Probabilités et Statistiques

Convergences des variables aléatoires

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Problème - 1

La définition même de ce qu'est une probabilité contient en son sein l'idée d'infini. En effet, le troisième axiome, à savoir l'axiome des probabilités totales signifie que l'on va s'intéresser tôt ou tard à la notion de limite donc à celle de convergence.

Problème - 1

La définition même de ce qu'est une probabilité contient en son sein l'idée d'infini. En effet, le troisième axiome, à savoir l'axiome des probabilités totales signifie que l'on va s'intéresser tôt ou tard à la notion de limite donc à celle de convergence.

La notion de convergence dépend directement de la topologie que l'on associe à l'espace que l'on étudie. Par exemple, quand on regarde les suites réelles, la topologie principale (en terme d'utilisation) est celle associée à la valeur absolue, en guise de norme. Toutefois, si l'on s'intéresse aux suites de fonctions, on dispose de plusieurs convergences : la convergence simple et la convergence uniforme. Avec les séries de fonctions, on a la convergence simple, la convergence uniforme mais aussi la convergence absolue.

Problème - 2

Quand on utilise la notion d'infini, il convient de toujours préciser quelle topologie on utilise. En particulier, l'ensemble $\mathbb{R}^\Omega$ est un espace fonctionnel donc il faut être précautionneux avec la périlleuse notion de convergence.

Problème - 2

Quand on utilise la notion d'infini, il convient de toujours préciser quelle topologie on utilise. En particulier, l'ensemble $\mathbb{R}^\Omega$ est un espace fonctionnel donc il faut être précautionneux avec la périlleuse notion de convergence.

Nous verrons en particulier que les convergences usuelles en analyse sont à peu près inutiles dans le cadre des probabilités. En lieu et place, nous présenterons la convergence presque sûre (laquelle est difficilement atteignable), la convergence dans L^p pour $p \in [1; +\infty[$ et la convergence en probabilité. Nous ferons également l'étude de la convergence en loi, laquelle est fondamentalement différente des autres.

Paradoxe - 1

On effectue plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Quand la pièce fait pile, on perd la somme misée. Quand elle fait face, on récupère le double de ce qu'on a misé.

Paradoxe - 1

On effectue plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Quand la pièce fait pile, on perd la somme misée. Quand elle fait face, on récupère le double de ce qu'on a misé.

De fait, la modélisation par des expériences indépendantes d'une loi de Rademacher se prête bien à ce cadre. On note m_n la mise du lancer numéro n. On pose $X_n := -1$ si la pièce fait pile au lancer numéro n et $X_n := 1$ sinon.

Paradoxe - 2

Le gain G_n du joueur après n lancers est donc égal à $G_n = \sum_{k=1}^{n} m_k X_k$. Si la mise est déterministe, la linéarité de l'espérance implique $\mathbb{E}[G_n] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Néanmoins, l'idée est ici que le joueur va adapter sa mise en fonction des résultats aux lancers *précédents*. En effet, on part du principe que le joueur veut optimiser ses gains. On prend aussi comme hypothèse qu'il ne dispose pas de pouvoirs lui permettant de deviner les lancers futurs.

Paradoxe - 2

Le gain G_n du joueur après n lancers est donc égal à $G_n = \sum_{k=1}^n m_k X_k$. Si la mise est déterministe, la linéarité de l'espérance implique $\mathbb{E}[G_n] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Néanmoins, l'idée est ici que le joueur va adapter sa mise en fonction des résultats aux lancers *précédents*. En effet, on part du principe que le joueur veut optimiser ses gains. On prend aussi comme hypothèse qu'il ne dispose pas de pouvoirs lui permettant de deviner les lancers futurs.

Nous allons opter pour la "martingale" (dans le sens commun du mot) classique consistant à miser un euro au premier lancer puis à doubler la mise jusqu'à gagner une fois. L'idée est en fait d'introduire ce que l'on appelle un temps d'arrêt, lequel suit en fait la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$:

Paradoxe - 3

On utilise alors la stratégie de mise **non déterministe** suivante. On pose : $m_1 := 1$. Puis, $m_{n+1} := 2m_n \mathbb{1}_{n<\tau}$. En d'autres termes, on double la mise jusqu'à tomber sur face puis on arrête le jeu. On en déduit que pour tout $k \leq \tau$, on a $m_k = 2^{k-1}$.

Paradoxe - 3

On utilise alors la stratégie de mise **non déterministe** suivante. On pose : $m_1 := 1$. Puis, $m_{n+1} := 2m_n \mathbb{1}_{n<\tau}$. En d'autres termes, on double la mise jusqu'à tomber sur face puis on arrête le jeu. On en déduit que pour tout $k \leq \tau$, on a $m_k = 2^{k-1}$. Le gain au lancer numéro $\tau(\omega)$ est ainsi :

$$G_{\tau(\omega)} = \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} m_k X_k = \sum_{k=1}^{\tau(\omega)} 2^{k-1} X_k \,.$$

Paradoxe - 4

Or, $X_{\tau(\omega)} = +1$ et $X_k = -1$ pour tout $k \in [\![1; \tau(\omega) - 1]\!]$, si $\tau(\omega) \geq 2$. Le cas où $\tau(\omega) = 1$ est passé sous silence vu que cela signifie qu'on a gagné au premier essai et donc il n'y a aucune stratégie à avoir. Il vient :

Paradoxe - 4

Or, $X_{\tau(\omega)} = +1$ et $X_k = -1$ pour tout $k \in [\![1; \tau(\omega) - 1]\!]$, si $\tau(\omega) \geq 2$. Le cas où $\tau(\omega) = 1$ est passé sous silence vu que cela signifie qu'on a gagné au premier essai et donc il n'y a aucune stratégie à avoir. Il vient :

$$
\begin{aligned}
G_{\tau(\omega)} &= -\sum_{k=1}^{\tau(\omega)-1} 2^{k-1} + 2^{\tau(\omega)-1} = -\sum_{k=0}^{\tau(\omega)-2} 2^k + 2^{\tau(\omega)-1} \\
&= 1 - 2^{\tau(\omega)-1} + 2^{\tau(\omega)-1} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Paradoxe - 5

Par conséquent, si $n \geq \tau(\omega)$, $G_n = 1$. Et, si $n < \tau(\omega)$, $G_n = -\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 - 2^n$.

Paradoxe - 5

Par conséquent, si $n \geq \tau(\omega)$, $G_n = 1$. Et, si $n < \tau(\omega)$, $G_n = -\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 - 2^n$.

On remarque :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} G_n = 1\right) = 1\,.$$

En effet, $\{\omega \in \Omega \ : \ \lim_{n\to\infty} G_n(\omega) \neq 1\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{X_k = -1\}$. Or, cet évènement est inclus dans $\bigcap_{k=1}^{N} \{X_k = -1\}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Cet évènement est de probabilité 2^{-N}. Il s'ensuit le résultat annoncé.

Paradoxe - 6

Pourtant, en rappelant que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ pour tout évènement A, on remarque aussi :

Paradoxe - 6

Pourtant, en rappelant que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ pour tout évènement A, on remarque aussi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G_n] =& \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n<\tau}] + \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n\geq\tau}] \\
=& \mathbb{E}\left[(1-2^n) \times \mathbb{1}_{n<\tau}\right] + \mathbb{E}\left[1 \times \mathbb{1}_{n\geq\tau}\right] \\
=& (1-2^n)\mathbb{P}(\tau > n) + \mathbb{P}(\tau \leq n) \\
=& (1-2^n)2^{-n} + (1-2^{-n}) \\
=& 0\,.
\end{aligned}$$

Paradoxe - 6

Pourtant, en rappelant que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ pour tout évènement A, on remarque aussi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_n] =& \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n<\tau}] + \mathbb{E}[G_n \mathbb{1}_{n\geq\tau}] \\ =& \mathbb{E}\left[(1-2^n) \times \mathbb{1}_{n<\tau}\right] + \mathbb{E}\left[1 \times \mathbb{1}_{n\geq\tau}\right] \\ =& (1-2^n)\mathbb{P}(\tau > n) + \mathbb{P}(\tau \leq n) \\ =& (1-2^n)2^{-n} + (1-2^{-n}) \\ =& 0\,.\end{aligned}$$

En effet, τ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, $\mathbb{P}(\tau > n) = 2^{-n}$.

Paradoxe - 7

Ce résultat semble surprenant. En effet, il semblerait qu'il suffise de refaire la procédure un grand nombre de fois pour dégager un bénéfice moyen.

Paradoxe - 7

Ce résultat semble surprenant. En effet, il semblerait qu'il suffise de refaire la procédure un grand nombre de fois pour dégager un bénéfice moyen.

Comment concilier ces deux résultats justes mais qui semblent incompatibles ?

Convergence simple - 1

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle est une fonction de l'espace fondamental Ω vers $\mathbb{R}$. On peut donc naturellement munir l'ensemble des variables aléatoires de cette topologie. En d'autres termes, on dit que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_n$ converge vers X si $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Convergence simple - 1

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle est une fonction de l'espace fondamental Ω vers $\mathbb{R}$. On peut donc naturellement munir l'ensemble des variables aléatoires de cette topologie. En d'autres termes, on dit que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_n$ converge vers X si $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Cette convergence est à peu près **inutile** en probabilités vu qu'elle n'exploite pas la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ dont on a muni l'espace fondamental.

Convergence simple - 2

Exemple

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. En pratique, on lance une pièce équilibrée. Alors, X_n vaut 1 si la pièce donne "face" et X_n vaut 0 si la pièce donne "pile".

Convergence simple - 2

Exemple

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. En pratique, on lance une pièce équilibrée. Alors, X_n vaut 1 si la pièce donne "face" et X_n vaut 0 si la pièce donne "pile".

Lorsque le nombre n de lancers est grand, on s'attend à ce que la proportion de "faces" soit à peu près égale à $\frac{1}{2}$ au vu de l'approche fréquentiste de la notion de probabilité. Ainsi, on s'attend à ce que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{2}\,.$$

Convergence simple - 3

Or, cette limite est fausse pour certaines valeurs de ω. Posons par exemple

$$A := \{\omega \in \Omega \ : \ \#\{\text{nombre de faces}\} < \infty\} \ .$$

On a alors immédiatement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} = 0$$

pour tout $\omega \in A$.

Convergence simple - 4

On pourra objecter à l'exemple ci-dessus que l'évènement A est peu probable. On peut d'ailleurs facilement vérifier, en utilisant l'indépendance ainsi que le Lemme de Borel-Cantelli que sa probabilité est égale à 0. Or, seuls les évènements de probabilités strictement positives nous intéressent.

Convergence simple - 4

On pourra objecter à l'exemple ci-dessus que l'évènement A est peu probable. On peut d'ailleurs facilement vérifier, en utilisant l'indépendance ainsi que le Lemme de Borel-Cantelli que sa probabilité est égale à 0. Or, seuls les évènements de probabilités strictement positives nous intéressent.

On pourrait montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que l'on dispose de la limite suivante :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \;:\; \lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1\,.$$

Convergence simple - 4

On pourra objecter à l'exemple ci-dessus que l'évènement A est peu probable. On peut d'ailleurs facilement vérifier, en utilisant l'indépendance ainsi que le Lemme de Borel-Cantelli que sa probabilité est égale à 0. Or, seuls les évènements de probabilités strictement positives nous intéressent.

On pourrait montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que l'on dispose de la limite suivante :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \ : \ \lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1\,.$$

En d'autres termes, on n'a pas convergence pour tout ω mais uniquement pour presque tout ω, ou dit plus rigoureusement, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω. C'est typiquement cette convergence presque sûre qui nous intéresse.

Plan

Définition

Convergence presque sûre

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(\Lambda) = 1$ où l'on a

$$\Lambda := \left\{ \omega \in \Omega \ : \ \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} .$$

Définition

Convergence presque sûre

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(\Lambda) = 1$ où l'on a

$$\Lambda := \left\{ \omega \in \Omega \ : \ \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} .$$

Notation

Si $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X, alors on note

$$X_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} X .$$

Quelques propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \lambda X$.

Quelques propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \lambda X$.

Également, si f est une fonction continue de la variable réelle, alors si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} X$, on a $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} f(X)$.

Caractérisation

Corollaire

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$ et soit X une variable aléatoire définie sur le même espace. On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

Caractérisation

Corollaire

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$ et soit X une variable aléatoire définie sur le même espace. On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

- $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{p.s.}}} X$.

Caractérisation

Corollaire

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$ et soit X une variable aléatoire définie sur le même espace. On a alors l'équivalence entre les deux assertions qui suivent.

- $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} X$.
- Pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \{|X_n - X| \geq \epsilon\}\right) = 0$.

Plan

Définition

Convergence dans L^p ($p \in [1;+\infty[$)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p si les variables aléatoires X_n et X sont dans L^p (c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < \infty$ et $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty$) et si de plus

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0\,.$$

Définition

Convergence dans L^p ($p \in [1; +\infty[$)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p si les variables aléatoires X_n et X sont dans L^p (c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < \infty$ et $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty$) et si de plus

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0\,.$$

On dit aussi que X_n converge en moyenne d'ordre p vers X. Les convergences qui nous intéressent le plus sont pour $p = 1$ et pour $p = 2$.

Définition

Convergence dans L^p ($p \in [1; +\infty[$)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p si les variables aléatoires X_n et X sont dans L^p (c'est-à-dire que l'on a $\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < \infty$ et $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty$) et si de plus

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0\,.$$

On dit aussi que X_n converge en moyenne d'ordre p vers X. Les convergences qui nous intéressent le plus sont pour $p = 1$ et pour $p = 2$.

Notation

Si $(X_n)_n$ converge dans L^p vers X, alors on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X\,.$$

Propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} \lambda X$.

Propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} \lambda X$.

Remarque

L'espace L^p est complet pour $p \in [1; \infty[$ pour la norme $||.||_p$.

Propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} \lambda X$.

Remarque

L'espace L^p est complet pour $p \in [1; \infty[$ pour la norme $||.||_p$.

Remarque

Si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors l'inégalité de Jensen nous assure que pour toute variable aléatoire réelle Y, on a l'inégalité $\mathbb{E}[|Y|^p] \leq \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{p}{q}}$. Ainsi, si une suite $(X_n)_n$ converge vers X dans L^q alors elle converge également vers X dans L^p. En effet, $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \leq (\mathbb{E}[|X_n - X|^q])^{\frac{p}{q}}$.

Propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p} \lambda X$.

Remarque

L'espace L^p est complet pour $p \in [1; \infty[$ pour la norme $||.||_p$.

Remarque

Si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors l'inégalité de Jensen nous assure que pour toute variable aléatoire réelle Y, on a l'inégalité $\mathbb{E}[|Y|^p] \leq \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{p}{q}}$. Ainsi, si une suite $(X_n)_n$ converge vers X dans L^q alors elle converge également vers X dans L^p. En effet, $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \leq (\mathbb{E}[|X_n - X|^q])^{\frac{p}{q}}$.

Lemme

Si la suite de terme général X_n converge vers X dans L^1, alors la suite $(\mathbb{E}[X_n])_n$ converge vers $\mathbb{E}[X]$.

Différence avec l'espace L^p en analyse

En analyse, et pour être plus exact, quand on travaille avec l'intégrale de Lebesgue, l'espace L^p est l'espace des fonctions (ou plutôt des classes d'équivalence de fonctions) telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \mathrm{d}t$.

Différence avec l'espace L^p en analyse

En analyse, et pour être plus exact, quand on travaille avec l'intégrale de Lebesgue, l'espace L^p est l'espace des fonctions (ou plutôt des classes d'équivalence de fonctions) telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \mathrm{d}t$.

Ici, l'espace est très différent. En effet, dans le cas où X est à densité, alors sa norme p est

$$\mathbb{E}[|X|^p] := \int_{\mathbb{R}} |t|^p f_X(t) \mathrm{d}t \,,$$

ce qui n'a rien à voir avec $\int_{\mathbb{R}} |f_X(t)|^p \mathrm{d}t$.

Plan

Définition

Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \ : \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0\,.$$

Définition

Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$, on a la limite suivante :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \ : \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0\,.$$

Notation

Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X, alors on note

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X\,.$$

Premières propriétés

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X + Y$. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \lambda X$.

La convergence en probabilité est faible

La convergence en probabilité est faible

Théorème

Pour tout $p \in [1; +\infty[$, la convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.

La convergence en probabilité est faible

Théorème

Pour tout $p \in [1;+\infty[$, la convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.

Théorème

La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Remarque

La convergence presque sûre dénote un caractère trajectoriel. Ainsi, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) - X(\omega)$ tend vers 0.

Remarque

La convergence presque sûre dénote un caractère trajectoriel. Ainsi, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) - X(\omega)$ tend vers 0.

La convergence dans L^p signifie qu'en moyennant, à n fixé sur toutes les trajectoires de $\omega \mapsto |X_n(\omega) - X(\omega)|$, alors cette moyenne tend vers 0.

Remarque

La convergence presque sûre dénote un caractère trajectoriel. Ainsi, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) - X(\omega)$ tend vers 0.

La convergence dans L^p signifie qu'en moyennant, à n fixé sur toutes les trajectoires de $\omega \mapsto |X_n(\omega) - X(\omega)|$, alors cette moyenne tend vers 0.

La convergence en probabilité, quant à elle, signifie que pour $\epsilon > 0$ fixé, la proportion de trajectoires de $\omega \mapsto X_n(\omega) - X(\omega)$ à l'extérieur de la bande $[-\epsilon; \epsilon]$ tend vers 0.

Réciproques partielles

Théorème

Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$. Alors, il existe une sous-suite de $(X_n)_n$ qui converge presque sûrement vers X.

Réciproques partielles

Théorème

Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$. Alors, il existe une sous-suite de $(X_n)_n$ qui converge presque sûrement vers X.

Proposition

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} f(X)$.

Réciproques partielles

Théorème

Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$. Alors, il existe une sous-suite de $(X_n)_n$ qui converge presque sûrement vers X.

Proposition

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$ et si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} f(X)$.

Théorème

On suppose que la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X. On suppose de plus que X_n est uniformément bornée par une variable $Y \in L^p$ avec $p \in [1; \infty[$. Alors, $X \in L^p$ et X_n converge vers X dans L^p.

Plan

Définition

Convergence en loi

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction réelle, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on a la limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right] .$$

Définition

Convergence en loi

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction réelle, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on a la limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f(X)\right] .$$

Notation

Si $(X_n)_n$ converge en loi vers X, alors on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X .$$

Premier résultat

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers X. Alors, pour toute fonction continue f, $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$.

Premier résultat

Proposition

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers X. Alors, pour toute fonction continue f, $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$.

Preuve

Il suffit de remarquer que pour toute fonction f continue et pour toute fonction continue et bornée ψ, alors $\xi := \psi \circ f$ est une fonction continue et bornée. De fait, la convergence de la suite de terme général $\mathbb{E}[\psi(f(X_n))] = \mathbb{E}[\xi(X_n)]$ vers $\mathbb{E}[\xi(X)] = \mathbb{E}[\psi(f(X))]$ est immédiate.

Lien avec la convergence faible - 1

Théorème

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X. Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

Lien avec la convergence faible - 1

Théorème

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit X une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X. Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

Preuve

On se donne une fonction f continue et bornée. On pose $x_n := \mathbb{E}\left[f(X_n)\right]$. Comme f est bornée, la suite $(x_n)_n$ est aussi bornée. Soit x_∞ une valeur d'adhérence de la suite. Alors, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_\infty$. Or, $X_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbb{P}} X$. On peut donc extraire une sous-suite de $(X_{n_k})_k$ qui converge presque sûrement vers X. Notons $\left(X_{m_p}\right)_p$ cette sous-suite.

Lien avec la convergence faible - 2

La continuité de la fonction f implique

$$f(X_{m_p}) \xrightarrow[p \to +\infty]{\text{p.s.}} f(X)\,.$$

Lien avec la convergence faible - 2

La continuité de la fonction f implique

$$f(X_{m_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{\text{p.s.}} f(X)\,.$$

La fonction f étant bornée, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il vient $\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(X_{m_p}\right)\right] = \mathbb{E}[f(X)]$. Or, $\lim_{p\to\infty} x_{m_p} = x_\infty$ donc $x_\infty = \mathbb{E}[f(X)]$.

Lien avec la convergence faible - 2

La continuité de la fonction f implique

$$f(X_{m_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{\text{p.s.}} f(X)\,.$$

La fonction f étant bornée, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il vient $\lim_{p\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(X_{m_p}\right)\right] = \mathbb{E}[f(X)]$. Or, $\lim_{p\to\infty} x_{m_p} = x_\infty$ donc $x_\infty = \mathbb{E}[f(X)]$.

On conclut en rappelant que la suite $(x_n)_n$ est bornée puis comme elle a une unique valeur d'adhérence qui est $\mathbb{E}[f(X)]$, alors $x_n \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$. Ceci montre que X_n converge en loi vers X quand n tend vers l'infini.

Lemme de Slutsky

Théorème

Soit $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X. On suppose également que $(Y_n)_n$ converge en loi vers une constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, si l'on pose $Z_n := X_n + Y_n$ et $T_n := X_n Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit la convergence en loi de la suite $(Z_n)_n$ vers $X + \lambda$ ainsi que celle de la suite $(T_n)_n$ vers λX.

Lemme de Slutsky

Théorème

Soit $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X. On suppose également que $(Y_n)_n$ converge en loi vers une constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, si l'on pose $Z_n := X_n + Y_n$ et $T_n := X_n Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit la convergence en loi de la suite $(Z_n)_n$ vers $X + \lambda$ ainsi que celle de la suite $(T_n)_n$ vers λX.

Ce lemme est très utile en vue des tests du Khi-deux.

Convergence en loi et fonction de répartition

Théorème

On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers X. Alors, on dispose de la limite

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

pour tout x tel que $F_X(x) = F_X(x^-)$.

Convergence en loi et fonction caractéristique

Premier théorème de Lévy

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ et soit une variable aléatoire X. On note φ_n la fonction caractéristique de X_n et φ celle de X. Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$ quand n tend vers l'infini.

Convergence en loi et fonction caractéristique

Premier théorème de Lévy

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ et soit une variable aléatoire X. On note φ_n la fonction caractéristique de X_n et φ celle de X. Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$ quand n tend vers l'infini.

Théorème

On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t)$ converge vers $\varphi(t)$ quand n tend vers l'infini. On suppose que φ est continue en 0. Alors, il existe une variable aléatoire X dont la loi est entièrement déterminée par φ telle que $\varphi_X = \varphi$ et de plus $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$.

Convergence en loi et fonction caractéristique

Premier théorème de Lévy

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ et soit une variable aléatoire X. On note φ_n la fonction caractéristique de X_n et φ celle de X. Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$ quand n tend vers l'infini.

Théorème

On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t)$ converge vers $\varphi(t)$ quand n tend vers l'infini. On suppose que φ est continue en 0. Alors, il existe une variable aléatoire X dont la loi est entièrement déterminée par φ telle que $\varphi_X = \varphi$ et de plus $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X$.

Remarque

Les deux énoncés précédents sont valables pour des vecteurs aléatoires en dimension d, avec $t \in \mathbb{R}^d$.

Convergence en loi et densité de probabilité

Dans le cas où X_n et X sont à densité, on peut caractériser la convergence en loi avec la densité de probabilité.

Convergence en loi et densité de probabilité

Dans le cas où X_n et X sont à densité, on peut caractériser la convergence en loi avec la densité de probabilité.

Théorème

Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ et soit X une variable aléatoire. On suppose que X_n admet une densité f_{X_n} et que X admet une densité f_X. Si la suite de fonctions $(f_{X_n})_n$ converge simplement vers f_X, alors X_n converge en loi vers X quand n tend vers l'infini.

Plan

Retour sur le paradoxe

Dans l'exemple que l'on a donné, l'on a exhibé une convergence presque sûre. Toutefois, on n'obtient pas un tel résultat en moyenne dans la mesure où les variables aléatoires $m_n X_n$ (qui représentent le gain au lancer n) ne sont pas bornées uniformément. En effet, $|m_n X_n| = |m_n| = 2^{n-1}$.

Retour sur le paradoxe

Dans l'exemple que l'on a donné, l'on a exhibé une convergence presque sûre. Toutefois, on n'obtient pas un tel résultat en moyenne dans la mesure où les variables aléatoires $m_n X_n$ (qui représentent le gain au lancer n) ne sont pas bornées uniformément. En effet, $|m_n X_n| = |m_n| = 2^{n-1}$.

Mieux, on verra avec la loi forte des grands nombres que le gain moyen tend vers 0 presque sûrement.

Retour sur le paradoxe

Dans l'exemple que l'on a donné, l'on a exhibé une convergence presque sûre. Toutefois, on n'obtient pas un tel résultat en moyenne dans la mesure où les variables aléatoires $m_n X_n$ (qui représentent le gain au lancer n) ne sont pas bornées uniformément. En effet, $|m_n X_n| = |m_n| = 2^{n-1}$.

Mieux, on verra avec la loi forte des grands nombres que le gain moyen tend vers 0 presque sûrement. En fait, on a simplement

exhibé l'existence d'une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que le gain au temps τ_n soit égal à n. Toute la question est de savoir si τ_n sera atteint avant la mort du joueur. Également, le joueur dispose-t-il d'assez de fonds pour doubler la mise à chaque fois ?

Liens entre les convergences

Liens entre les convergences