Probabilités et Statistiques

Variables aléatoires à densité : caractéristiques

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Introduction

Dans cette section, on regarde les grandeurs habituelles des variables aléatoires réelles à densité. Les concepts sont très similaires à ceux présentés dans le cas des variables aléatoires réelles discrètes

Plan

Définition

Définition

Soit une variable aléatoire réelle à densité X. Soit f_X la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle X. On dit que X admet une espérance si l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) \mathrm{d}x < \infty \,.$$

Définition

Définition

Soit une variable aléatoire réelle à densité X. Soit f_X la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle X. On dit que X admet une espérance si l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) \mathrm{d}x < \infty \,.$$

Dans ce cas, l'espérance de X est égale à

$$\mathbb{E}\left[X\right] := \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \mathrm{d}x \,.$$

De l'intérêt de l'hypothèse

Remarque

On doit supposer la finitude de la quantité $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) \mathrm{d}x$ sans quoi l'espérance n'a pas de sens du point de vue de la convergence dans L^1. Par exemple, si l'on considère une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy c'est-à-dire telle que $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, alors $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x$ ne converge pas et l'on en déduit que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exemple

Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, $\mathcal{U}_{[0;1]}$. Ici, on a $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$. Calculons l'espérance de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Formule de transfert - 1

Théorème

Supposons que X soit une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité f_X. Alors, on a

à condition que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, f_X(x) \mathrm{d}x$ converge.

Formule de transfert - 1

Théorème

Supposons que X soit une variable aléatoire réelle continue de densité de probabilité f_X. Alors, on a

$$\mathbb{E}\left[\psi(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) f_X(x) \mathrm{d}x \,,$$

à condition que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| \, f_X(x) \mathrm{d}x$ converge.

Formule de transfert - 2

Exemple : Moment à l'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $g_n(x) := x^n$. On peut alors calculer, si elle existe, la quantité

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x) \mathrm{d}x \,.$$

Cette quantité est appelée "moment d'ordre n de la variable aléatoire réelle X".

Formule de transfert - 2

Exemple : Moment à l'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $g_n(x) := x^n$. On peut alors calculer, si elle existe, la quantité

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x) \mathrm{d}x \,.$$

Cette quantité est appelée "moment d'ordre n de la variable aléatoire réelle X".

Exercice

Soit $n \geq 1$. Soit X une variable aléatoire réelle à densité dont la loi de probabilité est la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, $\mathcal{U}_{[0;1]}$.
Calculer le moment d'ordre n de X.

Linéarité de l'espérance

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels. On a alors

$$\mathbb{E}\left[\lambda_0 + \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n\right] = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \lambda_n \mathbb{E}[X_n] .$$

Espérance d'une variable aléatoire réelle positive

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toutes ses réalisations possibles positives. Alors son espérance est positive.

$$X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0\,.$$

Espérance d'une variable aléatoire réelle positive

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toutes ses réalisations possibles positives. Alors son espérance est positive.

$$X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0\,.$$

Preuve

Si X est à densité et si $X \geq 0$, alors $F_X(0) = 0$ et donc $F_X(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$ d'où la densité f_X est nulle sur $]-\infty; 0[$. Ainsi, on a

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x \geq 0\,,$$

en utilisant la positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle.

Espérance d'une variable aléatoire réelle négative

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toutes ses réalisations possibles négatives. Alors son espérance est négative.

$$X \leq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \leq 0 \,.$$

Espérance d'une variable aléatoire réelle négative

Soit une variable aléatoire réelle X qui a toutes ses réalisations possibles négatives. Alors son espérance est négative.

$$X \leq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[X] \leq 0 \,.$$

Preuve

$-X$ est positive donc son espérance est positive. Or, $\mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}[-X] \leq 0$ d'après la linéarité de l'espérance.

Espérance d'un produit (avec indépendance) - 1

Proposition

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. On suppose également que chacune de ces variables aléatoires réelles admet une espérance. Alors, la variable aléatoire réelle $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance et de plus :

Espérance d'un produit (avec indépendance) - 1

Proposition

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. On suppose également que chacune de ces variables aléatoires réelles admet une espérance. Alors, la variable aléatoire réelle $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance et de plus :

$$\mathbb{E}\left[X_1 \times \cdots \times X_n\right] = \mathbb{E}[X_1] \times \cdots \times \mathbb{E}[X_n] .$$

Espérance d'un produit (avec indépendance) - 2

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. Soient n fonctions bornées $f_1, \cdots, f_n$. Alors, la variable aléatoire réelle $f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)$ admet une espérance et de plus :

Espérance d'un produit (avec indépendance) - 2

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons que les n variables aléatoires réelles sont mutuellement indépendantes. Soient n fonctions bornées $f_1, \cdots, f_n$. Alors, la variable aléatoire réelle $f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)$ admet une espérance et de plus :

$$\mathbb{E}\left[f_1(X_1) \times \cdots \times f_n(X_n)\right] = \mathbb{E}[f_1(X_1)] \times \cdots \times \mathbb{E}[f_n(X_n)] .$$

Inégalité de Markov

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons qu'elle admette une espérance finie c'est-à-dire que l'on ait $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Alors, pour tout $R > 0$, on a

Inégalité de Markov

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Supposons qu'elle admette une espérance finie c'est-à-dire que l'on ait $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Alors, pour tout $R > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq R\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{R}\,.$$

Variable aléatoire réelle centrée

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X à densité est centrée lorsque son espérance mathématique est nulle.

Variable aléatoire réelle centrée

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X à densité est centrée lorsque son espérance mathématique est nulle.

Centrer une variable aléatoire réelle X, c'est lui retrancher son espérance, c'est-à-dire considérer la variable aléatoire réelle $X - \mathbb{E}[X]$.

Plan

Variance

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, la variance de la variable aléatoire réelle X est

Variance

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, la variance de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma^2(X) = \mathrm{Var}\,(X) := \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\}\,.$$

Variance

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, la variance de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma^2(X) = \mathrm{Var}\,(X) := \mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\} .$$

Cette quantité est toujours définie mais elle peut éventuellement être égale à l'infini. Si elle est finie, on dit que la variance de X est finie. D'après la positivité de l'espérance d'une variable aléatoire réelle positive, on en déduit que $\mathrm{Var}(X)$ est positive.

Écart-type

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, l'écart-type de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\}}\,.$$

Écart-type

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance. Alors, par définition, l'écart-type de la variable aléatoire réelle X est

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left\{(X - \mathbb{E}[X])^2\right\}}\,.$$

La variance et l'écart-type sont des indicateurs de la dispersion de la loi de X autour de son espérance.

Exercice

Exercice

Soit une variable aléatoire réelle à densité X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X suit la loi de Laplace c'est-à-dire que sa densité f_X est :

$$f_X(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|}\,.$$

Calculer la variance de X.

Calcul alternatif de la variance

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, $\mathbb{E}[X^2]$ est finie et de plus

Calcul alternatif de la variance

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, $\mathbb{E}[X^2]$ est finie et de plus

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - 1

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - 1

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{t^2}\,.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - 2

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $s > 0$, on a l'inégalité

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev - 2

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Alors, pour tout $s > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq s\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}\right) \leq \frac{1}{s^2}\,.$$

Calcul de $\mathrm{Var}[aX]$ avec $a \in \mathbb{R}$

En utilisant les diverses hypothèses sur l'espérance, comme dans le cas discret, on a

Calcul de $\mathrm{Var}\left[aX\right]$ avec $a \in \mathbb{R}$

En utilisant les diverses hypothèses sur l'espérance, comme dans le cas discret, on a

$$\mathrm{Var}[aX] = a^2\mathrm{Var}[X] \text{ et } \sqrt{\mathrm{Var}[aX]} = |a|\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,.$$

Variance de la somme

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, on a :

Variance de la somme

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, on a :

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}[X]\right)\left(Y-\mathbb{E}[Y]\right)\right]\,.$$

Covariance

Définition

On appelle covariance de X et Y, et l'on note $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$ la quantité

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right] .$$

Covariance

Définition

On appelle covariance de X et Y, et l'on note $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ la quantité

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right] .$$

Remarque

On peut observer : $\mathrm{Cov}\,(X, X) = \mathrm{Var}[X]$.

Covariance

Définition

On appelle covariance de X et Y, et l'on note $\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$ la quantité

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)\left(Y - \mathbb{E}[Y]\right)\right] .$$

Remarque

On peut observer : $\mathrm{Cov}\left(X, X\right) = \mathrm{Var}[X]$.

Ainsi,

$$\mathrm{Var}\left[X + Y\right] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) .$$

Variance de la somme (avec indépendance)

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que les n variables aléatoires réelles admettent une espérance et une variance finie. On suppose également qu'elles sont indépendantes deux à deux. Alors, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances :

Variance de la somme (avec indépendance)

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles $X_1, \cdots, X_n$ définies sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que les n variables aléatoires réelles admettent une espérance et une variance finie. On suppose également qu'elles sont indépendantes deux à deux. Alors, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances :

$$\mathrm{Var}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \mathrm{Var}[X_1] + \cdots + \mathrm{Var}[X_n] \, .$$

Variance de la translatée

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a

Variance de la translatée

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X admet une espérance ainsi qu'une variance finie. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\mathrm{Var}\left[X + a\right] = \mathrm{Var}[X]\,.$$

Variable aléatoire réelle réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est réduite lorsque sa variance est égale à 1. Ainsi, réduire une variable aléatoire réelle consiste à la diviser par son écart-type.

Variable aléatoire réelle réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est réduite lorsque sa variance est égale à 1. Ainsi, réduire une variable aléatoire réelle consiste à la diviser par son écart-type.

Ainsi, une variable aléatoire réelle X est dite centrée, réduite si l'on a $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{Var}[X] = 1$. Soit une variable aléatoire réelle X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On suppose que X a une espérance et admet une variance finie. Alors, la variable aléatoire réelle

$$Y := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}$$

est centrée et réduite.

Plan

Mélanges

On peut se demander ce qu'il se passe lorsque l'on considère des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité ensemble. Par exemple, quelle est l'espérance de la somme d'une variable aléatoire réelle à densité et d'une variable aléatoire discrète ? Et l'espérance du produit si elles sont indépendantes ?

Mélanges

On peut se demander ce qu'il se passe lorsque l'on considère des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité ensemble. Par exemple, quelle est l'espérance de la somme d'une variable aléatoire réelle à densité et d'une variable aléatoire discrète ? Et l'espérance du produit si elles sont indépendantes ?

Tout est similaire. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \, ,$$

quelle que soit la nature des variables aléatoires.

Mélanges

On peut se demander ce qu'il se passe lorsque l'on considère des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité ensemble. Par exemple, quelle est l'espérance de la somme d'une variable aléatoire réelle à densité et d'une variable aléatoire discrète ? Et l'espérance du produit si elles sont indépendantes ?

Tout est similaire. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\,,$$

quelle que soit la nature des variables aléatoires. De même, si X est indépendante de Y, alors l'espérance du produit est le produit des espérances. De fait, la variance de la somme est aussi la somme des variances.

Mélanges

On peut se demander ce qu'il se passe lorsque l'on considère des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité ensemble. Par exemple, quelle est l'espérance de la somme d'une variable aléatoire réelle à densité et d'une variable aléatoire discrète ? Et l'espérance du produit si elles sont indépendantes ?

Tout est similaire. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\,,$$

quelle que soit la nature des variables aléatoires. De même, si X est indépendante de Y, alors l'espérance du produit est le produit des espérances. De fait, la variance de la somme est aussi la somme des variances.

Il convient de garder à l'esprit qu'au moyen de la théorie de la mesure, les deux grandes familles de variables aléatoires ne sont pas si différentes qu'il n'y paraît.