Probabilités et Statistiques

Fonctions génératrices

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Idée globale

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une loi correspond à la transformée de Fourier de celle-ci. En particulier, la fonction caractéristique caractérise la loi.

Idée globale

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une loi correspond à la transformée de Fourier de celle-ci. En particulier, la fonction caractéristique caractérise la loi.

De même, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les fonctions génératrices sont un outil de calcul commode. Elles se prêtent bien au calcul de loi de sommes de variables aléatoires indépendantes, ainsi qu'à l'étude de la convergence en loi.

Idée globale

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une loi correspond à la transformée de Fourier de celle-ci. En particulier, la fonction caractéristique caractérise la loi.

De même, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les fonctions génératrices sont un outil de calcul commode. Elles se prêtent bien au calcul de loi de sommes de variables aléatoires indépendantes, ainsi qu'à l'étude de la convergence en loi.

En particulier, elle joue un rôle non négligeable dans le problème de l'extinction des grands noms.

Idée globale

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une loi correspond à la transformée de Fourier de celle-ci. En particulier, la fonction caractéristique caractérise la loi.

De même, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les fonctions génératrices sont un outil de calcul commode. Elles se prêtent bien au calcul de loi de sommes de variables aléatoires indépendantes, ainsi qu'à l'étude de la convergence en loi.

En particulier, elle joue un rôle non négligeable dans le problème de l'extinction des grands noms.

Ensemble des réalisations possibles

Dans tout ce chapitre, X est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Plan

Définition

Définition

La fonction génératrice de la variable aléatoire X est définie comme étant la fonction de la variable réelle :

$$G_X(s) := \mathbb{E}\left(s^X\right) .$$

Quelques propriétés - 1

Proposition

Le domaine de définition de G_X contient l'intervalle $[-1;1]$. De plus, on a $G_X(1) = 1$ et pour tout $s \in [-1;1]$:

$$|G_X(s)| \leq 1\,.$$

Quelques propriétés - 1

Proposition

Le domaine de définition de G_X contient l'intervalle $[-1;1]$. De plus, on a $G_X(1) = 1$ et pour tout $s \in [-1;1]$:

$$|G_X(s)| \leq 1\,.$$

Proposition

Pour tout $s \in [-1;1]$, on a :

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k\,,$$

où $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ et où on adopte la convention $0^0 = 1$.

Quelques propriétés - 2

Proposition

La fonction génératrice G_X est continue sur $[-1;1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

Quelques propriétés - 2

Proposition

La fonction génératrice G_X est continue sur $[-1;1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

Preuve

Il suffit de remarquer que G_X est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En effet, par définition, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 < \infty$.

Quelques propriétés - 3

Proposition

La fonction génératrice G_X restreinte à l'intervalle $[-1;1]$ caractérise la loi de X. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(X = n\right) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}\,.$$

Quelques propriétés - 3

Proposition

La fonction génératrice G_X restreinte à l'intervalle $[-1;1]$ caractérise la loi de X. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} .$$

Exercice

Démontrer la Proposition.

Plan

1. Philosophie des fonctions génératrices

2. Définition et premières propriétés

3. Fonctions génératrices des lois classiques
   - Si $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(p)$
   - Si $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(n, p)$
   - Si $\mathbb{P}_X = \mathcal{P}(\lambda)$
   - Pour d'autres lois discrètes usuelles

4. Résultats importants

Loi de Bernoulli

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on a :

$$G_X(s) = ps + (1 - p)\,.$$

Loi de Bernoulli

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on a :

$$G_X(s) = ps + (1-p)\,.$$

Exercice

Démontrer la Formule.

Loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

$$G_X(s) = (ps + (1-p))^n \ .$$

Loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

$$G_X(s) = (ps + (1-p))^n \ .$$

En effet :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, s^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (ps + (1-p))^n \ . \end{aligned}$$

Loi binomiale

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

$$G_X(s) = (ps + (1-p))^n \ .$$

En effet :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\, s^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (ps + (1-p))^n \ . \end{aligned}$$

On peut observer que la fonction génératrice de la loi binomiale de paramètres n et p est la puissance n-ième de la fonction génératrice de la loi de Bernoulli de paramètre p.

Loi de Poisson

Si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on a :

$$G_X(s) = \exp\left\{\lambda(s-1)\right\} .$$

Loi de Poisson

Si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on a :

$$G_X(s) = \exp\left\{\lambda(s-1)\right\} .$$

En effet :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X=k\right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k \\ &= \exp\left\{-\lambda\right\} \exp\left\{\lambda s\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda(s-1)\right\} . \end{aligned}$$

Autres lois discrètes usuelles

Autres lois discrètes usuelles

- Si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1; N]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s}{N}\frac{1-s^N}{1-s}$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.

Autres lois discrètes usuelles

- Si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1;N]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s}{N}\frac{1-s^N}{1-s}$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi triangulaire discrète sur $[\![2;12]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s^2}{36}\left(\frac{1-s^6}{1-s}\right)^2$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.

Autres lois discrètes usuelles

- Si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1; N]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s}{N}\frac{1-s^N}{1-s}$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi triangulaire discrète sur $[\![2; 12]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s^2}{36}\left(\frac{1-s^6}{1-s}\right)^2$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi géométrique de paramètre p, alors $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$ pour tout $s \in [-1; 1]$.

Autres lois discrètes usuelles

- Si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1;N]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s}{N}\frac{1-s^N}{1-s}$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi triangulaire discrète sur $[\![2;12]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s^2}{36}\left(\frac{1-s^6}{1-s}\right)^2$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi géométrique de paramètre p, alors $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$ pour tout $s \in [-1;1]$.
- Si X suit la loi de Benford, alors $G_X(s) = \sum_{k=1}^{9} s^k \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$ pour tout s.

Autres lois discrètes usuelles

- Si X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1; N]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s}{N}\frac{1-s^N}{1-s}$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi triangulaire discrète sur $[\![2; 12]\!]$, alors $G_X(s) = \frac{s^2}{36}\left(\frac{1-s^6}{1-s}\right)^2$ pour $s \neq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- Si X suit la loi géométrique de paramètre p, alors $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$ pour tout $s \in [-1; 1]$.
- Si X suit la loi de Benford, alors $G_X(s) = \sum_{k=1}^{9} s^k \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$ pour tout s.
- Si X suit la loi logarithmique, alors $G_X(s) = \frac{\log(1-ps)}{\log(1-p)}$ pour tout $s \in [-1; 1]$.

Plan

Fonction génératrice de la somme

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. On a alors

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)\,,$$

pour tout $s \in [-1;1]$.

Fonction génératrice de la somme

Théorème

Soient deux variables aléatoires réelles X et Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. On a alors

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)\,,$$

pour tout $s \in [-1;1]$.

Preuve

On applique la définition de $G_{X+Y}(s)$ comme suit

$$G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left\{s^{X+Y}\right\} = \mathbb{E}\left\{s^X s^Y\right\}\,.$$

Comme X et Y sont indépendantes, s^X et s^Y le sont également et donc on obtient

$$\mathbb{E}\left\{s^X s^Y\right\} = \mathbb{E}\left[s^X\right] \times \mathbb{E}\left[s^Y\right] = G_X(s)G_Y(s)\,.$$

Calcul des moments

Proposition

Pour que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que sa fonction génératrice G_X soit r fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas, on a :

Calcul des moments

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $G_X^{(r)}(1^-) := \lim\limits_{\substack{s \to 1 \\ s<1}} G_X^{(r)}(s)$.

Proposition

Pour que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que sa fonction génératrice G_X soit r fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas, on a :

$$G_X^{(r)}(1^-) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)\mathbb{P}(X=k) \ ,$$

Calcul des moments

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $G_X^{(r)}(1^-) := \lim\limits_{\substack{s \to 1 \\ s<1}} G_X^{(r)}(s)$.

Proposition

Pour que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que sa fonction génératrice G_X soit r fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas, on a :

$$G_X^{(r)}(1^-) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)\mathbb{P}(X=k) \, ,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathbb{E}\left[X(X-1)\cdots(X-r+1)\right] = G_X^{(r)}(1^-) \, .$$

Calcul des moments

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $G_X^{(r)}(1^-) := \lim\limits_{\substack{s \to 1 \\ s<1}} G_X^{(r)}(s)$.

Proposition

Pour que X admette un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que sa fonction génératrice G_X soit r fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas, on a :

$$G_X^{(r)}(1^-) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)\mathbb{P}(X=k) ,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathbb{E}\left[X(X-1)\cdots(X-r+1)\right] = G_X^{(r)}(1^-) .$$

En particulier, pour $r = 1$, il s'ensuit $\mathbb{E}(X) = G_X'(1^-)$.

Résultat principal

Théorème

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables aléatoires T et X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes. On définit, pour tout $\omega \in \Omega$, la variable aléatoire

$$S(\omega) := \sum_{j=1}^{T(\omega)} X_j(\omega)\,.$$

Résultat principal

Théorème

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables aléatoires T et X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes. On définit, pour tout $\omega \in \Omega$, la variable aléatoire

$$S(\omega) := \sum_{j=1}^{T(\omega)} X_j(\omega)\,.$$

Si G_T et G_{X_1} désignent respectivement les fonctions génératrices de T et de X_1, la fonction génératrice de S est donnée par $G_S(s) = G_T\left(G_{X_1}(s)\right)$.

Identité de Wald

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses que le Théorème, on a les deux résultats suivants.

Identité de Wald

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses que le Théorème, on a les deux résultats suivants.

1. Si X_1 et T admettent une moyenne, S admet une moyenne donnée par $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.

Identité de Wald

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses que le Théorème, on a les deux résultats suivants.

1. Si X_1 et T admettent une moyenne, S admet une moyenne donnée par $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.
2. Si X_1 et T admettent un moment d'ordre deux, il en est de même pour S et sa variance est donnée par

$$\mathrm{Var}[S] = \mathbb{E}(T)\mathrm{Var}[X_1] + \left(\mathbb{E}(X_1)\right)^2 \mathrm{Var}[T] \,.$$