

Probabilités et Statistiques

Lois de probabilités discrètes

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

- 1 Produit de convolution
- 2 Loi de Bernoulli
- 3 Loi binomiale
 - Exemple
 - Définition
 - Décomposition de X
 - Espérance et variance
 - Somme de lois binomiales
 - Diagrammes en bâtons
 - Tables
 - Approximations pour n grand
- 4 Loi de Poisson
 - Définition
 - Diagrammes en bâtons
 - Caractéristiques
 - Somme de lois de Poisson
 - Tables
 - Approximations

- 1 Produit de convolution
- 2 Loi de Bernoulli
- 3 Loi binomiale
- 4 Loi de Poisson

Résultat très utile - 1

Proposition

Soit un espace fondamental Ω muni d'une probabilité \mathbb{P} . On considère deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2 . On suppose que X_1 et X_2 sont discrètes et indépendantes. Alors, la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est discrète et sa loi de probabilité est le produit de convolution des lois de probabilité de X_1 et de X_2 :

$$\mathbb{P}_{X_1+X_2} = \mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2}.$$

Rappel

Pour tous les réels a et b , on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ où δ_x est la distribution de Dirac en x .

Rappel

Pour tous les réels a et b , on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ où δ_x est la distribution de Dirac en x .

Rappel

Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition.

Rappel

Pour tous les réels a et b , on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ où δ_x est la distribution de Dirac en x .

Rappel

Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition.

Exemple

On peut ainsi écrire :

$$\left(\frac{1}{4}\delta_0 + \frac{3}{4}\delta_1\right) * \left(\frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1\right) = \frac{1}{12}\delta_0 + \frac{5}{12}\delta_1 + \frac{6}{12}\delta_2.$$

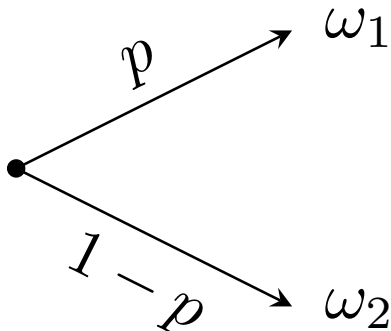
- 1 Produit de convolution
- 2 Loi de Bernoulli**
- 3 Loi binomiale
- 4 Loi de Poisson

Loi de Bernoulli - 1

Soit une expérience aléatoire e à deux résultats possibles ω_1 et ω_2 , de probabilités respectives $\mathbb{P}(\omega_1) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.

Loi de Bernoulli - 1

Soit une expérience aléatoire e à deux résultats possibles ω_1 et ω_2 , de probabilités respectives $\mathbb{P}(\omega_1) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_2) = 1 - p$.



L'espace fondamental est donc $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit la variable aléatoire réelle X comme suit :

$$X(\omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad X(\omega_2) = 0.$$

L'espace fondamental est donc $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit la variable aléatoire réelle X comme suit :

$$X(\omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad X(\omega_2) = 0.$$

En d'autres termes, X est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $\{\omega_1\}$. L'ensemble des réalisations de la variable aléatoire réelle X est $X(\Omega) = \{0, 1\}$. La loi de probabilité de X est ici $\mathbb{P}_X = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$

L'espace fondamental est donc $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On définit la variable aléatoire réelle X comme suit :

$$X(\omega_1) = 1 \quad \text{et} \quad X(\omega_2) = 0.$$

En d'autres termes, X est la variable aléatoire indicatrice de l'évènement $\{\omega_1\}$. L'ensemble des réalisations de la variable aléatoire réelle X est $X(\Omega) = \{0, 1\}$. La loi de probabilité de X est ici $\mathbb{P}_X = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$ ce qui donne le tableau :

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Loi de Bernoulli - 3

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si sa loi de probabilité correspond au Tableau précédent.

Loi de Bernoulli - 3

Définition

On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si sa loi de probabilité correspond au Tableau précédent.

Notation

La loi de Bernoulli de paramètre p est notée $\mathcal{B}(p)$.

Le calcul des moments d'une variable aléatoire réelle suivant $\mathcal{B}(p)$ donne

$$\mathbb{E}[X^n] = p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a également

Le calcul des moments d'une variable aléatoire réelle suivant $\mathcal{B}(p)$ donne

$$\mathbb{E}[X^n] = p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a également

$$\text{Var}[X] = p(1 - p).$$

Le calcul des moments d'une variable aléatoire réelle suivant $\mathcal{B}(p)$ donne

$$\mathbb{E}[X^n] = p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on a également

$$\text{Var}[X] = p(1 - p).$$

Remarque

L'univers Ω n'est pas nécessairement dénombrable. Il suffit pour s'en convaincre de considérer $\Omega := [0; 1]$ et $A := [0; p]$. On considère la probabilité sur $[0; 1]$ qui correspond à la "mesure de Haar". En d'autres termes, la probabilité d'un intervalle est la longueur de celui-ci. Alors, la variable aléatoire $X := \mathbb{1}_A$ prend deux valeurs : 0 et 1. Et, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ bien que Ω ne soit pas dénombrable. Ainsi, $\mathbb{P}_X = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$.

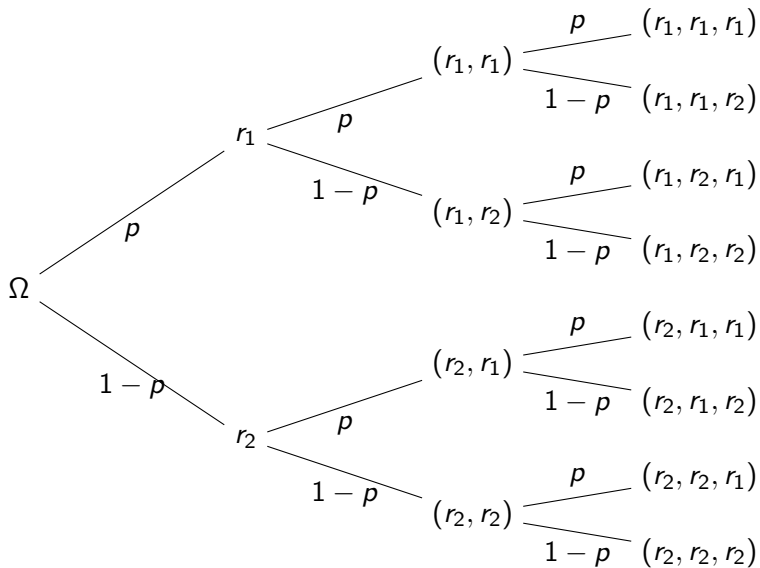
- 1 Produit de convolution
- 2 Loi de Bernoulli
- 3 **Loi binomiale**
 - Exemple
 - Définition
 - Décomposition de X
 - Espérance et variance
 - Somme de lois binomiales
 - Diagrammes en bâtons
 - Tables
 - Approximations pour n grand
- 4 Loi de Poisson

Problème

Exemple

Dans un atelier, fonctionnent de façon indépendante trois machines. La probabilité de panne en une journée d'une de ces machines est 10%. Quelle est la probabilité pour qu'en une journée deux machines exactement tombent en panne ?

Espace fondamental



Réponse

Réponse à la question

La probabilité que deux machines tombent en panne est égale à $3p^2(1 - p)$ avec $p = 10\%$. Ainsi, cette probabilité est égale à 2.7%.

Définition de la loi binomiale

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

Définition de la loi binomiale

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

On peut observer que l'on a bien une probabilité. En effet, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1.$$

Définition de la loi binomiale

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

On peut observer que l'on a bien une probabilité. En effet, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1.$$

Notation

La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Décomposition de X - 1

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

où les variables aléatoires réelles X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et sont mutuellement indépendantes.

Décomposition de X - 1

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

où les variables aléatoires réelles X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et sont mutuellement indépendantes.

En effet, l'idée fondamentale de la loi binomiale est de répéter *indépendamment* des expériences de Bernoulli de même paramètre p .

Décomposition de X - 2

Remarque

En particulier, on remarque :

$$\mathbb{P}_X = \underbrace{((1-p)\delta_0 + p\delta_1) * \cdots * ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)}_{n \text{ fois}} .$$

Décomposition de X - 2

Remarque

En particulier, on remarque :

$$\mathbb{P}_X = \underbrace{((1-p)\delta_0 + p\delta_1) * \cdots * ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque

On peut alors écrire $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$.

Produit de convolution
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi de Poisson

Exemple
Définition
Décomposition de X
Espérance et variance
Somme de lois binomiales
Diagrammes en bâtons
Tables
Approximations pour n grand

Espérance

Espérance

La linéarité de l'espérance nous donne

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times p.$$

Produit de convolution
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi de Poisson

Exemple
Définition
Décomposition de X
Espérance et variance
Somme de lois binomiales
Diagrammes en bâtons
Tables
Approximations pour n grand

Variance

Variance

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \cdots + \text{Var}[X_n] = n \times p(1-p).$$

Somme de lois binomiales - 1

Théorème

Soient r variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes X_1, \dots, X_r . On suppose que pour tout $1 \leq i \leq r$, la variable aléatoire réelle X_i suit la loi $\mathcal{B}(n_i, p)$. Alors, la variable aléatoire réelle $X := X_1 + \dots + X_r$ suit la loi binomiale de paramètres $n := \sum_{i=1}^r n_i$ et p , $\mathcal{B}(\sum_{i=1}^r n_i, p)$.

Somme de lois binomiales - 1

Théorème

Soient r variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes X_1, \dots, X_r . On suppose que pour tout $1 \leq i \leq r$, la variable aléatoire réelle X_i suit la loi $\mathcal{B}(n_i, p)$. Alors, la variable aléatoire réelle $X := X_1 + \dots + X_r$ suit la loi binomiale de paramètres $n := \sum_{i=1}^r n_i$ et p , $\mathcal{B}(\sum_{i=1}^r n_i, p)$. En d'autres termes :

$$\mathcal{L}(X_1 + \dots + X_r) = \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_r, p) .$$

Somme de lois binomiales - 2

Corollaire

Soit X de loi $\mathcal{B}(m, p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Somme de lois binomiales - 2

Corollaire

Soit X de loi $\mathcal{B}(m, p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$.

Remarque

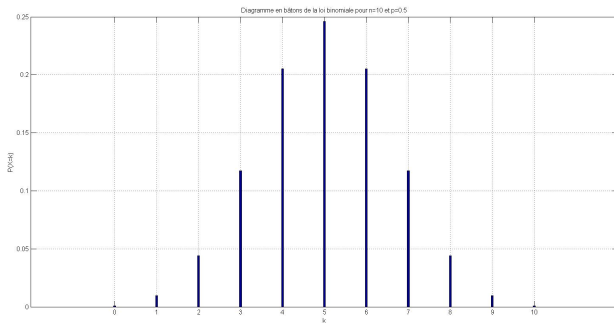
Si X_1 suit une loi binomiale de paramètres n_1 et p_1 et si X_2 en suit une de paramètres n_2 et p_2 et si de plus X_1 et X_2 sont indépendantes, alors on connaît la loi de $X_1 + X_2$ bien que ça ne soit pas une loi binomiale.

Produit de convolution
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi de Poisson

Exemple
Définition
Décomposition de X
Espérance et variance
Somme de lois binomiales
Diagrammes en bâtons
Tables
Approximations pour n grand

Cas symétrique

Cas symétrique

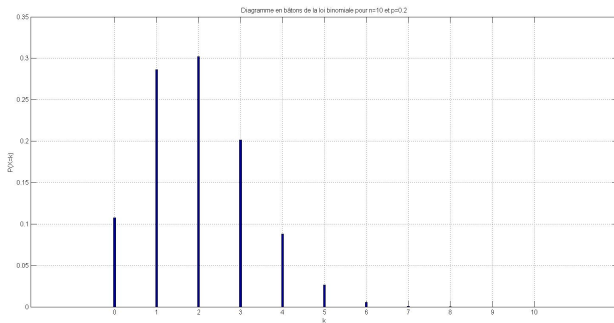


Produit de convolution
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi de Poisson

Exemple
Définition
Décomposition de X
Espérance et variance
Somme de lois binomiales
Diagrammes en bâtons
Tables
Approximations pour n grand

Cas asymétrique

Cas asymétrique



Tables - 1

Les valeurs

$$p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

sont tabulées pour $p = 0.05$, $p = 0.1$, $p = 0.2$, $p = 0.3$, $p = 0.4$ et $p = 0.5$ et pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ et $n = 50$.

Tables - 1

Les valeurs

$$p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

sont tabulées pour $p = 0.05$, $p = 0.1$, $p = 0.2$, $p = 0.3$, $p = 0.4$ et $p = 0.5$ et pour $n = 10$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ et $n = 50$. Les valeurs

$$\sum_{i=0}^k p_i = \mathbb{P}(X \leq k) = F_X(k)$$

sont également tabulées.

Tables - 2

Si $p > 0.5$, on utilise le résultat suivant.

Tables - 2

Si $p > 0.5$, on utilise le résultat suivant.

Proposition

Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathcal{L}(n - X) = \mathcal{B}(n, 1 - p)$.

Tables - 2

Si $p > 0.5$, on utilise le résultat suivant.

Proposition

Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathcal{L}(n - X) = \mathcal{B}(n, 1 - p)$.

On peut donc utiliser les tables.

Tables - 3

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.9)$. Quelle est la probabilité que X soit égale à 30 ?

Tables - 3

Exemple

Soit une variable aléatoire réelle X qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.9)$. Quelle est la probabilité que X soit égale à 30 ?

Soit $Y := 40 - X$. Alors $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(40, 0.1)$. On peut ainsi calculer

$$\mathbb{P}(X = 30) = \mathbb{P}(40 - Y = 30) = \mathbb{P}(Y = 10) = 0.0036,$$

d'après les tables.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

- 1 Si np est petit (typiquement, $np \leq 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de paramètre np , $\mathcal{P}(np)$.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

- 1 Si np est petit (typiquement, $np \leq 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de paramètre np , $\mathcal{P}(np)$.
- 2 Si np et $n(1 - p)$ sont grands (en pratique, $np > 16$ et $n(1 - p) > 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1 - p))$.

En pratique, $n > 50$. On distingue suivant deux cas.

- 1 Si np est petit (typiquement, $np \leq 16$), on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de paramètre np , $\mathcal{P}(np)$.
- 2 Si np et $n(1 - p)$ sont grands (en pratique, $np > 16$ et $n(1 - p) > 16$), on approche la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1 - p))$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors, on a $\mathbb{P}(X = k) \approx \Phi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \Phi\left(k - \frac{1}{2}\right)$ où la fonction Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(np; np(1 - p))$.

- 1 Produit de convolution
- 2 Loi de Bernoulli
- 3 Loi binomiale
- 4 **Loi de Poisson**
 - Définition
 - Diagrammes en bâtons
 - Caractéristiques
 - Somme de lois de Poisson
 - Tables
 - Approximations

Définition - 1

Définition

Soit λ un paramètre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque l'ensemble des réalisations de X est l'ensemble des entiers ; $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et lorsque l'on a de plus

$$\mathbb{P}[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Définition - 1

Définition

Soit λ un paramètre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque l'ensemble des réalisations de X est l'ensemble des entiers ; $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et lorsque l'on a de plus

$$\mathbb{P}[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

En d'autres termes, $\mathbb{P}_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \delta_n$.

Définition - 2

Notation

La loi de Poisson est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

Définition - 2

Notation

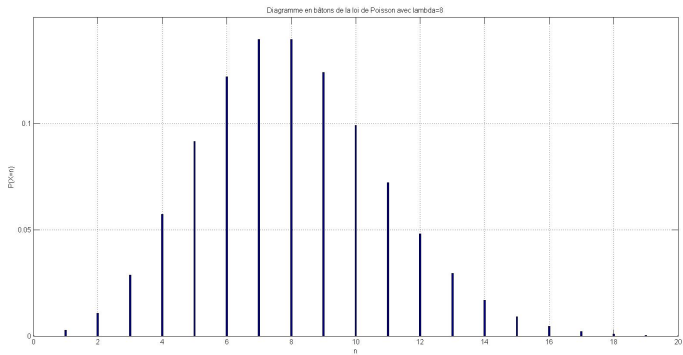
La loi de Poisson est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple

Sous certaines hypothèses, la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation le nombre d'arrivées dans une file d'attente durant un intervalle de temps d'une heure suit une loi de Poisson de paramètre λ , où λ est le nombre moyen d'arrivées par heure.

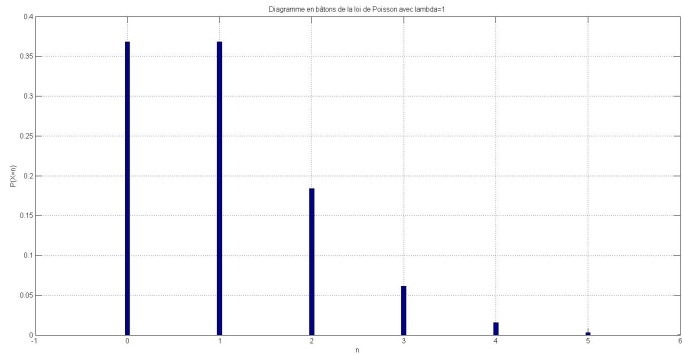
Avec $\lambda = 8$

Avec $\lambda = 8$



Avec $\lambda = 1$

Avec $\lambda = 1$



Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

et

Espérance et variance

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

et

$$\text{Var}[X] = \lambda.$$

Somme de lois de Poisson - 1

Théorème

Soient n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes X_1, \dots, X_n telles que la variable aléatoire réelle X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors, la variable aléatoire réelle $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$. En d'autres termes :

$$\mathcal{L}(X_1 + \dots + X_n) = \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) .$$

Somme de lois de Poisson - 2

Remarque

En particulier, on peut noter : $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ d'après la linéarité de l'espérance.

Somme de lois de Poisson - 2

Remarque

En particulier, on peut noter : $\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ d'après la linéarité de l'espérance.

Exercice

En utilisant les distributions et le produit de convolution, donner une preuve du Théorème

Tables pour λ petit

Les valeurs $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{i=0}^k p_i$ sont tabulées pour $\lambda \in \{0.1, \dots, 0.9, 1, \dots, 16\}$.

Approximations pour λ grand

En pratique, pour $\lambda > 16$, on approche la loi de Poisson de paramètre λ , $\mathcal{P}(\lambda)$, par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Approximations pour λ grand

En pratique, pour $\lambda > 16$, on approche la loi de Poisson de paramètre λ , $\mathcal{P}(\lambda)$, par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors, $\mathbb{P}(X = n) \approx \Phi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \Phi\left(n - \frac{1}{2}\right)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\lambda; \lambda)$.