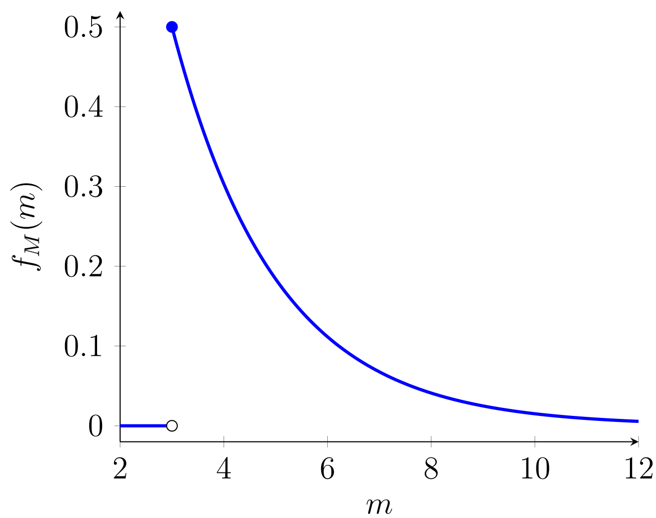
La densité de probabilité de Y est $f_Y(y) := \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y)$. Or, $M = Y + 3$. On a donc :

$$\begin{aligned} F_M(m) &:= \mathbb{P}\left(M \leq m\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y + 3 \leq m\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y \leq m - 3\right) \\ &= F_Y(m-3)\,. \end{aligned}$$

On dérive et l'on obtient $f_M(m) = f_Y(m-3) = \frac{1}{2}e^{-\frac{m-3}{2}}\mathbb{1}_{[3;+\infty[}(m)$.

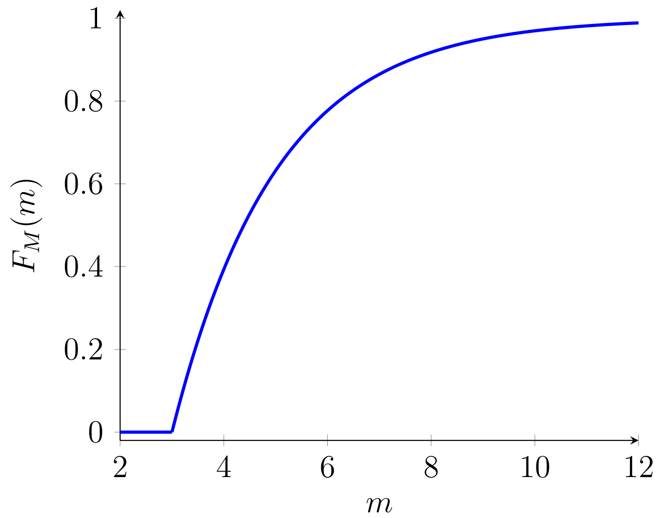
Voici par ailleurs le graphe de la densité de probabilité :

FIGURE 25 – Densité de probabilité de M



Et voici celui de la fonction de répartition :

Figure 26 – Fonction de répartition de M



Correction du 3)

On procède de la même manière pour calculer la fonction de répartition de E, F_E :

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbb{P}\left(E \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(e^M \leq x\right) . \end{aligned}$$

On note $M \geq 3$ d'où $e^M \geq e^3$. Ainsi, si $x < e^3$, alors $F_E(x) = 0$. On suppose dorénavant $x \geq e^3$. Alors, comme $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbb{P}\left(M \leq \log(x)\right) \\ &= F_M\left(\log(x)\right) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\log(x)-3}{2}}\right) \mathbb{1}_{[3;+\infty[}(\log(x)) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\log(x)-3}{2}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\right) . \end{aligned}$$

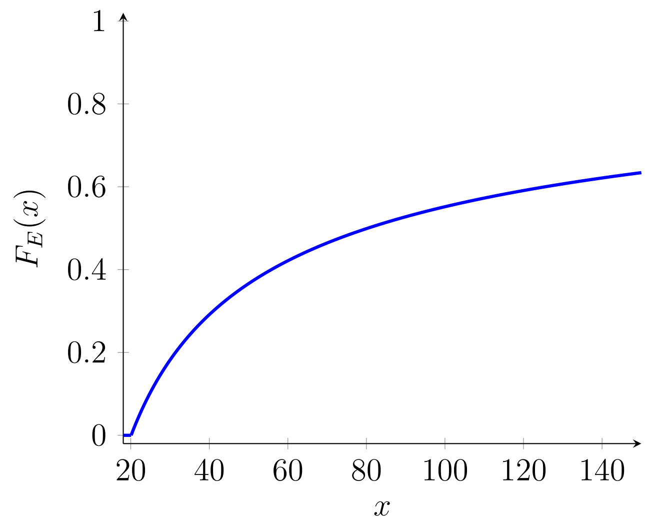
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on aboutit à

$$F_E(x) = \left(1 - \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\right) \mathbb{1}_{[e^3;+\infty[}(x) .$$

On remarque que F_E est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable partout sauf en e^3.

Voici par ailleurs son graphe :

Figure 27 – Fonction de répartition de E

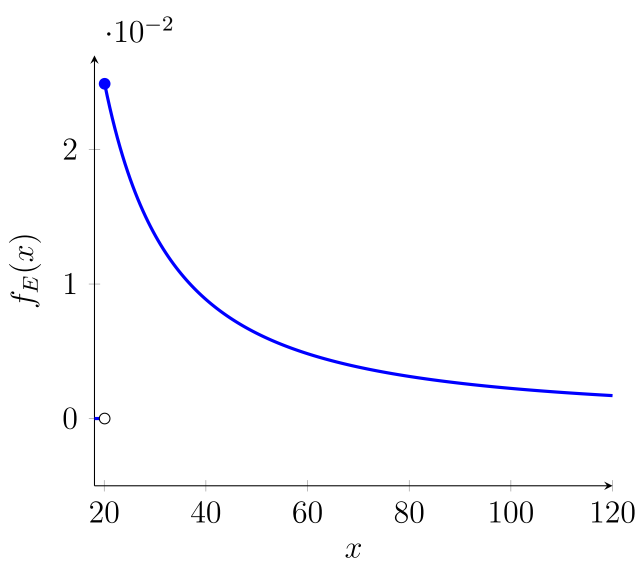


Puis, l'on trouve la densité de probabilité en dérivant :

$$f_E(x) = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2x\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[e^3;+\infty[}(x)\,.$$

Voici par ailleurs son graphe :

Figure 28 – Densité de probabilité de E



Correction du 4)

On procède comme suit.

$$\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq m\right) = \mathbb{P}\left(M_1 \geq m, M_2 \geq m\right) \,.$$

Puis, comme M_1 et M_2 sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq m\right) = \mathbb{P}(M_1 \geq m)\mathbb{P}(M_2 \geq m)\,.$$

Or, M_1 et M_2 ont même loi que M donc les variables aléatoires M_1 et M_2 ont la même fonction de répartition. On en déduit

$$\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq m\right) = \mathbb{P}(M \geq m) \times \mathbb{P}(M \geq m) = \mathbb{P}(M \geq m)^2\,.$$

Correction du 5)

En particulier, en prenant $m = 4$, on trouve

$$\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq 4\right) = \mathbb{P}(M \geq 4)^2\,.$$

Or, $\mathbb{P}(M \geq 4) = 1 - F_M(4) = e^{-\frac{1}{2}}$ donc $\mathbb{P}\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq 4\right) = e^{-1}$.

Exercice 22

Énoncé

Une résistance électrique a une valeur R de dix ohms plus ou moins vingt pourcents. On suppose que la variable aléatoire R est uniformément distribuée. Cette résistance est alimentée par une tension constante $U := 10V$. L'objet de l'exercice est d'étudier l'intensité I qui traverse la résistance.

1. *Déterminer la fonction de répartition F_I de la variable aléatoire I.*

2. *Déterminer la densité de probabilité f_I de la variable aléatoire I.*

3. *Quelle est la probabilité d'avoir un courant d'intensité I supérieur à un ampère ?*

4. *Quelle est l'intensité moyenne du courant ? Comparer cette valeur à $\frac{U}{\mathbb{E}[R]}$.*

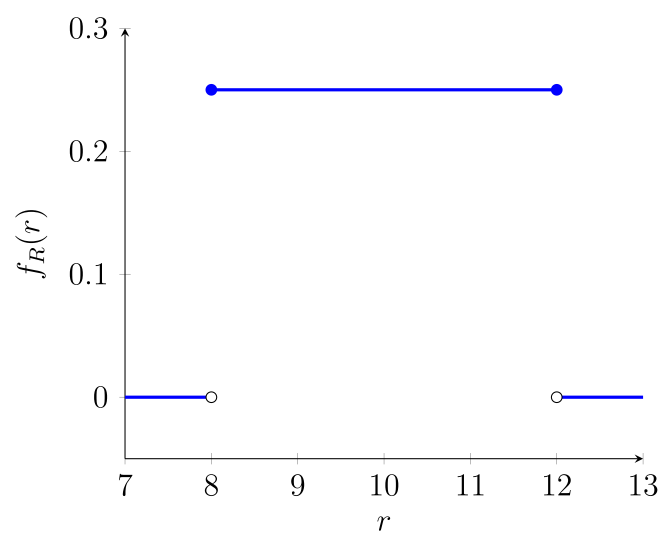
5. *Quels sont la variance et l'écart-type du courant ? Comparer ces valeurs à $\frac{U^2}{\sigma^2(R)}$ et à $\frac{U}{\sigma(R)}$.*

6. *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de la probabilité pour que le courant I s'écarte de plus de* 0.15 *ampère de sa valeur moyenne.*

Loi de la résistance

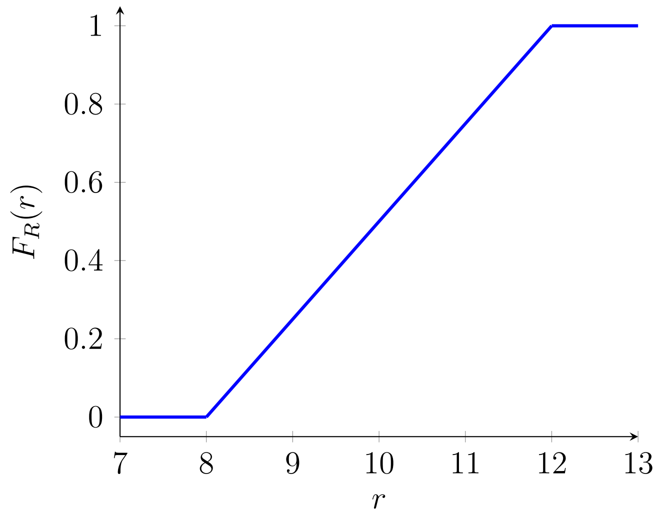
Comme indiqué dans l'énoncé, R suit une loi uniforme sur $[8; 12]$. Voici le graphe de sa densité de probabilité :

FIGURE 29 – Densité de probabilité de R



Et voici celui de sa fonction de répartition :

Figure 30 – Fonction de répartition de R



Correction

Correction du 1)

Par définition de la fonction de répartition F_I de la variable aléatoire I :

$$\begin{aligned} F_I(i) &= \mathbb{P}\left(I \leq i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{U}{R} \leq i\right) . \end{aligned}$$

Or, R suit la loi uniforme sur $[8;12]$ donc presque sûrement, $8 \leq R \leq 12$. Ainsi, si $i \leq \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, on a $F_I(i) = 0$. De même, si $i \geq \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, alors $F_I(i) = 1$.

On suppose dorénavant $i \in \left[\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right]$. On note en particulier $i \neq 0$ et même $i > 0$. D'où

$$\begin{aligned} F_I(i) &= \mathbb{P}\left(R \geq \frac{U}{i}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(R < \frac{U}{i}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(R \leq \frac{U}{i}\right) \\ &= 1 - F_R\left(\frac{U}{i}\right) \\ &= 1 - F_R\left(\frac{10}{i}\right) . \end{aligned}$$

Or, R suit la loi $\mathcal{U}_{[8;12]}$ donc

$$F_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 8 \\ \frac{r-8}{4} & \text{si } 8 \leq r \leq 12 \\ 1 & \text{si } r \geq 12 \end{cases} .$$

Comme $i \in \left[\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right]$, on en déduit $\frac{10}{i} \in [8; 12]$ d'où

$$F_I(i) = 1 - \frac{\frac{10}{i} - 8}{4} = 3 - \frac{5}{2i} .$$

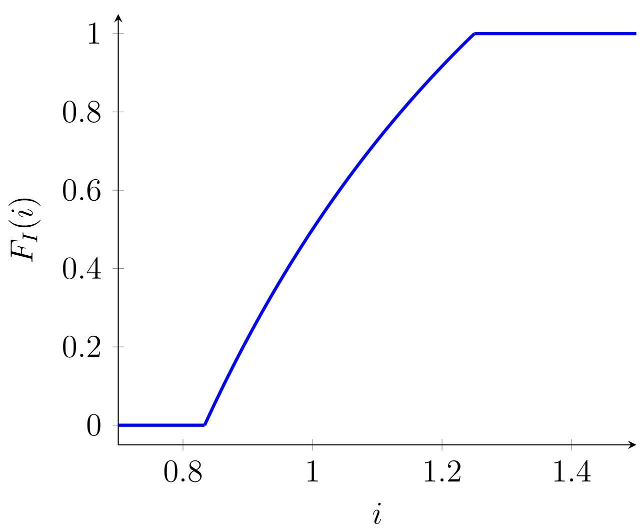
Par conséquent, on a la fonction de répartition pour tout $i \in \mathbb{R}$:

$$F_I(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq \frac{5}{6} \\ 3 - \frac{5}{2i} & \text{si } \frac{5}{6} \leq i \leq \frac{5}{4} \\ 1 & \text{si } i \geq \frac{5}{4} \end{cases} .$$

On remarque que F_I est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable partout sauf en $\frac{5}{6}$ et en $\frac{5}{4}$.

On peut tracer son graphe :

FIGURE 31 – Fonction de répartition de I



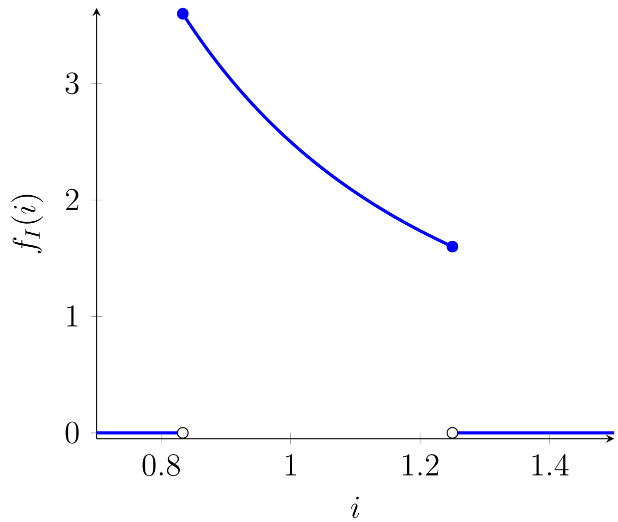
Correction du 2)

On dérive pour obtenir la densité de probabilité f_I :

$$f_I(i) = \frac{5}{2i^2} \mathbb{1}_{\left[\frac{5}{6};\frac{5}{4}\right]}(i) .$$

On trace son graphe :

Figure 32 – Densité de probabilité de I



Correction du 3)

On cherche ici $1 - F_I(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, un ampère est donc la médiane. On pouvait aussi écrire $\mathbb{P}(I \geq 1) = \mathbb{P}(\frac{10}{R} \geq 1) = \mathbb{P}(R \leq 10) = \frac{1}{2}$.

Correction du 4)

On calcule maintenant $\mathbb{E}[I]$. C'est égal à

$$\mathbb{E}[I] = \int_{\mathbb{R}} i f_I(i) di = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{4}} \frac{5}{2i} di = \frac{5}{2} \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1.014\,.$$

Or, on a $\frac{U}{\mathbb{E}[R]} = \frac{10}{10} = 1$. Conséquemment, on aboutit à l'inégalité $\mathbb{E}[I] \neq \frac{U}{\mathbb{E}[R]}$. On pouvait s'y attendre puisque R et I ne sont pas indépendantes. On ne pouvait donc pas écrire $U = \mathbb{E}[R]\mathbb{E}[I]$ bien que l'on ait $U = RI$ d'après la loi d'Ohm. Ceci vient de la non-indépendance entre R et I.

Remarque sur le 4)

À partir de l'espérance de I, on pouvait retrouver la covariance entre I et R :

$$\mathrm{Cov}(I, R) = \mathbb{E}[RI] - \mathbb{E}[I]\mathbb{E}[R] = 10 - 10 \times \frac{5}{2} \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0.14\,.$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires R et I ont une corrélation linéaire qui est négative, ce qui est normal. En effet, plus R est grand, plus I est petit.

Correction du 5)

On calcule la variance de la même manière :

$$\sigma^2[I] = \int_{\mathbb{R}} i^2 f_I(i)di - \left(\frac{5}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 = \frac{25}{24} - \left(\frac{5}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 \approx 0.014\,.$$

Or, $\sigma^2[R] = \int_8^{12} r^2 \frac{1}{4} dr - 10^2 = \frac{4}{3}$ d'où $\frac{U^2}{\sigma^2[R]} = 75 \neq 0.014$. Ainsi, on ne pouvait pas approximer directement la variance du courant à partir de celle de la résistance.
On calcule de même l'écart-type : $\sigma[I] = \sqrt{\sigma^2[I]} \approx 0.119$. Et, $\frac{U}{\sigma[R]} \approx 8.66 \neq 0.119$.

Correction du 6)

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne immédiatement

$$\mathbb{P}\left(|I - \mathbb{E}[I]| \geq 0.15\right) \leq \frac{\sigma^2(I)}{0.15^2} \approx 0.629\,.$$

Remarque sur le 6)

On peut en fait calculer précisément la valeur de $\mathbb{P}\left(|I - \mathbb{E}[I]| \geq 0.15\right)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|I - \mathbb{E}[I]| \geq 0.15\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(|I - \mathbb{E}[I]| < 0.15\right) \\
&= 1 - \int_{\frac{5}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)-0.15}^{\frac{5}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)+0.15} \frac{5}{2i^2} di \\
&= 1 - \frac{5}{2}\left\{\frac{1}{\frac{5}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) - 0.15} - \frac{1}{\frac{5}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) + 0.15}\right\} \\
&\approx 0.254 < 0.629\,.
\end{aligned}$$

On note que la valeur exacte - comme on pouvait s'y attendre - est inférieure à la valeur obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 23

Énoncé

Deux résistances R_1 et R_2 de 10Ω à $\pm 20\%$ (uniformément distribuées) sont montées en série. La tension d'alimentation est égale à $U = 20V$. On s'interroge sur la valeur du courant I obtenu.

1. Déterminer la densité de probabilité de la résistance équivalente R.
2. Déterminer la fonction de répartition de la résistance équivalente R.
3. Déterminer la fonction de répartition du courant obtenu I.
4. Déterminer la densité de probabilité du courant obtenu I.
5. Calculer le courant moyen et la variance de I.

Remarque

Comme les deux résistances sont différentes, on suppose qu'elles sont indépendantes.

Correction

Correction du 1) : Première méthode

D'abord, on remarque $8 \leq R_1 \leq 12$ et $8 \leq R_2 \leq 12$ presque sûrement. Donc $R_1 + R_2 \in [16; 24]$ presque sûrement. En particulier :

$$f_R(r) = 0\,,$$

si $r \notin [16; 24]$.

La résistance équivalente R est égale à $R = R_1 + R_2$. Il s'agit de la somme de deux variables aléatoires indépendantes. On a donc

$$f_R = f_{R_1} * f_{R_2}\,,$$

où $*$ dénote le produit de convolution. Ici, $f_{R_1}(r) = f_{R_2}(r) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[8;12]}(r)$.

On a ainsi, pour tout $r \in [16; 24]$:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{16}\mathbb{1}_{[8;12]}(r-s)\mathbb{1}_{[8;12]}(s)ds \\ &=: \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(r,s)ds\,. \end{aligned}$$

On note que $\mathcal{H}(r,s)$ est égal à 1 ou à 0. Et, c'est égal à 1 si et seulement si on a

$$8 \leq s \leq 12\,,$$

et

$$8 \leq r - s \leq 12\,.$$

Le deuxième système d'inéquations est équivalent à

$$r - 12 \leq s \leq r - 8\,.$$

On en déduit ainsi :

$$\max\{8; r-12\} \leq s \leq \min\{12; r-8\}\,.$$

Si $16 \leq r \leq 20$, on a donc $\mathcal{H}(r,s) = 1$ si et seulement si $8 \leq s \leq r-8$ d'où $f_R(r) = \frac{1}{16}\int_8^{r-8} ds = \frac{r}{16} - 1$.

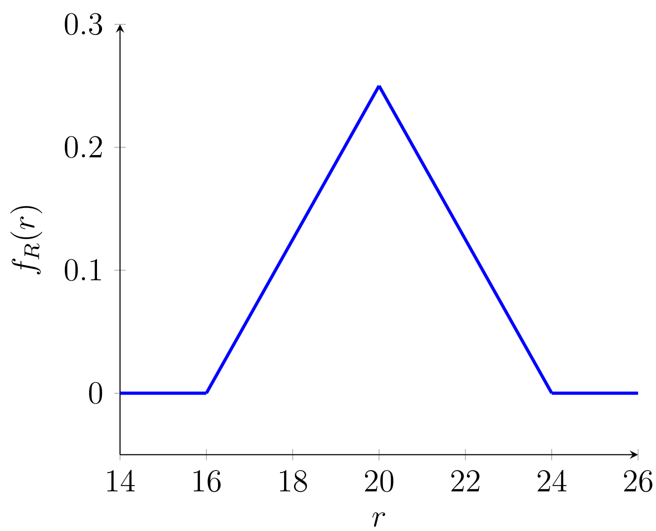
Si maintenant $20 \leq r \leq 24$, on a donc $\mathcal{H}(r,s) = 1$ si et seulement si $r - 12 \leq s \leq 12$ d'où $f_R(r) = \frac{1}{16}\int_{r-12}^{12} ds = \frac{3}{2} - \frac{r}{16}$.

Par conséquent, on obtient la description complète de f_R :

$$f_R(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 16 \\ \frac{r}{16} - 1 & \text{si } 16 \leq r \leq 20 \\ \frac{3}{2} - \frac{r}{16} & \text{si } 20 \leq r \leq 24 \\ 0 & \text{si } r > 24 \end{cases}\,.$$

Voici une représentation graphique de f_R :

FIGURE 33 – Densité de probabilité de R



Correction du 1) : Deuxième méthode

On peut aussi opter pour une méthode faisant appel aux techniques liées au cours de “Traitement des Signaux Déterministes” pour calculer le produit de convolution.

D'abord, on réécrit comme suit :

$$
\begin{aligned}
f_R(r) =& \frac{1}{16}\left(\mathbb{1}_{[8;12]} * \mathbb{1}_{[8;12]}\right)(r) \\
=& \frac{1}{16}\left[(\tau_{-8}H - \tau_{-12}H) * (\tau_{-8}H - \tau_{-12}H)\right](r)\,,
\end{aligned}
$$

où $\tau_a f(x) := f(x+a)$ pour toute fonction f, pour tout réel a et pour tout réel x. Il s'agit ainsi d'une translation de longueur a vers la gauche.

Or, on sait d'après les exercices réalisés en TSD que d'une part $H * H(x) = xH(x)$. En effet, $f * f(x) = xe^{\lambda x}H(x)$ si $f(x) := e^{\lambda x}H(x)$ et d'autre part $\tau_a(f * g) = (\tau_a f) * g = f * (\tau_a g)$.

Par conséquent, on a :

$$
\begin{aligned}
f_R(r) =& \frac{1}{16}\left(\tau_{-16}(H*H)(r) - 2\tau_{-20}(H*H)(r) + \tau_{-24}(H*H)(r)\right) \\
= \frac{1}{16}\Big\{ & (r-16)H(r-16) \\
& -2(r-20)H(r-20) \\
& +(r-24)H(r-24) \\
& \Big\}\,.
\end{aligned}
$$

Puis, comme $H(r-16) = 1$ si et seulement si $r \geq 16$; comme $H(r-20) = 1$ si et seulement si $r \geq 20$ et comme $H(r-24) = 1$ si et seulement si $r \geq 24$, il s'ensuit :

- Si $r \leq 16$, $f_R(r) = 0$.
- Si $16 \leq r \leq 20$, $f_R(r) = \frac{r}{16} - 1$.
- Si $20 \leq r \leq 24$, $f_R(r) = \frac{3}{2} - \frac{r}{16}$.
- Si $r \geq 24$, $f_R(r) = 0$.

On retrouve ainsi le résultat précédent.

Correction du 1) : Troisième méthode

Une troisième méthode utilisant les distributions est la suivante. On pose $g := \mathbb{1}_{[8;12]} * \mathbb{1}_{[8;12]}$. Alors, on peut la dériver au sens des distributions. Une double dérivée nous donne, après utilisation de la formule des sauts :

$$
\begin{aligned}
g'' =& (\delta_8 - \delta_{12}) * (\delta_8 - \delta_{12}) \\
=& \delta_{16} - 2\delta_{20} + \delta_{24}\,.
\end{aligned}
$$

On intègre ensuite une première fois (en utilisant à nouveau la formule des sauts) et l'on trouve :

$$
g'(x) = A + \begin{cases} 0 & \text{si } x < 16 \\ 1 & \text{si } 16 \leq x < 20 \\ -1 & \text{si } 20 \leq x < 24 \\ 0 & \text{si } x \geq 24 \end{cases}\,,
$$

où A est une constante à déterminer.

On intègre à nouveau et il vient :

$$g(x) = Ax + B + \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 16 \\ x - 16 & \text{si } 16 \leq x \leq 20 \\ 24 - x & \text{si } 20 \leq x \leq 24 \\ 0 & \text{si } x \geq 24 \end{cases},$$

où B est une nouvelle constante à déterminer. Or, g est obligatoirement dans L^1 en tant que produit d'un scalaire (16) et d'une densité de probabilité (f_R). Par conséquent, $A = B = 0$. On retrouve bien le même résultat que par les deux premières méthodes.

Correction du 2)

Pour obtenir la fonction de répartition, on prend la primitive qui s'annule en $-\infty$:

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^{r} f_R(s) ds \,.$$

On distingue suivant les différents cas :

— Si $r \leq 16$, on a $F_R(r) = \int_{-\infty}^{r} 0 ds = 0$.

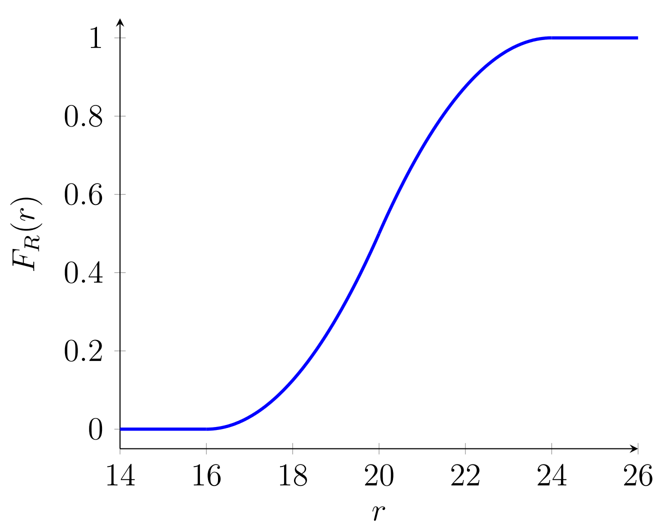
— Si $16 \leq r \leq 20$, on a $F_R(r) = \int_{-\infty}^{16} f_R(s) ds + \int_{16}^{r} \left(\frac{s}{16} - 1\right) ds = \frac{r^2}{32} - r + 8$.

— Si $20 \leq r \leq 24$, on a $F_R(r) = \int_{-\infty}^{20} f_R(s) ds + \int_{20}^{r} \left(\frac{3}{2} - \frac{s}{16}\right) ds = F_R(20) + \frac{3}{2}r - \frac{r^2}{32} - \frac{3}{2} \times 20 + \frac{20^2}{32} = -\frac{r^2}{32} + \frac{3}{2}r - 17$.

— Enfin, si $r \geq 24$, $F_R(r) = \int_{-\infty}^{24} f_R(s) ds + \int_{24}^{r} 0 ds = F_R(24) = 1$.

Voici une représentation graphique de F_R :

Figure 34 – Fonction de répartition de R



Correction du 3)

On a ici $I = \frac{U}{R} = \frac{20}{R}$. On applique la technique habituelle :

$$\begin{aligned} F_I(i) :=& \mathbb{P}\left(I \leq i\right) \\ =& \mathbb{P}\left(\frac{20}{R} \leq i\right) . \end{aligned}$$

Or, si $i < \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$, on a $\frac{20}{R} > i$ presque sûrement d'où $F_I(i) = 0$.
De même, si $i \geq \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$, on a $\frac{20}{R} \leq i$ presque sûrement d'où $F_I(i) = 1$.
On suppose dorénavant $i \in \left[\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right]$. En particulier, $i > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} F_I(i) =& \mathbb{P}\left(R \geq \frac{20}{i}\right) \\ =& 1 - \mathbb{P}\left(R < \frac{20}{i}\right) \\ =& 1 - \mathbb{P}\left(R \leq \frac{20}{i}\right) \\ =& 1 - F_R\left(\frac{20}{i}\right) . \end{aligned}$$

On peut donc écrire de manière générale :

$$F_I(i) = 1 - F_R\left(\frac{20}{i}\right) ,$$

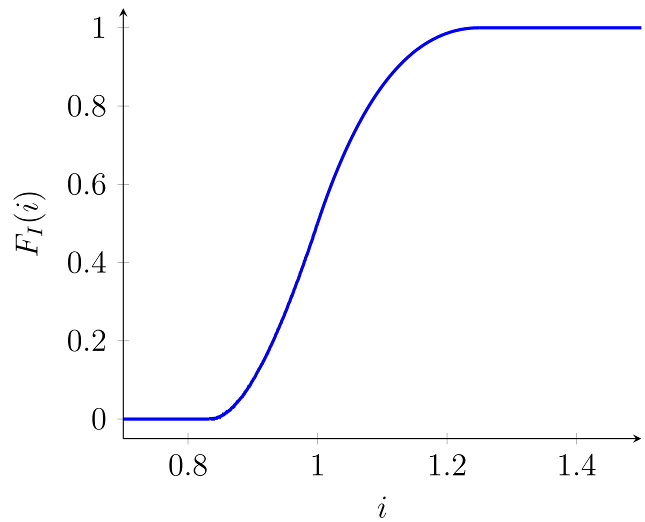
pour tout $i \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit

$$F_I(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq \frac{5}{6} \\ \frac{25}{2i^2} - \frac{30}{i} + 18 & \text{si } \frac{5}{6} \leq i \leq 1 \\ \frac{20}{i} - \frac{25}{2i^2} - 7 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{5}{4} \\ 1 & \text{si } i \geq \frac{5}{4} \end{cases} .$$

Voici une représentation graphique de F_I :

Figure 35 – Fonction de répartition de I



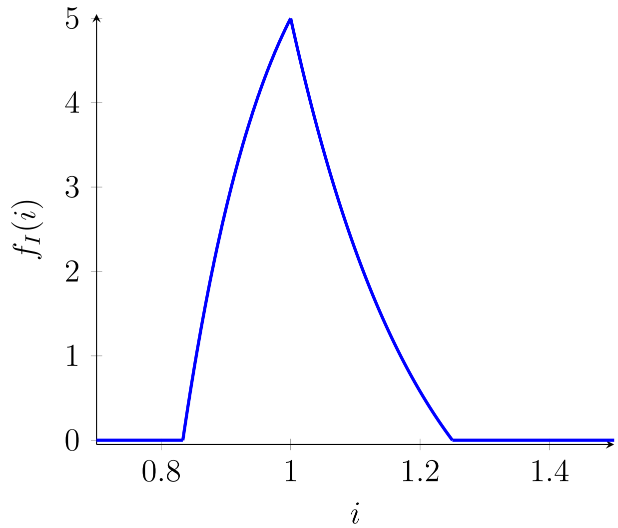
Correction du 4)

Puis, on dérive pour obtenir la densité de probabilité de I :

$$\begin{aligned} f_I(i) :=& \frac{d}{di} F_I(i) \\ =& \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq \frac{5}{6} \\ -\frac{25}{i^3} + \frac{30}{i^2} & \text{si } \frac{5}{6} \leq i \leq 1 \\ \frac{25}{i^3} - \frac{20}{i^2} & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{5}{4} \\ 0 & \text{si } i \geq \frac{5}{4} \end{cases} . \end{aligned}$$

Voici une représentation graphique de f_I :

Figure 36 – Densité de probabilité de I



Correction du 5)

On calcule le courant moyen comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I] &= \int_{\mathbb{R}} i f_I(i) di \\ &= \int_{\frac{5}{6}}^{1} \frac{30i - 25}{i^2} di + \int_{1}^{\frac{5}{4}} \frac{25 - 20i}{i^2} di \\ &= 30 \log\left(\frac{6}{5}\right) - \frac{25}{5} + \frac{25}{5} - 20 \log\left(\frac{5}{4}\right) \\ &= 10 \log\left(\frac{3456}{3125}\right) \\ &\approx 1.00678\,.\end{aligned}$$

Puis, le calcul de la variance donne

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[I] &= \mathbb{E}[I^2] - \mathbb{E}[I]^2 \\ &= \int_{\frac{5}{6}}^{1} \frac{30i - 25}{i} di + \int_{1}^{\frac{5}{4}} \frac{25 - 20i}{i} di - \left(10 \log\left(\frac{3456}{3125}\right)\right)^2 \\ &= 25 \log\left(\frac{25}{24}\right) - \left(10 \log\left(\frac{3456}{3125}\right)\right)^2 \\ &\approx 0.00694\,.\end{aligned}$$

Remarque sur le 5)

On peut observer par rapport à l'Exercice 22 que l'espérance du courant est plus proche de 1. On peut se demander ce qu'il advient si l'on considère n résistances suivant la loi uniforme sur

$[8;12]$ et une tension de $10n$. Cela revient en fait à considérer $I_n = \frac{10}{R(n)}$ où $R(n) := \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$. Or, on sait que cette dernière quantité tend presque sûrement vers $\mathbb{E}[R_1]$ d'après la loi forte des grands nombres. De fait, il n'est pas étonnant que l'on se rapproche de 1.

Exercice 24

Énoncé

U suit la loi uniforme sur $[0;1]$. Soient $X := \cos(2\pi U)$ et $Y := \sin(2\pi U)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

3. En déduire la covariance $\mathrm{Cov}\ (X,Y)$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction

Correction du 1)

Par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\cos(2\pi U)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi u) f_U(u) du \\
&= \int_0^1 \cos(2\pi u) du \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi u)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[0-0\right] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

De même, $\mathbb{E}(Y) = 0$.

Correction du 2)

Ici, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}\left(\cos(2\pi U)\sin(2\pi U)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\sin(4\pi U)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\sin(4\pi u) f_U(u) du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(4\pi u) du \\
&= -\frac{1}{8\pi}\left[\cos(4\pi u)\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{8\pi}\left[1-1\right] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Correction du 3)

Par définition, Cov $(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$. Les variables ne sont donc pas corrélées.

Correction du 4)

Bien qu'elles ne soient pas corrélées, elles ne sont pas indépendantes. En effet, $X^2 + Y^2 = 1$. Ainsi, si X et Y étaient indépendantes, on aurait $0 = \mathrm{Var}(1) = \mathrm{Var}(X^2 + Y^2) = \mathrm{Var}(X^2) + \mathrm{Var}(Y^2)$. La variance étant toujours positive, cela impliquerait la nullité des variances de X^2 et Y^2 et donc X^2 comme Y^2 seraient des constantes ; ce qui n'est pas le cas puisque X et Y sont des variables aléatoires à densité sur $[-1; 1]$.

Autre correction du 4)

On se donne $\epsilon \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

L'évènement $A := \{|X| < \epsilon, |Y| < \epsilon\}$ implique l'évènement $B := \{X^2 + Y^2 \leq 2\epsilon^2\}$. Or, $B \subset \{X^2 + Y^2 < 1\} = \emptyset$ vu que $X^2 + Y^2 = 1$. Il s'ensuit :

$$\mathbb{P}(|X| < \epsilon, |Y| < \epsilon) = 0\,.$$

Pourtant,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X| < \epsilon) =& \mathbb{P}(-\epsilon < \cos(2\pi U) < \epsilon) \\
=& \mathbb{P}\left(U \in \left[\frac{1}{2\pi}\arccos(\epsilon); \frac{1}{2\pi}(\pi - \arccos(\epsilon))\right]\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\arccos(\epsilon); \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}(\pi - \arccos(\epsilon))\right]\right) \\
=& \frac{1}{\pi}(\pi - 2\arccos(\epsilon)) \\
=& 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\epsilon) \\
>& 0\,,
\end{aligned}$$

en utilisant les propriétés sur les fonctions trigonométriques et le fait que U suive une loi uniforme sur $[0; 1]$.

De même, $\mathbb{P}(|Y| < \epsilon) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\epsilon) > 0$. Par conséquent, on obtient :

$$\mathbb{P}(|X| < \epsilon, |Y| < \epsilon) \neq \mathbb{P}(|X| < \epsilon)\,\mathbb{P}(|Y| < \epsilon)\ ,$$

d'où l'on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 25

Énoncé

La variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Y est une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Z := XY$.

2. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}\,(X,Z)$.

3. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?

Correction

Correction du 1)

On détermine la fonction de répartition de Z :

$$\begin{aligned}
F_Z(z) :=& \mathbb{P}(Z \le z) \\
=& \mathbb{P}(XY \le z) \\
=& \mathbb{P}\Big(\{XY \le z, Y=1\} \bigcup \{XY \le z, Y=-1\}\Big) \\
=& \mathbb{P}(XY \le z, Y=1) + \mathbb{P}(XY \le z, Y=-1)\ ,
\end{aligned}$$

d'après l'axiome des probabilités totales. On transforme ensuite XY puis l'on utilise l'indépendance de X et de Y :

$$\begin{aligned}
F_Z(z) =& \mathbb{P}(X \le z, Y=1) + \mathbb{P}(X \ge -z, Y=-1) \\
=& \mathbb{P}(X \le z)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X \ge -z)\mathbb{P}(Y=-1)\,.
\end{aligned}$$

On pose $\Phi(z) := \mathbb{P}(X \le z)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On a alors

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \Phi(z)\mathbb{P}(Y=1) + (1-\Phi(-z))\,\mathbb{P}(Y=-1) \\
&= \Phi(z)\Big(\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=-1)\Big) \\
&= \Phi(z)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, Z suit la loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0,1)$.

Correction du 2)

On calcule

$$\mathrm{Cov}\,(X,Z) = \mathbb{E}[XZ] - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0}\,\underbrace{\mathbb{E}[Z]}_{=0} = \mathbb{E}[XZ]\,.$$

Or, on peut écrire, en utilisant l'indépendance de X et de Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XZ] &= \mathbb{E}\left[X^2 Y\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] \underbrace{\mathbb{E}\left[Y\right]}_{=0} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Z ne sont donc pas corrélées mais elles ne sont pas pour autant indépendantes.

Correction du 3)

Première méthode Si X et Z étaient indépendantes, on saurait que $X + Z$ suit une loi normale de paramètres 0 et $1 + 1 = 2$. Toutefois, on peut observer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X + Z = 0\right) =& \mathbb{P}\left(X \times (Y + 1) = 0\right) \\ =& \mathbb{P}\left(\{X = 0\} \bigcup \{Y + 1 = 0\}\right) \\ =& \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = -1) - \mathbb{P}\left(\{X = 0\} \bigcap \{Y = -1\}\right)\,.\end{aligned}$$

Or, X étant continue, on a $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. De même, $\mathbb{P}\left(\{X = 0\} \bigcap \{Y = -1\}\right) \leq \mathbb{P}(X = 0) = 0$ d'où

$$\mathbb{P}\left(X + Z = 0\right) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}\,.$$

Pourtant, si $X+Z$ suit la loi normale de paramètres 0 et 2, sa probabilité de valoir 0 doit être égale à 0, pas à $\frac{1}{2}$, ce qui achève de prouver qu'elles ne sont pas indépendantes bien qu'elles soient non corrélées.

Deuxième méthode On se donne a et b deux réels strictement positifs. Alors,

$$\mathbb{P}\left(X \in [a;b]\right) = \Phi(b) - \Phi(a) < \frac{1}{2}\,.$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \in [a;b], Z \in [a;b]\right) &= \mathbb{P}\left(X \in [a;b], XY \in [a;b]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \in [a;b], Y = 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X \in [a;b]\right)\,.\end{aligned}$$

Or, si X et Z étaient indépendantes, on aurait

$$\mathbb{P}\left(X \in [a;b], Z \in [a;b]\right) = \mathbb{P}\left(X \in [a;b]\right)\mathbb{P}\left(Z \in [a;b]\right) < \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X \in [a;b]\right)\,.$$

On en déduit donc la non-indépendance de X et Z.

Troisième méthode On calcule

$$\mathbb{P}\left(X \in [1;2], Z \in [3;4]\right) = \mathbb{P}\left(X \in [1;2], XY \in [3;4]\right) = 0\,.$$

Or,

$$\mathbb{P}\left(X \in [1;2]\right)\mathbb{P}\left(Z \in [3;4]\right) > 0\,.$$

Ainsi : $\mathbb{P}\left(X \in [1;2], Z \in [3;4]\right) \neq \mathbb{P}\left(X \in [1;2]\right)\mathbb{P}\left(Z \in [3;4]\right)$ ce qui achève de prouver que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 26

Énoncé

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) := \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[0;3]}(x)$. Soit $Y := \max\{2; X\}$. Trouver la fonction de répartition et l'espérance de Y. La variable aléatoire Y admet-elle une densité ?

Correction

On note F_Y la fonction de répartition de Y. D'abord, pour tout $y < 2$, on a $Y \geq 2 > y$ d'où $F_Y(y) = 0$. Ensuite, comme X ne peut prendre de valeurs supérieurs à 3 strictement, on a $F_Y(y) = 1$ pour tout $y \geq 3$.

Enfin, si $y \in [2; 3]$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(\max\{2; X\} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq y\right) \\ &= \frac{y}{3}\,. \end{aligned}$$

On remarque que la fonction de répartition n'est pas continue en 2. En effet, $F_Y(2) = \frac{2}{3}$ et $F_Y(2^-) = 0$. On en déduit que Y n'est pas une variable à densité.

On calcule maintenant l'espérance en utilisant la formule de transfert :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\max\{2; X\}\right] = \frac{1}{3}\int_0^3 \max\{2; x\}dx = \frac{1}{3}\left(4 + \frac{5}{2}\right) = \frac{13}{6}\,.$$

Autre correction

On peut aussi utiliser la propriété $\mathbb{P}(\max\{U, V\} \leq x) = \mathbb{P}(U \leq x, V \leq x)$ pour toutes les variables aléatoires U et V. Or, 2 est assimilable à une variable aléatoire qui vaut 2 pour tout $\omega \in \Omega$. On a ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(\max\{2; X\} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(2 \leq y, X \leq y\right)\,. \end{aligned}$$

Puis, l'évènement $\{2 \leq y\} = \emptyset$ si $y < 2$ et $\{2 \leq y\} = \Omega$ si $y \geq 2$. Par conséquent, pour $y < 2$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(\emptyset \bigcap \{X \leq y\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0\,,$$

et si $y \geq 2$: $F_Y(y) = \mathbb{P}\left(\Omega \bigcap \{X \leq y\}\right) = \mathbb{P}\left(X \leq y\right) = F_X(y)$, ce qui achève la preuve vu que $F_X(y) = \frac{y}{3}$ si $y \in [2; 3]$ et $F_X(y) = 1$ si $y \geq 3$.

Exercice 27

Énoncé

Une variable aléatoire X suit une loi Log-normale s'il existe des constantes $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ telles que la densité f_X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x^2}} \exp\left[-\frac{(\log(x) - m)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Log-normale. Soient $c, \alpha > 0$. Montrer que $Y := cX^\alpha$ suit aussi une loi Log-normale.

Correction

Calculons d'abord la fonction de répartition de Y. D'abord, si $y \leq 0$, on a $F_Y(y) = 0$. Et, si $y > 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}(cX^\alpha \leq y) \\
&= \mathbb{P}\left(X \leq \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\
&= F_X\left(\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

Puis, on dérive :

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} f_X\left(\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \left(\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2}} \exp\left[-\frac{\left(\log\left(\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) - m\right)^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma\alpha)^2 y^2}} \exp\left[-\frac{(\log(y) - (m\alpha + \log(c)))^2}{2(\sigma\alpha)^2}\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, la densité de probabilité de Y est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma\alpha)^2 y^2}} \exp\left[-\frac{(\log(y) - (m\alpha + \log(c)))^2}{2(\sigma\alpha)^2}\right] \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y)\,.$$

Il s'agit donc bien d'une loi log-normale.

Remarque

Une variable aléatoire X suit la loi Log-normale s'il existe une autre variable aléatoire Z qui suit une loi normale telle que $X = e^Z$.

Par conséquent, $Y := cX^\alpha = e^{\log(c)+\alpha Z}$. Or, $\alpha Z + \log(c)$ suit une loi normale, ce qui achève la preuve.

Exercice 28

Énoncé

Soient U et X deux variables aléatoires indépendantes à valeurs positives. On suppose que U suit la loi uniforme sur $[0;1]$ et que X est à densité.

1. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $A := \log(X)$ en fonction de f.

2. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $B := \log(U)$.

3. Montrer que la variable aléatoire $C := \log(UX)$ est à densité. Exprimer de plus $f_C(t)$ en fonction de $\int_t^{+\infty} f(e^s)ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. En déduire que la variable aléatoire $Y := UX$ est à densité. Déterminer de plus la densité f_Y.

On suppose dorénavant que X suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

5. Déterminer la densité de probabilité de Y.

Correction

Correction du 1)

On commence par regarder la fonction de répartition de A :

$$\begin{aligned} F_A(x) :=& \mathbb{P}(A \leq x) \\ =& \mathbb{P}(\log(X) \leq x) \\ =& \mathbb{P}(X \leq e^x) \\ =& F_X(e^x)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que F_A est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus, elle est dérivable presque partout. Il s'ensuit que A admet bien une densité f_A que l'on obtient en dérivant :

$$f_A(x) = e^x f_X\left(e^x\right)\,.$$

Correction du 2)

On applique le résultat de la question précédente avec $f_U(u) = \mathbb{1}_{[0;1]}(u)$ et l'on trouve $f_B(x) = e^x \mathbb{1}_{[0;1]}(e^x) = e^x \mathbb{1}_{]-\infty;0]}(x)$.

Correction du 3)

On a $C = \log(UX) = \log(U) + \log(X) = A + B$. Or, U et X sont indépendantes. Ainsi, A et B le sont aussi. Comme A et B sont à densité, il s'ensuit que la variable aléatoire C est aussi à densité. De plus, $f_C = f_A * f_B$. En d'autres termes :

$$
\begin{aligned}
f_C(t) &= (f_A * f_B)(t) \\
&= (f_B * f_A)(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{t-s}\mathbb{1}_{]-\infty;0]}(t-s)e^s f_X(e^s)ds \\
&= e^t \int_{s=t}^{\infty} f_X(e^s)ds\,.
\end{aligned}
$$

Correction du 4)

On a $Y = e^C$. On utilise donc la méthode habituelle en commençant par regarder la fonction de répartition de Y :

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}(e^C \leq y)\,.
\end{aligned}
$$

Déjà, si $y \leq 0$, on a $F_Y(y) = 0$. On suppose dorénavant $y > 0$. On a alors

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(C \leq \log(y)) \\
&= F_C(\log(y))\,.
\end{aligned}
$$

Or, la fonction F_C est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même de la fonction F_Y. Également, F_C est dérivable presque partout donc F_Y est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}_+$. Comme F_Y est nulle sur $]-\infty;0]$, il vient que F_Y est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que Y est à densité. Et, on obtient sa densité en dérivant :

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) \\
&= \frac{d}{dy}F_C(\log(y))\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y) \\
&= \frac{1}{y}f_C(\log(y))\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y) \\
&= \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y)\frac{1}{y}e^{\log(y)}\int_{s=\log(y)}^{\infty} f_X(e^s)ds \\
&= \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y)\int_{s=\log(y)}^{\infty} f_X(e^s)ds \\
&= \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y)\int_{y}^{\infty} \frac{f_X(u)}{u}du\,.
\end{aligned}
$$

Correction du 5)

Ici, $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$. On a donc

$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(y) \int_y^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{[0;1]}(u)}{u} du \,.$$

Déjà, si $y \leq 0$, on trouve $f_Y(y) = 0$. De même, si $y > 1$, on a $[y;+\infty[\cap [0;1] = \emptyset$ d'où $f_Y(y) = 0$. Enfin, si $y \in]0;1]$, on a

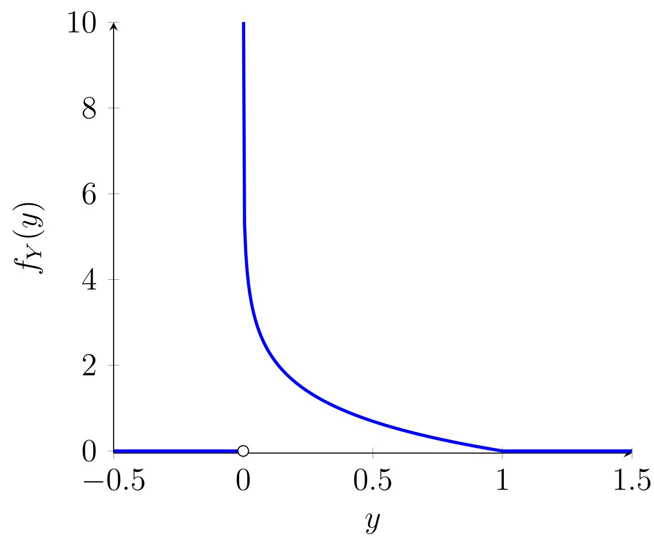
$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{u} du = -\log(y) \,.$$

In fine, il vient

$$f_Y(y) = -\log(y) \mathbb{1}_{]0;1]}(y) \,.$$

Voici par ailleurs une représentation graphique de f_Y :

FIGURE 37 – Densité de probabilité de Y



Exercice 29

Énoncé

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) := \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;1]}(x)$. On pose $Y := |4X^2 - 1|$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{E}\left((Y+4X^2)^3\right)$.

Correction

On utilise la formule de transfert.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}\left[|4X^2-1|\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} |4x^2-1| f_X(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |4x^2-1|dx \\
&= \int_0^1 |4x^2-1|dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (4x^2-1)dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\frac{1}{8} + \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[X] = 0$ (par symétrie), on en déduit $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[Y] = 1$.
On calcule maintenant la dernière quantité comme suit :

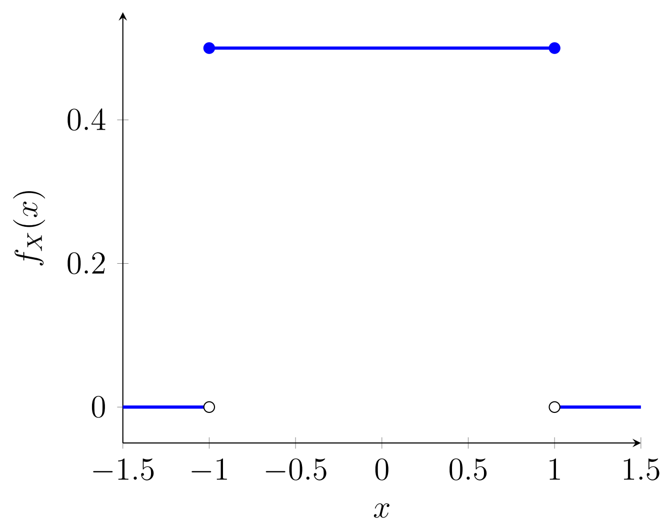
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(Y+4X^2\right)^3\right) &= \mathbb{E}\left(\left(|4X^2-1|+4X^2\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(|4x^2-1|+4x^2\right)^3 dx \\
&= \int_0^1 \left(|4x^2-1|+4x^2\right)^3 dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (8x^2-1)^3 dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{512}{7}\left(1-\frac{1}{2^7}\right) - \frac{192}{5}\left(1-\frac{1}{2^5}\right) + \frac{24}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right) - \left(1-\frac{1}{2^1}\right) \\
&= \frac{1483}{35}\,.
\end{aligned}$$

Remarque

Si on ne se souvient plus de la formule de transfert, on commence par déterminer la loi de Y à partir de la loi de X.

Voici d'ailleurs une représentation graphique de f_X :

Figure 38 – Densité de probabilité de X



D'abord, on remarque $Y \geq 0$ mais aussi $Y \leq 3$. Déterminons donc $F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leq y)$ la fonction de répartition de Y. Soit $y \in [0;3]$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left(\left|4X^2 - 1\right| \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(4X^2 - 1 \leq y, |X| > \frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(1 - 4X^2 \leq y, |X| < \frac{1}{2}\right) . \end{aligned}$$

Regardons de plus près chacun des deux termes en commençant par le premier :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(4X^2 - 1 \leq y, |X| > \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq |X| \leq \frac{\sqrt{1+y}}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{1+y}}{2} \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{1+y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+y}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+y}}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+y} - 1}{2} . \end{aligned}$$

Le deuxième est un peu plus délicat. En effet, $1 - 4X^2 \leq y$ est **immédiat** si $y \geq 1$. Et, si $y \leq 1$, $\{1 - 4X^2 \leq y\} \bigcap \left\{X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right\} = \left\{X \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{1-y}}{2}\right]\right\} \bigcup \left\{X \in \left[\frac{\sqrt{1-y}}{2}; \frac{1}{2}\right]\right\}$.

Par conséquent, si $y \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(1-4X^2 \leq y, X \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}.$$

Et, si $y \leq 1$, on a :

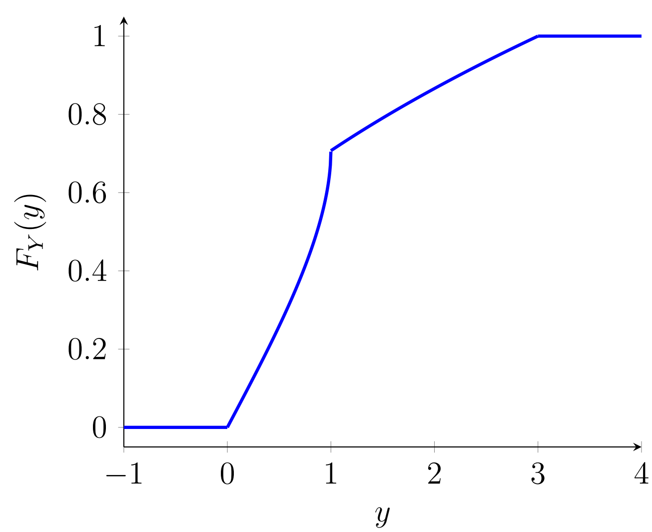
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(1-4X^2 \leq y, X \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{1-y}}{2}\right]\right) + \mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{\sqrt{1-y}}{2};\frac{1}{2}\right]\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{1-y}}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}{2} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ \frac{\sqrt{1+y}}{2} & \text{si } 1 \leq y \leq 3 \\ 1 & \text{si } y > 3 \end{cases}.$$

Voici d'ailleurs une représentation graphique de F_Y :

Figure 39 – Fonction de répartition de Y

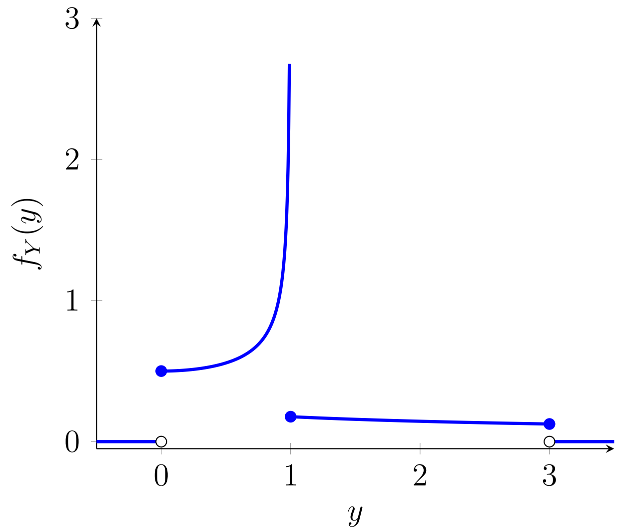


On dérive pour obtenir la densité de probabilité de Y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right) & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1+y}} & \text{si } 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{si } y > 3 \end{cases}.$$

Voici d'ailleurs une représentation graphique de f_Y :

Figure 40 – Densité de probabilité de Y



Après, il reste encore à intégrer par rapport à cette fonction... Autant dire qu'il vaut mieux utiliser la formule de transfert. Mais continuons malgré tout dans cette voie...

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 y\left(\frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right) dy + \frac{1}{4}\int_1^3 y\frac{1}{\sqrt{1+y}} dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^3 \frac{y}{\sqrt{1+y}} dy + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y}} dy \\
&= \frac{1}{4}\int_0^3 \left(\sqrt{1+y} - \frac{1}{\sqrt{1+y}}\right) dy - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\sqrt{1-y} - \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right) dy \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - 2(1+y)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 - \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} + 2(1-y)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 4 + 2\right) - \frac{1}{4}\left(0 + \frac{2}{3} + 0 - 2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{14}{3} - 2 - \frac{2}{3} + 2\right\} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

On retrouve bien $\mathbb{E}[Y] = 1$. Il reste toutefois encore à calculer $\mathbb{E}\left[(Y+4X^2)^3\right]$. Pour ce faire, on pourrait calculer la fonction de répartition de $(Y+4X^2)^3$ puis la densité de probabilité (si elle existe) et enfin, il "suffirait d'intégrer". Nous n'allons pas le faire, évidemment.

Exercice 30 (*)

Énoncé

$R(t)$, le taux de retour en % au cours du temps d'un produit au SAV d'une entreprise est aléatoire. En effet, il dépend de la clientèle du produit, des pays concernés... On suppose qu'il est donné par la relation suivante :

$$R(t) = -Yt^2 + 3t + \frac{1}{2},$$

où Y est une variable aléatoire admettant la densité $f_Y(y) := \frac{1}{5}\mathbb{1}_{[0;5]}(y)$. L'entreprise ne souhaite pas que le taux $R(t)$ dépasse 1%. Calculer la probabilité de cet évènement.

Correction

Ici, on cherche la probabilité que la fonction R dépasse 1 à un instant t donné. En d'autres termes, on souhaite calculer $\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} R(t) \geq 1\right)$.

On étudie pour cela la fonction R en fonction de Y. D'abord, on la dérive : $R'(t) = 3-2Yt$.

On remarque ensuite que la probabilité que Y soit égale à 0 est 0 vu que la variable aléatoire Y est à densité et qu'en particulier sa fonction de répartition est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

On suppose dorénavant $Y > 0$. Alors, un extremum local (et même le seul) de la fonction R est atteint pour $t_0 := \frac{3}{2Y} > 0$. On observe que pour $t \leq t_0$, $R'(t) \geq 0$ et pour $t \geq t_0$, $R'(t) \leq 0$. Il s'ensuit que $R(t_0)$ est le maximum global de la fonction R. Or, $R(t_0) = -Yt_0^2 + 3t_0 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4Y} + \frac{9}{2Y} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4Y}$. On cherche ainsi

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4Y} \geq 1\right) = \mathbb{P}(Y \leq \frac{9}{2}) = F_Y\left(\frac{9}{2}\right),$$

Puis, comme Y suit une loi uniforme sur $[0;5]$ et que $\frac{9}{2} \in [0;5]$, on en déduit que la probabilité recherchée est $\frac{9}{10}$.

Exercice 31 (*)

Énoncé

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètres $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ c'est-à-dire telle que sa densité de probabilité est égale à $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. Soit $Y := \frac{1}{X}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que X et Y aient la même loi.

Correction

Correction du 1)

La positivité est immédiate. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{b}{(x-a)^2+b^2}dx\,.$$

On procède au changement de variable $x := a + by$ qui nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{b^2}{b^2y^2+b^2}dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2+1}dy = 1\,.$$

Correction du 2)

La fonction $x \mapsto xf_X(x)$ est équivalente à la fonction $x \mapsto \frac{b}{\pi x}$ en l'infini donc X n'admet pas d'espérance.

En revanche, on peut montrer que la valeur principale de Cauchy de l'intégrale est égale à b.

Correction du 3)

On calcule la loi de Y comme suit :

$$\begin{aligned} F_Y(y) :=& \mathbb{P}(Y \leq y) \\ =& \mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{y}\right) \\ =& 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\,, \end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right) \\
&= \frac{1}{y^2}\frac{1}{\pi}\frac{b}{\left(\left(\frac{1}{y}\right)-a\right)^2+b^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{b}{(1-ay)^2+b^2y^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{b}{1-2ay+(a^2+b^2)y^2}\,.
\end{aligned}
$$

On veut que cette dernière loi soit égale à $\frac{1}{\pi}\frac{b}{(y-a)^2+b^2}$. Il s'ensuit que ceci est vrai si et seulement si $a^2+b^2=1$ (par identification des coefficients des deux trinômes).

Exercice 32 (*)

Énoncé

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. Trouver la constante m telle que

$$\mathbb{E}\left[(X-m)^2\right] = \inf_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right] .$$

Correction

On pose $f(x) := \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right]$. On développe : $f(x) = \mathbb{E}[X^2] - 2x\mathbb{E}[X] + x^2$. On dérive :

$$f'(x) = 2x - 2\mathbb{E}[X] .$$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $]-\infty; \mathbb{E}[X]]$ et croissante sur $[\mathbb{E}[X]; +\infty[$. Le minimum global est donc atteint en $x = \mathbb{E}[X]$. Il vient : $m = \mathbb{E}[X]$.

Remarque

De plus, $f(m) = \mathrm{Var}[X]$.

Exercice 33 (*)

Énoncé

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et possédant une densité f. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt\,.$$

Correction

Comme X possède une densité f, on a $\mathbb{P}(X > t) = \int_t^{\infty} f(s)ds$ d'où

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} \int_{s=t}^{s=+\infty} f(s)dsdt\,.$$

La fonction étant positive, on applique le théorème de Fubini et l'on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt = \int_{s=0}^{s=+\infty} \int_{t=0}^{t=s} f(s)dtds = \int_{s=0}^{s=+\infty} sf(s)ds = \mathbb{E}(X)\,,$$

vu que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Autre correction

Partons du membre de gauche cette fois. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} tf(t)dt \\
&= \int_{t=0}^{t=+\infty} \left(\int_{s=0}^{s=t} ds \right) f(t)dt \\
&= \int_{t=0}^{t=+\infty} \int_{s=0}^{s=t} f(t)dsdt \\
&= \int_{s=0}^{s=+\infty} \int_{t=s}^{t=+\infty} f(t)dtds \\
&= \int_{s=0}^{s=+\infty} \mathbb{P}(X > s)ds \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)dt\,.
\end{aligned}$$

Exercice 34 (*)

Énoncé

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Calculer l'espérance de X^2e^X.

Correction

Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2e^X\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2e^x f_X(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2e^xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2-2x}{2}\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)e^{\frac{1}{2}}dx \\
&= e^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ((x-1)+1)^2 \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)dx \\
&= e^{\frac{1}{2}} \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x-1)^2 \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)dx \\
&\quad + 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x-1) \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)dx \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)dx \Bigg\} \\
&= e^{\frac{1}{2}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt}_{=\mathbb{E}(X^2)=\mathrm{Var}(X)=1} + 2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt}_{=\mathbb{E}(X)=0} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt}_{=1} \right\} \\
&= 2e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 35 (*)

Énoncé

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction de répartition de X_1 est continue et dérivable.

1. Le but de cette question est de montrer que pour tout couple d'entiers positifs distincts i et j, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$.

(a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où X_i, X_j sont compris entre -1 et 1.

(b) On se place dans le cas de **(a)**. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(X_i = X_j) \leq \sum_{k=-n}^{k=n-1} \mathbb{P}\left(\frac{k}{n} < X_i \leq \frac{k+1}{n}; \frac{k}{n} < X_j \leq \frac{k+1}{n}\right) .$$

(c) En utilisant l'inégalité du **(b)**, prouver le résultat annoncé.

(d) En déduire que pour n fixé, $A_n := \{\omega \in \Omega \ : \ 1 \leq i \neq j \leq n \Rightarrow X_i \neq X_j\}$ est un évènement de probabilité 1.

Soit n fixé. On définit $\mathbb{P}$-presque sûrement la permutation aléatoire π_n de $[\![1;n]\!]$ par la condition

$$X_{\pi_n(1)} < \cdots < X_{\pi_n(n)} .$$

2. Justifier que pour toute permutation σ de $[\![1;n]\!]$, la loi de $\left(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)}\right)$ est égale à la loi de $(X_1, \cdots, X_n)$.

3. En déduire que la permutation aléatoire π_n est uniformément distribuée sur l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.

4. On suppose de plus que $F_{X_1}(0) = 0$. Montrer que les X_i sont positives.

On définit la fonction de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}$, N par

$$N := \inf\{n \geq 2 \ : \ X_n > X_1\} .$$

5. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n(n-1)} ,$$

et que $\mathbb{P}$-presque sûrement, $N < \infty$.

Correction

Correction du 1)(a)

On peut se ramener à ce cas en considérant la suite $(f(X_i))_i$ où f est une bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $]-1;1[$. Par exemple, on prend $f(x) := \frac{2}{\pi}\arctan(x)$. En effet, si $f(X_i) = f(X_j)$ alors $X_i = X_j$. Et, la fonction de répartition de $f(X_1)$ est continue.

Correction du 1)(b)

Si $X_i = X_j$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in [\![-n; n-1[\![$ tel que $X_i = X_j \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$. En particulier, on a

$$X_i \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] \quad \text{et} \quad X_j \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] .$$

Ces évènements sont deux à deux disjoints donc la probabilité de leur réunion et la somme des probabilités, ce qui achève la preuve.

Correction du 1)(c)

Les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{k}{n} < X_i \leq \frac{k+1}{n}; \frac{k}{n} < X_j \leq \frac{k+1}{n}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{k}{n} < X_i \leq \frac{k+1}{n}\right)\mathbb{P}\left(\frac{k}{n} < X_j \leq \frac{k+1}{n}\right) \\
&= \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right) .
\end{aligned}$$

Il vient

$$\mathbb{P}\left(X_i = X_j\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève la preuve.

Correction du 1)(d)

Pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$, on pose

$$B_{i,j} := \{X_i \neq X_j\} .$$

On a

$$A_n = \bigcap_{1 \leq i \neq j \leq n} B_{i,j} .$$

Or, $\mathbb{P}(B_{i,j}) = 1$ d'où $\mathbb{P}(A_n) = 1$.

Correction du 2)

Soit n boréliens de $\mathbb{R}$, $B_1, \cdots, B_n$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_{\sigma(1)} \in B_1, \cdots, X_{\sigma(n)} \in B_n\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \in B_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, X_n \in B_{\sigma^{-1}(n)}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 \in B_{\sigma^{-1}(1)}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_n \in B_{\sigma^{-1}(n)}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{\sigma^{-1}(1)} \in B_{\sigma^{-1}(1)}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_{\sigma^{-1}(n)} \in B_{\sigma^{-1}(n)}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 \in B_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(X_n \in B_n\right) .
\end{aligned}$$

Donc les lois de $(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)})$ et de $(X_1, \cdots, X_n)$ coïncident sur l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^n$ de la forme $B_1 \times \cdots \times B_n$. Il s'agit d'un π-système qui engendre toute la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que la loi de $(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)})$ est égale à la loi de $(X_1, \cdots, X_n)$.

Correction du 3)

Par définition, on a

$$\mathbb{P}(\pi_n = \sigma) = \mathbb{P}\left(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\right) .$$

Or, comme $(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)})$ et $(X_1, \cdots, X_n)$ ont même loi, il vient

$$\mathbb{P}(\pi_n = \sigma) = \mathbb{P}(X_1 < \cdots < X_n) .$$

C'est une constante qui ne dépend pas de σ. Conséquemment, π_n est uniformément distribuée sur l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.

Correction du 4)

Comme $F_{X_1}(0) = 0$, on a immédiatement $\mathbb{P}(X_1 \leq 0) = 0$ donc les variables aléatoires X_i sont presque sûrement positives.

Correction du 5)

Vérifions que pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $\{N = n\} \in \mathcal{F}$. On suppose d'abord $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Alors :

$$\{N = n\} = \left(\bigcap_{k=2}^{n-1} \{X_k \leq X_1\}\right) \cap \{X_n > X_1\} .$$

C'est une intersection finie d'évènements de $\mathcal{F}$ donc c'est un évènement de $\mathcal{F}$. Puis, pour $n = +\infty$:

$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{k=2}^{\infty} \{X_k \leq X_1\} .$$

C'est une intersection dénombrable d'évènements de $\mathcal{F}$ donc c'est un évènement de $\mathcal{F}$. Donc, N est une variable aléatoire.

Correction du 5)

Par définition, on a

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(\max\{X_2, \cdots, X_{n-1}\} < X_1 < X_n) = \mathbb{P}(\pi_n(n-1) = 1, \pi_n(n) = n) .$$

Comme π_n est uniformément répartie sur l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$, il suffit de dénombrer. On obtient

$$\mathbb{P}(\pi_n(n-1) = 1, \pi_n(n) = n) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} ,$$

ce qui achève la preuve.

Exercice 36 (*)

Énoncé

On admet que la vitesse V d'une molécule d'un gaz en équilibre est une variable aléatoire réelle absolument continue dont la densité de probabilité est égale à

$$f_V(v) := \frac{4b\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-bv^2} \mathbb{1}_{v \geq 0} \,,$$

avec $b := \frac{m}{2kT}$, m étant la masse de la molécule, k la constante de Boltzmann et T la température.

1. Calculer la vitesse moyenne d'une molécule de ce gaz.

2. On appelle énergie cinétique la quantité $\frac{1}{2}mV^2$. Calculer l'énergie cinétique moyenne. On donne : $\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}} e^{-u} du = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Correction

Correction du 1)

On calcule la vitesse moyenne comme suit.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V) &= \int_0^\infty v f_V(v) dv \\ &= \int_0^\infty \frac{2v^3}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $w := v^2$ d'où $v = \sqrt{w}$ et $dv = \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V) &= \int_0^\infty \frac{2w^{\frac{3}{2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w}{2\sigma^2}} \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw \\ &= \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^\infty w e^{-\frac{w}{2\sigma^2}} dw}_{=4\sigma^4} \,. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(V) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}}$.

Correction du 2)

Cette énergie cinétique moyenne vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(E) &= \frac{1}{2} m \mathbb{E}(V^2) \\ &= \frac{1}{2} m \int_0^\infty \frac{2v^4}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \,. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u := \frac{v^2}{2\sigma^2}$. Alors $v = \sigma\sqrt{2u}$ et $dv = \frac{\sigma}{\sqrt{2u}}du$. D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(E) &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \left(\frac{kT}{m}\right)^2 4u^2 e^{-u} \sqrt{\frac{kT}{2m}} u^{-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{4kT}{2\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}} e^{-u} du}_{=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} \\
&= \boxed{\frac{3}{2}kT = \mathbb{E}(E)\,.}
\end{aligned}$$

Exercice 37 (*)

Énoncé

Soit X une variable aléatoire positive de densité f. Montrer que la variable aléatoire $\sqrt{X}$ admet comme densité $x \mapsto 2xf(x^2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Correction

Pour ce faire, on calcule la fonction de répartition de $Y := \sqrt{X}$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{X} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq y^2\right) \\ &= F_X(y^2)\,, \end{aligned}$$

si $y > 0$. Si $y \leq 0$, on a $F_Y(y) = 0$.
On dérive et on trouve $f_Y(y) = 2yf_X(y^2)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$.