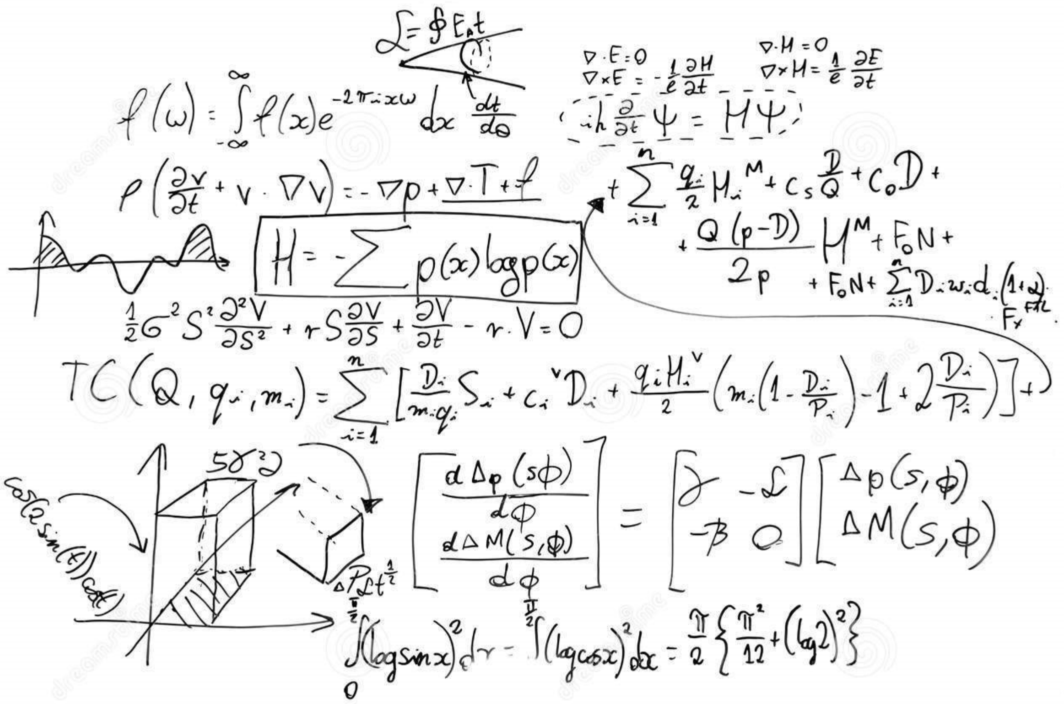
Bases indispensables des Mathématiques - Énoncé des TDs

Julian Tugaut

FISE 1

Version du 19 février 2023



Exercices principaux

Décomposition en éléments simples

Exercice 1

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_1(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}\,.$$

Exercice 2

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}\,.$$

Exercice 3

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_3(X) = \frac{2X^5 + 10X^3 + 12X}{(X+1)^3(X-1)^3}\,.$$

Exercice 4

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_4(X) = \frac{X^5}{(X^2 + X + 1)^3}\,.$$

Exercice 5 (*)

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_5(X) = \frac{2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72}{(X^2 + 4X + 5)^3}\,.$$

Exercice 6 (*)

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_6(X) = \frac{X^5 + 5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}\,.$$

Exercice 7 (*)

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_7(X) = \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}\,.$$

Exercice 8 (*)

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_8(X) = \frac{X^2}{X^4 - 2\cos(a)X^2 + 1}\,.$$

Limites et continuité

Exercice 9

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := e^{-\sqrt{x}}$.
2. $f_2(x) := \frac{x+7}{4x+3}$.
3. $f_3(x) := \frac{x^2+5}{x^3-1}$.
4. $f_4(x) := \cos(x^2)e^{-x}$.
5. $f_5(x) := \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$.
6. $f_6(x) := (2+\sin(x))e^x$.

Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3}$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$.
5. $\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$.
6. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{4x+\pi}$.
7. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$.

Exercice 11 (*)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1-x$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. En déduire que f est continue en $\frac{1}{2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R} \bigcap \mathbb{Q}^c$. Montrer que f n'est pas continue en x.

3) Soit $x \in \mathbb{Q}$ avec $x \neq \frac{1}{2}$. Montrer que f n'est pas continue en x.

Exercice 12 (*)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 (*)

Soit une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x+y)+f(x-y)=2\,(f(x)+f(y))$.

1) Calculer $f(0)$. Étudier la parité de f.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx)=n^2 f(x)$.

3) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r)=r^2 f(1)$.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)=x^2 f(1)$.

Dérivation

Exercice 14 †

L'objectif de l'exercice est de montrer que la dérivée de la fonction $f_n(x) := x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On considère d'abord $n = 0$. Que vaut $f_0(x)$ pour tout x réel ?

2) En reprenant la définition de la dérivée, que vaut $f_0'(x)$ pour tout x réel ?

3) Refaire les questions 1) et 2) avec $n = 1$.

4) Soit un entier n supérieur ou égal à 2. Rappeler la formule du binôme.

5) En reprenant la définition de la dérivée, que vaut $f_n'(x)$ pour tout x réel ?

Exercice 15 †

Soit $f_n(x) := x^n$. On veut montrer $f_n'(x) =\mapsto nx^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; sans utiliser la formule du binôme. On va procéder par récurrence. Pour ce faire, on admet $f_0'(x) = 0$ et que $f_1'(x) = 1$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. On suppose que $f_k'(x) = kx^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. Soit maintenant $l \in [\![1; n]\!]$ quelconque. Vérifier brièvement que l'on a $f_l(x) f_{n+1-l} = f_{n+1}$.

2) On rappelle la formule $(uv)' = u'v + uv'$. En déduire la dérivée de $f_l(x) f_{n+1-l}$.

3) En déduire que $f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$.

4) Conclure.

Exercice 16 †

Soit $g_n(x) := \frac{1}{x^n}$ pour $x > 0$. Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On pose $f_n(x) := x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'on a $f_n(x) g_n(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

2) Dériver la fonction $f_n g_n$ de deux manières différentes et en déduire $g_n'(x) = -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} g_n(x)$ pour tout $x > 0$.

3) Simplifier pour obtenir $g_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

4) Observer que $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{d}{dx} x^{-n} = -nx^{-n-1}$.

Exercice 17 †

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha(x) := x^\alpha$ pour tout $x > 0$. L'objectif de l'exercice est d'obtenir sa dérivée.

1) Rappeler la dérivée de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Rappeler la dérivée de f_{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Pour tout $x > 0$, réécrire f_α à l'aide des fonctions exponentielle (exp) et logarithme népérien (log).

4) Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, quelle est la dérivée de $e^{u(x)}$?

5) Conclure avec $u(x) := \alpha \log(x)$.

Exercice 18

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := 4x^3 - 5x^2 + x - 1$.
2. $f_2(x) := 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.
3. $f_3(x) := (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$.
4. $f_4(x) := \frac{2x^2-3}{x^2+7}$.
5. $f_5(x) := \frac{2x-1}{x+1}$.
6. $f_6(x) := -x + 2 + \frac{2}{3x}$.
7. $f_7(x) := \frac{1}{x+x^2}$.
8. $f_8(x) := (2x + 1)^2$.
9. $f_9(x) := \sqrt{x}(5x - 3)$.

Exercice 19

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := x^3 \cos(5x + 1)$.
2. $f_2(x) := e^{\cos(x)}$.
3. $f_3(x) := x \log(x)$.
4. $f_4(x) := \log(e^x + 1)$.
5. $f_5(x) := e^{x^3+2x^2+3x+4}$.
6. $f_6(x) := e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.
7. $f_7(x) := \log(e^x + \sin(x))$.
8. $f_8(x) := \frac{x}{x^2+1}$.
9. $f_9(x) := \frac{\cos(2x)}{x^2-2}$.
10. $f_{10}(x) := \log(\cos(2x))$.
11. $f_{11}(x) := \frac{x}{\sin(x)}$.
12. $f_{12}(x) := \log(x - \sqrt{x^2 - 1})$.
13. $f_{13}(x) := \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$, $x > 1$.
14. $f_{14}(x) := \log(\log(x))$.
15. $f_{15}(x) := \log(\log(\log(x)))$.

Exercice 20

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) := (x-a)g(x)$. Montrer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Exercice 21 (*)

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tous $a, b > 0$. On admet qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition et que $f'(1) > 0$. L'objectif de l'exercice est de montrer $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ pour tout $x > 0$.

1) Dériver la fonction $x \mapsto f(ax)$ en utilisant la formule $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$.

2) Dériver la fonction $x \mapsto f(ax)$ en utilisant la propriété de la fonction f.

3) En déduire $f'(x) = af'(ax)$ pour tout $x, a > 0$.

4) En posant $a := \frac{1}{x}$, conclure.

5) Donner un exemple de telle fonction f.

Exercice 22 (*)

Soit une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives et telle que $g(a+b) = g(a) \times g(b)$ pour tous a, b. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) > 0$. On introduit la fonction $h := \log(g)$.

1) Calculer $h(a+x) - h(a) - h(x)$ pour tous a, x.

2) En déduire que h' est une fonction constante.

3) En déduire l'existence de deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $g(x) = C_1 e^{C_2 x}$ pour tout x réel.

Exercice 23 (*)

On admet les formules trigonométriques et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

1) Justifier que l'on a $\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \sin(\frac{h}{2})$ pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

2) En déduire que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$.

3) Calculer la dérivée de la fonction cos.

4) Calculer la dérivée de la fonction sin.

5) On pose $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que l'on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\arctan(x)$ l'unique antécédent de x par la fonction tangente dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On admet la dérivabilité de la fonction arctangente. Démontrer $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 24 (*)

Soit un intervalle ouvert non-vide $\mathcal{I} =]a; b[$ avec $a < b$. Soit une fonction bijective f de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$. On appelle f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

En déduire la dérivée de la fonction arctan.

Exercice 25 (*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Intégration

Exercice 26 †

Soit $\alpha \neq -1$. On pose $f_\alpha(x) := x^\alpha$ pour tout $x > 0$. L'objectif de l'exercice est de trouver une primitive de f_α.

1) Rappeler la dérivée de $f_{\alpha+1}$.

2) En déduire une primitive de f_α.

3) Exemple : trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{99}}$.

4) De manière plus générale, donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ pour $\alpha \neq 1$.

Exercice 27 †

On pose $\log(t) := \int_1^t \frac{ds}{s}$ pour tout $t > 0$.

1) Quelle est la dérivée de la fonction précédente ?

2) En procédant à un changement de variable, montrer que $\int_a^{ax} \frac{ds}{s} = \log(x)$ pour tous $a, x > 0$.

3) En déduire que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ pour tous $a, b > 0$.

Exercice 28

1) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} dx$.

2) Étudier en fonction de α la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$.

3) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x}\cos(x) dx$.

Exercice 29

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := \cos(3x) + 2\sin(5x)$.
2. $f_2(x) := 6e^{-4x}$.
3. $f_3(x) := e^x e^{e^x}$.
4. $f_4(x) := \frac{\log(x)^\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 30

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) := x\sin(2x)$.
2) $f_2(x) := x^\alpha \log(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
3) $f_3(x) := \cos(x)\log(1+\cos(x))$.
4) $f_4(x) := \sin(\log(x))$.
5) $f_5(x) := \frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5}$.
6) $f_6(x) := \sin(3x)\cos(5x)$.
7) $f_7(x) := \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.
8) $f_8(x) := x^3\exp(x+1)$.
9) $f_9(x) := \sin(x)\cosh(x)$.

Exercice 31

Calculer les deux intégrales suivantes :

1. $I_1 := \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}$.
2. $I_2 := \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$.

Exercice 32

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
2) $I_2 := \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.
3) $I_3 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$.
4) $I_4 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)dx$.
5) $I_5 := \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}$.
6) $I_6 := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx$.

Exercice 33

Calculer, en passant en coordonnées polaires, les intégrales :

1) $I := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dxdy$. En déduire la valeur de $A := \int_0^\infty \exp\{-x^2\}\,dx$.
2) $J := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} x^2y^2\exp\{-(x^2+y^2)\}\,dxdy$. En déduire la valeur de $B := \int_0^\infty x^2\exp\{-x^2\}\,dx$.

Exercice 34 (*)

Justifier pourquoi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}dx$ est divergente. Puis, calculer

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-1-\epsilon}\frac{dx}{1+x^3}+\int_{-1+\epsilon}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}\right\}.$$

Exercice 35 (*)

Calculer les deux intégrales suivantes pour $p, q \in \mathbb{N}^*$:

1. $I_1 := \int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt$.
2. $I_2 := \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)dt$.

Exercice 36 (*)

Trouver la formule de récurrence permettant de calculer l'intégrale

$$M_n := \int_0^{+\infty} x^n \exp\{-x\}\, dx\,.$$

Calculer cette intégrale pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 (*)

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $G(x) := \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Calculer la dérivée de G.
2) Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u et v deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction $G(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

Exercice 38 (*)

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; 1]$. Montrer que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\,.$$

2) En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \log(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.
3) Montrer $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$.
4) Conclure : $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \log(2)$.

Exercice 39 (*)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}\,.$$

Pour tout x réel, on pose $S(x) := \int_a^b \left(f(t) + xg(t)\right)^2 dt$. Vérifier que S est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

Exercice 40 (*)

Calculer l'intégrale

$$I := \iint_{(S)} \frac{dxdy}{(x+y)^4}$$

où le domaine d'intégration est défini comme suit :

$$(S) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq 1,\, y \geq 2,\, x+y \leq 5\Big\}\ .$$

Exercice 41 (*)

Calculer l'intégrale

$$I := \iint_{(S)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} dxdy$$

où le domaine d'intégration est défini comme suit :

$$(S) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2+y^2 \leq 1\Big\}\ .$$

Exercice 42 (*)

Calculer l'intégrale

$$I := \iint_{(S)} |x-y|\, dxdy$$

où le domaine d'intégration est défini comme suit :

$$(S) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x| \leq 1,\, |y| \leq 1\Big\}\ .$$

Analyse combinatoire et modèle probabiliste

Exercice 43

Une population est décrite suivant le genre, l'état matrimonial et la profession. On distingue quatre catégories d'états matrimoniaux et cent catégories de professions.

1. Combien y a-t-il de catégories combinées ?

2. Généralisation : une population est décrite suivant p caractères qualitatifs. Le $i^{\text{ème}}$ caractère a n_i modalités distinctes pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. Combien y a-t-il de catégories combinées ?

Exercice 44

1. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en deux groupes, de trois et sept individus respectivement ?

2. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en trois groupes, de deux, trois et cinq individus respectivement ?

3. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en quatre groupes, de un, deux, trois et quatre individus respectivement ?

4. De combien de façons peut-on diviser un groupe de n individus en r groupes, de $n_1, \cdots, n_r$ individus respectivement ? (avec $n_1 + \cdots + n_r = n$).

Exercice 45

1. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de cinq cartes comprenant quatre cartes de même valeur ?

2. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement un as ?

3. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement deux as ?

4. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement trois as ?

5. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement quatre as ?

6. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant au moins un as ? (calculer de deux manières différentes et écrire l'égalité qui en résulte).

Exercice 46

Soient trois évènements A, B et C associés à une même expérience aléatoire. Exprimer sous écriture ensembliste les évènements suivants et calculer leur probabilité.

1. Seuls A et B sont réalisés.

2. Deux évènements au plus sont réalisés.

3. Au moins un évènement est réalisé.

4. Aucun des trois évènements n'est réalisé.

5. Deux évènements exactement sont réalisés.

6. Seul A est réalisé.

7. Deux évènements au moins sont réalisés.

8. Un évènement exactement est réalisé.

9. Les trois évènements sont réalisés.

Exercice 47

Soient A et B deux évènements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}, \ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer

$$\mathbb{P}(A \cup B), \ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right), \ \mathbb{P}\left(\overline{B}\right), \ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right), \ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right), \ \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right), \ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right).$$

Exercice 48

Dans une réception, chacun des invités a donné son chapeau au vestiaire. Après que la réception est finie, les chapeaux sont distribués aux invités au hasard.

1. (Cas particulier) *Dans le cas où il y a exactement trois invités, calculer la probabilité p_3 qu'au moins un des trois invités reçoive le chapeau qu'il avait laissé au vestiaire.*

2. (Cas général) *Dans le cas où il y a n invités (avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque), calculer la probabilité p_n qu'au moins un des n invités reçoive le chapeau qu'il avait laissé au vestiaire.*

3. (Cas limite) *Montrer que cette probabilité p_n atteint une limite lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice 49

On considère une urne contenant $b > 0$ billes bleues et $n > 0$ billes noires. On tire au hasard une bille de cette urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne. Si elle est noire, on ne la remet pas mais on rajoute a billes bleues prises dans une réserve auxiliaire.

Dans les deux cas, on tire une seconde bille de l'urne.

Quelle est la probabilité pour que cette seconde bille soit bleue ?

Exercice 50

Un test de dépistage d'une maladie est mis au point par un laboratoire pharmaceutique. Ce laboratoire cherche à déterminer l'efficacité du test.
Après des mesures empiriques, la probabilité que le test soit positif pour une personne que l'on sait malade est évaluée à p_+.
Après des mesures empiriques, la probabilité que le test soit négatif pour une personne que l'on sait bien portante (non malade) est évaluée à p_-.
La probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit malade est égale à p_M (par signalement dès que quelqu'un contracte cette maladie).
1. *Calculer la probabilité qu'un patient soit malade en sachant que son test est négatif avec* $p_M := 0.01$, $p_+ := 0.98$ *et* $p_- := 0.98$.
2. *Calculer la probabilité qu'un patient soit sain en sachant que son test est positif avec* $p_M := 0.01$, $p_+ := 0.98$ *et* $p_- := 0.98$.
3. *Cette dernière probabilité étant trop élevée, on décide d'effectuer deux tests indépendants au lieu d'un seul. Calculer la probabilité qu'une personne soit bien portante sachant que les deux tests sont positifs.*

Exercice 51

Un évènement aléatoire T se produit avec probabilité $\frac{4}{5}$. Deux individus louches (Negan et Ramsay) sont témoins de cet évènement. Negan dit la vérité avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ramsay dit la vérité avec probabilité $\frac{1}{5}$. Calculer la probabilité p que T se soit produit sachant que Negan et Ramsay disent tous deux que T s'est produit.

Exercice 52

Trois prisonniers, Pim, Pam et Poum, dont les situations sont comparables, ont demandé une grâce au roi. Ils apprennent que deux d'entre eux, sans savoir lesquels, ont vu leur demande rejetée et seront condamnés à mort. Pim, voulant connaître sans délai le sort qu'on lui réserve, va voir un fonctionnaire qui est au courant de la décision concernant chacun des prisonniers. Malheureusement, le fonctionnaire n'est pas autorisé à informer les prisonniers de la décision les concernant. Pim, qui désire avoir malgré tout plus d'information et qui promet de garder le silence sur le sort réservé aux autres, demande au fonctionnaire de lui révéler simplement le nom d'un prisonnier parmi les deux autres dont la demande a été rejetée. Dans ces circonstances, le fonctionnaire se sent autorisé à lui révéler que la demande de Pam a été rejetée.

Est-ce que Pim devrait avoir plus d'espoir concernant l'acceptation de sa demande après cette révélation ?

Exercice 53 (*)

De combien de façons une assemblée de soixante personnes peut-elle élire un bureau comprenant un président, un vice-président et un secrétaire ?

Exercice 54 (*)

1. Soit une classe de soixante élèves, dont douze internes. De combien de façons peut-on former le comité de cette classe, qui comprend six élèves, le président devant être un interne ?

2. Soit une classe de soixante élèves, dont douze internes et seize filles, toutes externes. De combien de façons peut-on former le comité de cette classe, qui comprend quatre garçons et deux filles, le président devant être un interne ?

Exercice 55 (*)

Une entreprise fabrique des pièces métalliques dont une proportion R est hors des tolérances imposées par l'acheteur.
Lors de la réception d'un lot de pièces, l'acheteur en prélève trente parmi celles qui lui sont livrées. L'acheteur teste ensuite ces trente pièces. Si le nombre de pièces défectueuses parmi les trente est strictement supérieur à un entier k prédéfini, le lot de pièces est refusé.

1. *Quelle est la probabilité de refuser le lot si l'on fixe* $R := 5\%$ *et* $k := 3$ *?*

2. *Avec* $R := 10\%$*, à combien doit-on fixer* k *pour que la probabilité de refuser le lot soit inférieure ou égale à la probabilité qu'a le fabricant de faire une pièce défectueuse ?*

Exercice 56 (*)

Quatre personnes jouent à la belote (32 cartes). Chaque joueur reçoit huit cartes. On considère les évènements suivants :

— A_1 : le joueur reçoit au moins un as.
— A_2 : le joueur reçoit au moins deux as.
— C : le joueur reçoit l'as de coeur.

Les probabilités $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$ *et* $\mathbb{P}(A_2 \mid C)$ *sont-elles égales ?*

Variables aléatoires discrètes

Exercice 57

Soit l'espace fondamental $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. L'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}$ ainsi définie :

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

On définit les variables aléatoires réelles X et Y comme suit.

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$X(\omega)$	1	3	4	7	2
$Y(\omega)$	3	1	0	-1	4

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire XY.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$.

Exercice 58

Soient deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y définies sur un même espace fondamental. On suppose X et Y indépendantes. Les lois de probabilités des deux variables sont données dans les deux tableaux ci-dessous

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et

y_i	2	4
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$.

Exercice 59

Des individus sont soumis à une épreuve composée de trois questions indépendantes. On propose trois réponses possibles à la première question, quatre à la deuxième et cinq à la troisième. À chaque question, une réponse et une seule est correcte. Chaque individu doit choisir une réponse à chaque question.

Si sa réponse à la première question est correcte, il a trois points. À la deuxième question, s'il a juste, il a trois points. La bonne réponse à la troisième question donne quatre points.

Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation la note obtenue à l'épreuve par un individu qui choisit au hasard les réponses aux questions.

1. Déterminer l'ensemble des réalisations possibles de X.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

On soumet les individus à une deuxième épreuve indépendante de la première avec le même nombre de questions, de réponses par question, de points obtenus en cas de bonne réponse (unique pour chaque question à nouveau).
On décide d'attribuer à un individu la note finale égale au maximum des notes qu'il a obtenues aux deux épreuves. Soit Y cette note finale pour un individu qui répond au hasard aux deux épreuves.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Exercice 60

Soit X une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 avec probabilité 0.75, la valeur 1 avec probabilité 0.2 et la valeur 2 avec probabilité 0.05.
Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 avec probabilité 0.2, la valeur 1 avec probabilité 0.3 et la valeur 2 avec la probabilité 0.5. On suppose que X et Y sont définies sur un même espace fondamental et sont indépendantes.

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X et de Y.

On considère la variable aléatoire $S := X + Y$.

2. Déterminer la loi de probabilité de S et tracer son diagramme.

3. Déterminer la fonction de répartition de S et tracer son graphe.

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de S.

Exercice 61

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F_X(x) := \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)\,.$$

Calculer $\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in [0;2[\right)$ et $\mathbb{P}\left(X \in]3;+\infty[\right)$.

Exercice 62

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_n := \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \text{si } 1 \leq n \leq ab \\ 0 & \text{si } ab < n \end{cases}.$$

1) *Quelle(s) condition(s) doivent satisfaire les entiers a et b pour qu'il existe une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?*

2) *On suppose que a et b sont tels qu'il existe une variable aléatoire X satisfaisant $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ en fonction de a et b.*

3) *Trouver a et b tels que $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$.*

Exercice 63

Soient $a \in]0;1[$ et $b > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et l'on suppose

$$\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = p\}) = \frac{b^k e^{-b} a^p (1-a)^{k-p}}{p!(k-p)!},$$

si $k \geq p$ et 0 sinon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de Y.

3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z := X - Y$.

5) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 64 (*)

On se donne une variable aléatoire X, de moment d'ordre 2 fini. On considère la fonction $f(x) := \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(x - X\right)^2\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\mathbb{E}[f(X)]$.

Exercice 65 (*)

Pour allumer un feu, Mélissandre a donné à Stannis une boîte contenant n allumettes. Celles-ci sont un peu humides et chacune ne fonctionne qu'avec la probabilité $p \in]0;1[$. Soit X le nombre d'allumettes utilisées par Stannis dans sa tentative.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Quelle est son espérance ?

Exercice 66 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

Exercice 67 (*)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose $\mathbb{E}(X) < \infty$.

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$.

2) En déduire que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{E}(X)$.

Exercice 68 (*)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans un ensemble fini $M := [\![1;k]\!]$ et telles que $\mathbb{P}(X_n = i) = p_i$. Soit M^n l'ensemble des suites (messages) de longueur n. Il y en a k^n. On considère l'entropie de la répartition $p := (p_i)_{1\leq i\leq k}$,

$$H(p_1, \cdots, p_k) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log(p_i)\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. On définit l'ensemble des messages ϵ-typiques par

$$\mathcal{T}_n^\epsilon := \left\{(i_1, \cdots, i_n) \in M^n \;:\; e^{-n(H+\epsilon)} \leq p_{i_1} \cdots p_{i_n} \leq e^{-n(H-\epsilon)}\right\}.$$

1) *Montrer que l'on a* $\mathbb{E}\left(-\log(p_{X_n})\right) = H$.

2) *En déduire*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log(p_{X_i})) - H\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in (\mathcal{T}_n^\epsilon)^c\right) \leq \frac{\mathrm{var}\left[-\log(p_{X_1})\right]}{n\epsilon^2}\,.$$

3) *Obtenir la limite suivante*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon\right) = 1\,.$$

4) *Montrer que l'on a*

$$\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon\right) \geq e^{-n(H+\epsilon)} \# \mathcal{T}_n^\epsilon\,,$$

et en déduire que $\#\mathcal{T}_n^\epsilon \leq e^{n(H+\epsilon)}$.

5) *Réciproque. Supposons que l'on ait pu trouver $\mathcal{C}_n \subset M^n$ tel que*

$$\lim_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n\right) = 1$$

et $\#\mathcal{C}_n \leq e^{Kn}$. On va montrer que l'on a $K \geq H$.

(a) Montrer que $\lim_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{T}_n^\epsilon\right) = 1$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{T}_n^\epsilon\right) \leq e^{-n(H-\epsilon)} e^{Kn}$. Conclure.

6) *On prend $D = 2$, $M = \{0, 1\}$, $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$. Si $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, vérifier que $H = -\log(2)$ et que le nombre de suites typiques est, dans un sens à préciser, 2^n. (Pas de compression possible.)*
Cas général : étudier la forme de $H(p) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$ et en déduire le comportement des suites typiques.

Exercices bonus

Trigonométrie et nombres complexes

Exercice 69

En dessinant un cercle trignométrique, justifier géométriquement les formules suivantes pour tout x réel : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, $\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$, $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi-x)=\sin(x)$, $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$.

Exercice 70

En dessinant un triangle, justifier géométriquement les formules suivantes pour tout $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$: $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$.

Exercice 71

En admettant les formules trigonométriques des deux exercices précédents pour tout x réel, démontrer par le calcul que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$.

Exercice 72

En admettant les formules trigonométriques des trois exercices précédents pour tout x réel, compléter le tableau suivant où l'on a posé pour $\cos(x)\neq 0$: $\tan(x):=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
$\tan(x)$																

Exercice 73

Calculer : $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{84\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{33\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right)$.

Exercice 74

Parmi les cinq expressions suivantes, une seule est différente de $-\sin(x)$. Laquelle ?

1. $-\cos(x-\frac{\pi}{2})$.
2. $\cos(\frac{5\pi}{2}+x)$.
3. $\sin(x-\pi)$.
4. $\cos(-x+\frac{\pi}{2})$.
5. $\sin(x+3\pi)$.

Exercice 75

Soient x et y deux réels appartenant à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos(x)=\frac{3}{5}$ et $\cos(y)=\frac{1}{3}$. Calculer $\sin(2x-y)$.

Exercice 76

Donner les modules et les arguments de chacun des nombres complexes suivants : $-1+i\sqrt{3}$, $3-3i$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, $(-1+i)^5$, $(\sqrt{3}-i)^4$, $\frac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i}$, $\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)^6$, $\left(\sin(\frac{\pi}{6})+i\cos(\frac{\pi}{6})\right)^6$.

Exercice 77

Un circuit électrique est soumis à deux tensions : $3\cos(2\pi ft)$ et $4\sin(2\pi ft)$. Montrer que la tension somme, $3\cos(2\pi ft)+4\sin(2\pi ft)$, peut s'écrire

$$r\cos(2\pi ft+\varphi) \quad \text{avec} \quad r>0 \text{ et } \varphi\in\mathbb{R}\,.$$

Exercice 78

Montrer que $\cos(5\theta)=16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)$.

Exercice 79

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0\,.$$

Exercice 80

Sachant que $\sin(\alpha)=\frac{1}{4}$ et $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, calculer $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

Exercice 81

Montrer que les expressions suivantes, quand elles existent, ont une valeur constante :

1. $A=\dfrac{\cos^3(x)-\sin^3(x)}{\cos(x)-\sin(x)}+\dfrac{\cos^3(x)+\sin^3(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$.
2. $B=(1-\sin(x))(1+\sin(x))(1+\tan^2(x))$.

Exercice 82

Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
2. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$.
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
4. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
5. $\tan(x)\tan(2x) = 1$.
6. $\sqrt{3}\tan(x) = 2\sin(x)$.
7. $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$.

Exercice 83

Calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 84

On se donne α et β éléments de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan(\alpha) = \frac{1}{5}$ et $\tan(\beta) = \frac{1}{239}$. Calculer $\gamma = 4\alpha - \beta$.

Exercice 85

Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, distinct de 1, le nombre $i\frac{1+z}{1-z}$ est réel.

Exercice 86

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $x^2 = y$, $y^2 = z$ et $z^2 = x$.

Exercice 87

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2z+1)^4 = (z-1)^4$.

Exercice 88

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^2$.

Exercice 89

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S := u + u^2 + u^4$. Calculer $S + \overline{S}$ et $S\overline{S}$. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 90

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $z^2 - 5(1+i)z + 17i = 0.$
2. $z^2 - (2i+1)z + i - 1 = 0.$
3. $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0.$
4. $z^2 - 6z + 11 = 0.$
5. $iz^2 - 2iz + i - 2 = 0.$
6. $2z^2 - (3+2i)z + 5 = 0.$
7. $\frac{z^2}{2} - \sqrt{3}z + 2 = 0.$
8. $z^2 + 8(1-i)z - 34i = 0.$
9. $z^2 - (5+2i)z + 5(1+i) = 0.$
10. $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0.$
11. $z^4 = -119 + 120i.$
12. $z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0.$

Algèbre linéaire

Exercice 91

Trouver $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (2,-3,4)$.

Exercice 92

Déterminer k de manière à ce que les vecteurs u et v soient orthogonaux avec :
1) $u := (1, k, -3)$ et $v := (2, -5, 4)$.
2) $u := (2, 3k, -4, 1, 5)$ et $v := (6, -1, 3, 7, 2k)$.

Exercice 93

Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes sur le corps des réels. Montrer que $\mathbb{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ lorsque
1) $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices ayant un déterminant nul.
2) $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices M telles que $M^2 = M$.

Exercice 94

Écrire la matrice $E := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 95

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes sur le corps des réels. Soit $\mathbb{E}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques ($M^T = M$) et $\mathbb{F}$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques ($M^T = -M$). Montrer que l'on a

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F},$$

c'est-à-dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} + \mathbb{F}$ et $\mathbb{E} \bigcap \mathbb{F} = \{0\}$.

Exercice 96

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 97

Soit $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. En déduire que A et inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

Exercice 98

Calculer le déterminant de la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 99

Soient $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les déterminants des matrices A^2, A^3, AB, AB^T, $3A$ et $A - B$.

Exercice 100

Soit λ une valeur propre d'une application linéaire $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ étant un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{E}_\lambda$ l'ensemble de tous les vecteurs propres de f correspondant à la valeur propre λ. On parle d'espace propre associé à λ : $\mathbb{E}_\lambda := \{v \in \mathbb{E} \mid f(v) = \lambda v\}$.
Montrer que $\mathbb{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Exercice 101

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
1) Trouver toutes les valeurs propres de A et leurs vecteurs propres correspondants.
2) Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 102

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 103

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -3 \end{cases}.$$

Exercice 104

Déterminer le nombre a pour que le système linéaire suivant ait une solution

$$\begin{cases} x - 3y - 4t = 1 \\ -x + 3y + z + 2t = 2 \\ -3x - y + 2z - 3t = a \\ 7x - y - z - 4t = -4 \end{cases}.$$

On suppose maintenant que a prend cette valeur. Y a-t-il une ou plusieurs solutions ? Y a-t-il une solution pour laquelle y vaut 3 ? Si oui, écrire cette solution.

Exercice 105

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = 3 \\ 3x + 7y + 4z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 106

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ 5x + 5y + 10z = 6 \end{cases}.$$

Suites numériques et suites de fonctions

Exercice 107

Étudier la convergence des suites u dont le terme général est :

1. $u_n := \frac{2n-4}{3n+5}$.
2. $u_n := n^3 - 2n^2$.
3. $u_n := \frac{\log(n)}{n}$.
4. $u_n := n^2 - n\log(n)$.
5. $u_n := n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. $u_n := n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
7. $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
8. $u_n := \frac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geq 2$.
9. $u_n := (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.
10. $u_n := \sqrt[n]{n}$.
11. $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
12. $u_n := \frac{2^n}{n^2}$.
13. $u_n := \frac{n!}{2^n}$.
14. $u_n := \frac{n!}{n^n}$.
15. $u_n := \frac{n}{2^n}$.

Exercice 108

Étudier la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 3$ et $3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$.

Exercice 109

1) Vérifier que l'équation $x^2 = 2$ peut s'écrire $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
2) Étudier brièvement la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par $f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
3) En déduire que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [1; 2] \text{ quelconque} \\ u_{n+1} := f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

converge vers $\sqrt{2}$.
4) Calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près en utilisant cet algorithme.

Exercice 110

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :
1) Inégalité de Bernoulli : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+t)^n \geq 1 + nt$.
2) Pour tout $n \geq 1$, $\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$.

Exercice 111

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions suivante :

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) := \frac{x^n+1}{x^2+1} \end{array}.$$

Exercice 112

Montrer la convergence uniforme sur $[1;+\infty[$ de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) := \log\left(x + \frac{1}{n}\right) \end{array}$$

vers la fonction logarithme népérien.

Exercice 113

1) Déterminer la limite simple des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) := \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. On rappelle la formule de Sterling : $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
2) Calculer $\lim\limits_{n\infty} \displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$.

Séries numériques et séries de fonctions

Exercice 114

Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

1. $u_n := \frac{n}{3n-1}$.
2. $u_n := \frac{1}{2^n-3}$.
3. $u_n := \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
4. $u_n := \frac{2^n}{n^{10}}$.
5. $u_n := \frac{1}{n\log(n)}$ pour $n \geq 2$.
6. $u_n := (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 115

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.
2. $2\log(n^3+1) + 3\log(n^2+1)$.
3. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
4. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
5. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
6. $\frac{(-1)^n}{\log(n)}$.
7. $\frac{1!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
8. $\frac{1}{\log(n)^{\log(n)}}$.

Exercice 116

Soit la suite de terme général $u_n := (n^4+n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$ où P est un polynôme. À quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 117

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
4. $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 118

Démontrer la convergence des séries suivantes puis calculer leur somme :

1. $\Sigma \frac{2}{4n^2-1}$ pour $n \geq 1$.
2. $\Sigma \frac{1}{n!}$.

Exercice 119

Soient deux séries numériques absolument convergentes de terme général a_n et b_n. Montrer que la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 120

Donner le rayon de convergence R et la fonction somme des séries entières de terme général u_n et étudier le cas où $x = \pm R$:

1. $u_n(x) := \frac{x^n}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$.
2. $u_n(x) := \frac{x^n}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 121

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge.

Exercice 122

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$.

Équations différentielles

Exercice 123

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1) $x'(t) - 3x(t) = 2$.
2) $x'(t) + 2x(t) = e^{2t}$.
3) $x'(t) + x(t) = \log(t)$.
4) $x'(t) - 5x(t) = e^{5t}$.
5) $x'(t) + 3t^2 x(t) = t^2$.
6) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$.
7) $(1 + t^2)x'(t) - tx(t) = 1 + t + t^2$.

Exercice 124

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & + & x_2(t) & + & x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_3'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_4'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & x_3(t) & + & 2x_4(t) \end{array}\right. .$$

Exercice 125

Résoudre ces différentes équations différentielles du premier ordre :

1) $tx'(t) - 2x(t) - t^4 = 0$.
2) $2tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t}$.
3) $x'(t)\sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - x(t)^2}$.
4) $x'(t)\tan(t) = x(t)$.
5) $x'(t) = 2tx(t)^2$.
6) $x(t) - \frac{t}{2}x'(t) = \sqrt{x(t)}$.
7) $tx'(t) - x(t) - x(t)^3 = 0$.

Exercice 126

Résoudre ces différentes équations différentielles du second ordre :

1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}$.

2) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}$.

3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t)$.

4) $t^2 \left(\log(t) - 1\right) x''(t) - tx'(t) + x(t) = 0$.

5) $t^2 x''(t) + tx'(t) - x(t) = t^2$.

6) $t^2 x''(t) - t(t+2)x'(t) + (t+2)x(t) = -t(t+1)$.