Probabilités et Statistiques

Vecteurs aléatoires

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Vecteur aléatoire

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute application (mesurable) X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Vecteur aléatoire

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute application (mesurable) X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Soit un vecteur aléatoire X. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ donc il s'écrit sous la forme $X(\omega) = (x_1, \cdots, x_n)$. Comme x_i dépend *a priori* de $\omega \in \Omega$, on a donc $X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ où X_i est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, X_i est une variable aléatoire pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Vecteur aléatoire

Définition

On appelle vecteur aléatoire toute application (mesurable) X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Soit un vecteur aléatoire X. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ donc il s'écrit sous la forme $X(\omega) = (x_1, \cdots, x_n)$. Comme x_i dépend *a priori* de $\omega \in \Omega$, on a donc $X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ où X_i est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, X_i est une variable aléatoire pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Définition

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, X_i est la i^e composante du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$.

Équivalence vecteur/composantes

Théorème

La donnée d'un vecteur aléatoire X dans $\mathbb{R}^n$ équivaut à celle de ses n composantes.

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) := \mathbb{P}\left(X \in \mathcal{B}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\}\right) .$$

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) := \mathbb{P}(X \in \mathcal{B}) = \mathbb{P}(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\}) .$$

Définition

La loi de probabilité du vecteur aléatoire X est l'application $\mathbb{P}_X$ qui à toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ fait correspondre la probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, $\mathbb{P}(\{\omega \ : \ X(\omega) \in \mathcal{B}\})$ notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$.

C'est l'image réciproque par l'application X de la probabilité $\mathbb{P}$.

Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$

Soit X un vecteur aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ une partie (borélienne) de $\mathbb{R}^n$. La probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$, est la probabilité d'obtenir un résultat $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) := \mathbb{P}\left(X \in \mathcal{B}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \;:\; X(\omega) \in \mathcal{B}\}\right) .$$

Définition

La loi de probabilité du vecteur aléatoire X est l'application $\mathbb{P}_X$ qui à toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ fait correspondre la probabilité que X ait une réalisation dans $\mathcal{B}$, $\mathbb{P}\left(\{\omega \;:\; X(\omega) \in \mathcal{B}\}\right)$ notée $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B})$.

C'est l'image réciproque par l'application X de la probabilité $\mathbb{P}$.

On parle aussi de mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_i}(E) = \mathbb{P}_X\left(\mathbb{R}^{i-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-i}\right).$$

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_i}(E) = \mathbb{P}_X\left(\mathbb{R}^{i-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-i}\right).$$

Remarque

La loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur aléatoire X est appelée loi conjointe des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui sont ses composantes. Quant aux lois des composantes, on les appelle les marginales.

Loi conjointe et lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_i}(E) = \mathbb{P}_X\left(\mathbb{R}^{i-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-i}\right) .$$

Remarque

La loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur aléatoire X est appelée loi conjointe des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui sont ses composantes. Quant aux lois des composantes, on les appelle les marginales.

Remarque

La loi du vecteur X détermine les lois marginales. Néanmoins, la réciproque est en général fausse.

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On appelle alors fonction de répartition de X la fonction F_X de $\mathbb{R}^n$ dans $[0;1]$ définie pour tout $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ par

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On appelle alors fonction de répartition de X la fonction F_X de $\mathbb{R}^n$ dans $[0;1]$ définie pour tout $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(t_1, \cdots, t_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \cdots, X_n \leq t_n) .$$

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors F_X est croissante et continue à droite par rapport à chaque variable t_i. De plus, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors F_X est croissante et continue à droite par rapport à chaque variable t_i. De plus, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\lim_{t_i \to -\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n\right) = 0$$

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors F_X est croissante et continue à droite par rapport à chaque variable t_i. De plus, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\lim_{t_i \to -\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n\right) = 0$$

et

$$\lim_{t_1, \cdots, t_n \longrightarrow +\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_n\right) = 1\,.$$

Obtenir la fonction de répartition de chaque marginale

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors, si F_{X_i} est la fonction de répartition de la composante X_i, on a

Obtenir la fonction de répartition de chaque marginale

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors, si F_{X_i} est la fonction de répartition de la composante X_i, on a

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_1, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_n \to +\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n\right).$$

Obtenir la fonction de répartition de chaque marginale

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction de répartition F_X. Alors, si F_{X_i} est la fonction de répartition de la composante X_i, on a

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_1,\cdots,t_{i-1},t_{i+1},\cdots,t_n \to +\infty} F_X\left(t_1, \cdots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n\right).$$

Remarque

Ainsi la fonction de répartition du vecteur aléatoire X détermine celles de ses composantes. La réciproque est évidemment fausse dans le cas général.

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Définition

Contrairement à la fonction de répartition dont l'intérêt est limité (bien que non nul) en dimension supérieure ou égale à deux, la fonction caractéristique est particulièrement utile.

Définition

Contrairement à la fonction de répartition dont l'intérêt est limité (bien que non nul) en dimension supérieure ou égale à deux, la fonction caractéristique est particulièrement utile.

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$. On appelle alors fonction caractéristique de X la fonction complexe φ_X de n variables réelles $(t_1, \cdots, t_n) =: t$ définie par

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle t, X\rangle\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\left(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n\right)\right)\right] .$$

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction caractéristique φ_X. Alors, on a les deux résultats suivants.

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction caractéristique φ_X. Alors, on a les deux résultats suivants.

1. φ_X est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0, \cdots, 0) = 1$.

Résultats

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ et de fonction caractéristique φ_X. Alors, on a les deux résultats suivants.

1. φ_X est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0, \cdots, 0) = 1$.
2. Pour toute matrice carrée et symétrique A de taille n et pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t,b\rangle}\varphi_X(tA)\,.$$

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que ce vecteur aléatoire est discret si l'ensemble de ses réalisations possibles $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Définition

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que ce vecteur aléatoire est discret si l'ensemble de ses réalisations possibles $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose $S := X(\Omega)$ et on suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors :

$$\mathbb{P}_X = \sum_{s \in S} \mathbb{P}\,(X = s)\,\delta_s\,.$$

Définition

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que ce vecteur aléatoire est discret si l'ensemble de ses réalisations possibles $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose $S := X(\Omega)$ et on suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors :

$$\mathbb{P}_X = \sum_{s \in S} \mathbb{P}\,(X = s)\,\delta_s\,.$$

Ici, δ_s est une distribution multidimensionnelle.

Obtenir les lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

Obtenir les lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_i}(x) = \sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_i = x}} \mathbb{P}_X(s)\,.$$

Obtenir les lois marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est fini ou infini dénombrable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}_{X_i}(x) = \sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_i = x}} \mathbb{P}_X(s)\,.$$

En d'autres termes,

$$\mathbb{P}_{X_i} = \sum_{x \in X_i(\Omega)} \left(\sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_i = x}} \mathbb{P}_X(s) \right) \delta_x\,.$$

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ (c'est-à-dire que X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$). Soit $S := X_1 + X_2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ (c'est-à-dire que X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\mathbb{N}$). Soit $S := X_1 + X_2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k) \, .$$

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Définition - 1

Définition

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est à densité s'il existe une fonction f_X de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour toute partie $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, on ait

Définition - 1

Définition

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est à densité s'il existe une fonction f_X de n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour toute partie $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{B}} f_X(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \,.$$

Définition - 2

On peut alors écrire

$$\mathbb{P}_X = f_X \mathrm{d}x \,.$$

Le $\mathrm{d}x$ sert ici à signaler que la variable est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition - 2

On peut alors écrire

$$\mathbb{P}_X = f_X \mathrm{d}x\,.$$

Le $\mathrm{d}x$ sert ici à signaler que la variable est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque

Comme dans le cas des variables aléatoires réelles, l'intégrale sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ de f_X vaut 1.

Densité des composantes

Théorème

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que X est à densité. Alors, chacune de ses composantes X_i est à densité et de plus

Densité des composantes

Théorème

Soit un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi $\mathbb{P}_X$. On suppose que X est à densité. Alors, chacune de ses composantes X_i est à densité et de plus

$$f_{X_i}(x) = \int_{\widetilde{x_i} \in \mathbb{R}^{n-1}} f_X\left(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n\right) \mathrm{d}\widetilde{x_i}\,,$$

où $\widetilde{x_i} := (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Exemple

Dans le cas d'un couple de variables aléatoires (X, Y), on a

$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}^2$. Soit $S := X_1 + X_2$. Alors, S est une variable aléatoire à densité. De plus, sa densité f_S satisfait :

Loi de la somme des marginales

Théorème

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}^2$. Soit $S := X_1 + X_2$. Alors, S est une variable aléatoire à densité. De plus, sa densité f_S satisfait :

$$f_S(x) = \int_{u\in\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(u, x-u)\mathrm{d}u\,.$$

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. **Indépendance des composantes**
8. Lois conditionnelles

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_i,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_i,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_i,
  $\mathbb{P}\left(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \in I_i\right)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X\left(x_1, \cdots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$,
- pour tout $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_X\left(u_1, \cdots, u_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(u_i)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_i,
  $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$,
- pour tout $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(u_i)$,
- dans le cas discret, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$,
  $\mathbb{P}(X = (x_1, \cdots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$,

Conditions d'indépendance

Théorème

Si X est à densité, on note f_X sa densité et f_{X_i} celle de la composante X_i. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes,
- pour tous les intervalles I_i, $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \cdots, X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in I_i)$,
- pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $F_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$,
- pour tout $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(u_i)$,
- dans le cas discret, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = (x_1, \cdots, x_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$,
- dans le cas à densité, pour tout $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $f_X(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$.

Plan

1. Premières définitions
2. Loi d'un vecteur aléatoire
3. Fonction de répartition
4. Fonction caractéristique
5. Vecteurs aléatoires discrets
6. Vecteurs aléatoires à densité
7. Indépendance des composantes
8. Lois conditionnelles

Définition - 1

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $y \in Y(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ l'application qui à $x \in X(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(Y = y)} =: \mathbb{P}\left(X = x \mid Y = y\right) .$$

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $y \in Y(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ l'application qui à $x \in X(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(Y = y)} =: \mathbb{P}\left(X = x \mid Y = y\right) .$$

Remarque

La connaissance de la loi de Y et des lois conditionnelles de X sachant $\{Y = y\}$ pour chacun des $y \in Y(\Omega)$ est suffisante pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). En particulier, on peut alors retrouver la loi de X.

Définition - 2

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $x \in X(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ l'application qui à $y \in Y(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(X = x)} =: \mathbb{P}\left(Y = y \mid X = x\right) .$$

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour $x \in X(\Omega)$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ l'application qui à $y \in Y(\Omega)$ associe

$$\frac{\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)}{\mathbb{P}(X = x)} =: \mathbb{P}\left(Y = y \mid X = x\right) .$$

Remarque

La connaissance de la loi de X et des lois conditionnelles de Y sachant $\{X = x\}$ pour chacun des $x \in X(\Omega)$ est suffisante pour déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). En particulier, on peut alors retrouver la loi de Y.

Définition - 3

L'équivalent continu de ces probabilités conditionnelles est la densité conditionnelle, que l'on présente maintenant.

Définition - 3

L'équivalent continu de ces probabilités conditionnelles est la densité conditionnelle, que l'on présente maintenant.

Définition

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires à densité. Pour $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_Y(y) > 0$, on appelle densité conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ l'application $f_{X|Y=y}$qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f_{X|Y=y}(x) := \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} .$$