Probabilités et Statistiques

Variables aléatoires à densité

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

1. Introduction
2. Densité de probabilité
   - Existence
   - Définition
   - Exemple
   - Exemple
   - Lien avec la fonction de répartition
   - Propriétés
3. Calcul de la probabilité d'un intervalle
   - Probabilité d'un point
   - Probabilité d'un intervalle

Plan

1. Introduction
2. Densité de probabilité
3. Calcul de la probabilité d'un intervalle

Introduction

L'autre grande famille des variables aléatoires réelles est celle des variables aléatoires réelles à densité.

Introduction

L'autre grande famille des variables aléatoires réelles est celle des variables aléatoires réelles à densité.

La différence avec les variables aléatoires discrètes est que les sommes (quand on considère l'espérance) deviennent des intégrales.

Introduction

L'autre grande famille des variables aléatoires réelles est celle des variables aléatoires réelles à densité.

La différence avec les variables aléatoires discrètes est que les sommes (quand on considère l'espérance) deviennent des intégrales.

Il convient de noter que si parfois le cas à densité est plus complexe à étudier, il est parfois plus simple. Cela dépend également du goût de chacun.

Introduction

L'autre grande famille des variables aléatoires réelles est celle des variables aléatoires réelles à densité.

La différence avec les variables aléatoires discrètes est que les sommes (quand on considère l'espérance) deviennent des intégrales.

Il convient de noter que si parfois le cas à densité est plus complexe à étudier, il est parfois plus simple. Cela dépend également du goût de chacun.

Remarque

Il existe des variables aléatoires réelles qui ne sont ni discrètes ni à densité. Ainsi, une variable aléatoire dont la fonction de répartition est égale à l'escalier du diable sur $[0;1]$ n'est pas discrète et bien qu'elle soit donc continue, elle n'est pas à densité.

Plan

1. Introduction
2. Densité de probabilité
   - Existence
   - Définition
   - Exemple
   - Exemple
   - Lien avec la fonction de répartition
   - Propriétés
3. Calcul de la probabilité d'un intervalle

Existence - 1

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X. On suppose que sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose aussi qu'elle est dérivable sauf sur un ensemble dénombrable de points. Alors, cette fonction dérivée, $f_X := F_X'$ est appelée la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle X. Et, on dit que la variable aléatoire réelle X est à densité.

Existence - 1

Définition

Soit une variable aléatoire réelle X. On suppose que sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose aussi qu'elle est dérivable sauf sur un ensemble dénombrable de points. Alors, cette fonction dérivée, $f_X := F_X'$ est appelée la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle X. Et, on dit que la variable aléatoire réelle X est à densité.

On peut écrire ici

$$\mathbb{P}X^{-1} = \mathbb{P}_X = f_X \mathrm{d}x \, .$$

Le $\mathrm{d}x$ sert ici à signaler que la variable est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Existence - 2

Conséquence

Une variable aléatoire réelle discrète n'admet pas de densité car sa fonction de répartition n'est pas continue.

Existence - 2

Conséquence

Une variable aléatoire réelle discrète n'admet pas de densité car sa fonction de répartition n'est pas continue.

Remarque

Une variable aléatoire réelle discrète admet une densité au sens des distributions. Il convient donc de garder à l'esprit que les deux grands types de variables aléatoires réelles ne sont pas si différents.

Existence - 2

Conséquence

Une variable aléatoire réelle discrète n'admet pas de densité car sa fonction de répartition n'est pas continue.

Remarque

Une variable aléatoire réelle discrète admet une densité au sens des distributions. Il convient donc de garder à l'esprit que les deux grands types de variables aléatoires réelles ne sont pas si différents.

Précision

La véritable définition d'une densité est un peu plus subtile que celle donnée dans la Définition. En effet, il faut en fait que la fonction F_X soit dérivable presque partout pour la mesure de Lebesgue. Toutefois, dans ce cours, on a décidé de ne pas parler de théorie de la mesure. Par ailleurs, les lois de probabilité continues usuelles satisfont cette Définition.

Définition

Définition

Une variable aléatoire réelle X qui admet une densité de probabilité est dite à densité.

Définition

Définition

Une variable aléatoire réelle X qui admet une densité de probabilité est dite à densité.

Définition alternative

Soit une variable aléatoire réelle X. On suppose qu'il existe une fonction f positive et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1 telle que pour tout ensemble E, on ait l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}(X \in E) = \int_E f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Alors, la variable aléatoire X est à densité et $f_X = f$.

Exemple - 1

Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, $\mathcal{U}_{[0;1]}$, lorsqu'elle admet la fonction de répartition suivante :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \end{cases} .$$

On remarque que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable sauf en $t = 0$ et en $t = 1$.

Exemple - 2

Et, la dérivée de F_X est

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < t \end{cases} .$$

Ainsi, une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{U}_{[0;1]}$ est à densité et sa densité est égale à $\mathbb{1}_{[0;1]}$.

Lien avec la fonction de répartition

Par définition, on a $F_X' = f_X$ presque partout. Donc F_X est une primitive de f_X. Or, $F_X(-\infty) = 0$. Conséquemment, il vient

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\mathrm{d}s\,.$$

Lien avec la fonction de répartition

Par définition, on a $F'_X = f_X$ presque partout. Donc F_X est une primitive de f_X. Or, $F_X(-\infty) = 0$. Conséquemment, il vient

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\mathrm{d}s\,.$$

Exercice

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'Égalité est vérifiée pour la loi uniforme présentée dans l'Exemple précédent.

Propriétés - 1

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X à densité. Soit f_X sa densité de probabilité. Alors, la fonction f_X est positive : $f_X(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Propriétés - 1

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X à densité. Soit f_X sa densité de probabilité. Alors, la fonction f_X est positive : $f_X(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve

En effet, la fonction de répartition F_X est croissante. Donc sa dérivée est positive ou nulle. Or, la dérivée de F_X est égale à f_X presque partout.

Propriétés - 2

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X à densité. Soit f_X sa densité de probabilité. Alors, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s = 1\,.$$

Propriétés - 2

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X à densité. Soit f_X sa densité de probabilité. Alors, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s = 1\,.$$

Preuve

En effet,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\mathrm{d}s\,.$$

Or, $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$. Ainsi, on en déduit

$$1 = \lim_{t\to+\infty} F_X(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s\,.$$

Propriétés - 3

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X à densité. Soit f_X sa densité de probabilité. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}\left(X > t\right) = \int_t^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s\,.$$

Propriétés - 3

Proposition

Soit une variable aléatoire réelle X à densité. Soit f_X sa densité de probabilité. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}\left(X > t\right) = \int_t^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s\,.$$

Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t) = 1 - \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\mathrm{d}s \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\mathrm{d}s \\ = \int_t^{+\infty} f_X(s)\mathrm{d}s\,,\end{aligned}$$

par la relation de Chasles.

Propriétés - 4

Théorème

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est positive ou nulle et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1. Alors, il existe un espace fondamental Ω, muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et une variable aléatoire réelle à densité X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que f est la densité de probabilité de X.

Plan

1. Introduction
2. Densité de probabilité
3. Calcul de la probabilité d'un intervalle
   - Probabilité d'un point
   - Probabilité d'un intervalle

Probabilité d'un point - 1

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X. On suppose que la fonction de répartition F_X est continue au point a. Alors, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Probabilité d'un point - 1

Théorème

Soit une variable aléatoire réelle X. On suppose que la fonction de répartition F_X est continue au point a. Alors, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Preuve

$$\mathbb{P}\left(a - \delta < X \leq a + \delta\right) = F_X(a + \delta) - F_X(a - \delta)\,,$$

pour tout $\delta > 0$. F_X est continue en a donc le membre de droite tend vers 0 quand δ tend vers 0. Or,
$\{X = a\} \subset \{a - \delta < X \leq a + \delta\}$ pour tout $\delta > 0$. D'où

$$\mathbb{P}(X = a) \leq \mathbb{P}\left(a - \delta < X \leq a + \delta\right) \longrightarrow 0\,,$$

quand δ tend vers 0. La preuve est ainsi achevée.

Probabilité d'un point - 2

Conséquence

Soit une variable aléatoire réelle à densité X. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X = t) = 0$. En effet, comme la variable aléatoire réelle X est à densité, sa fonction de répartition est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Probabilité d'un point - 2

Conséquence

Soit une variable aléatoire réelle à densité X. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X = t) = 0$. En effet, comme la variable aléatoire réelle X est à densité, sa fonction de répartition est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Ainsi, contrairement aux variables aléatoires réelles dont l'ensemble des réalisations est dénombrable, on ne peut pas caractériser la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle à densité en connaissant uniquement les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(X = t)$. Ceci vient du fait que l'ensemble $\{t\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. On doit donc regarder la probabilité que X soit dans un intervalle de mesure de Lebesgue strictement positive.

Probabilité d'un intervalle - 1

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On pose $I_1 := [a; b]$, $I_2 :=]a; b]$, $I_3 := [a; b[$, $I_4 :=]a; b[$. Alors, on a

$$\mathbb{P}(X \in I_1) = \mathbb{P}(X \in I_2) = \mathbb{P}(X \in I_3) = \mathbb{P}(X \in I_4) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t\,.$$

Probabilité d'un intervalle - 1

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On pose $I_1 := [a; b]$, $I_2 :=]a; b]$, $I_3 := [a; b[$, $I_4 :=]a; b[$. Alors, on a

$$\mathbb{P}\left(X \in I_1\right) = \mathbb{P}\left(X \in I_2\right) = \mathbb{P}\left(X \in I_3\right) = \mathbb{P}\left(X \in I_4\right) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t\,.$$

On sait en effet : $\mathbb{P}\left(a < X \leq b\right) = F_X(b) - F_X(a)$. Et, comme $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$, l'Égalité est vérifiée de par la relation de Chasles.

Probabilité d'un intervalle - 2

Exercice

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de loi $\mathcal{U}_{[0;1]}$. Calculer la quantité $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.