Correction des travaux dirigés - Équations différentielles

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 123

Énoncé

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1) $x'(t) - 3x(t) = 2$.
2) $x'(t) + 2x(t) = e^{2t}$.
3) $x'(t) + x(t) = \log(t)$.
4) $x'(t) - 5x(t) = e^{5t}$.
5) $x'(t) + 3t^2x(t) = t^2$.
6) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$.
7) $(1+t^2)x'(t) - tx(t) = 1 + t + t^2$.

Correction

Correction du 1)

On réécrit :

$$x'(t) - 3x(t) = 2\,. \tag{1}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - 3x_0(t) = 0\,. \tag{2}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 - 3 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = 3$. Conséquemment, les solutions de l'équation (2) sont de la forme $x_0(t) = Ce^{3t}$ où C est une constante.
On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (1). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{3t}$. L'équation (1) devient alors

$$\lambda'(t)e^{3t} + 3\lambda(t)e^{3t} - 3\lambda(t)e^{3t} = 2\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = 2e^{-3t}\,,$$

dont $t \mapsto -\frac{2}{3}e^{-3t}$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := -\frac{2}{3}e^{-3t} \times e^{3t} = -\frac{2}{3}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients constants. Or, le second membre est une constante. Ainsi, on recherche une solution particulière sous la forme d'une constante $x_1(t) := \lambda$. Alors, on a $x_1'(t) = 0$. Ainsi, l'équation (1) devient

$$-3\lambda = 2\,,$$

d'où $x_1(t) := -\frac{2}{3}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{3t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := -\frac{2}{3}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (1) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto -\frac{2}{3} + Ce^{3t}\,;\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction du 2)

On réécrit :

$$x'(t) + 2x(t) = e^{2t}\,. \tag{3}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) + 2x_0(t) = 0\,. \tag{4}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 + 2 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = -2$. Conséquemment, les solutions de l'équation (4) sont de la forme $x_0(t) = Ce^{-2t}$ où C est une constante.
On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (3). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{-2t}$. L'équation (3) devient alors

$$\lambda'(t)e^{-2t} - 2\lambda(t)e^{-2t} + 2\lambda(t)e^{-2t} = e^{2t}\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = e^{4t}\,,$$

dont $t \mapsto \frac{1}{4}e^{4t}$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := \frac{1}{4}e^{4t} \times e^{-2t} = \frac{1}{4}e^{2t}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients constants. Or, le second membre est la fonction $t \mapsto e^{2t}$. Ainsi, on recherche une solution particulière sous la forme $x_1(t) := \lambda e^{2t}$ où λ est une constante. Alors, l'équation (3) devient

$$2\lambda e^{2t} + 2\lambda e^{2t} = e^{2t}$$

d'où $\lambda = \frac{1}{4}$ donne une solution particulière. Ainsi, $x_1(t) := \frac{1}{4}e^{2t}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{-2t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := \frac{1}{4}e^{2t}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (3) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto \frac{1}{4}e^{2t} + Ce^{-2t}\,;\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction du 3)

On réécrit :

$$x'(t) + x(t) = \log(t)\,. \tag{5}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) + x_0(t) = 0\,. \tag{6}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 + 1 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = -1$. Conséquemment, les solutions de l'équation (6) sont de la forme $x_0(t) = Ce^{-t}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (5). Pour cela, on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{-t}$. L'équation (5) devient alors

$$\lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t} = \log(t)\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \log(t)e^{t}\,.$$

dont $t \mapsto \int_{s=1}^{t} \log(s)e^{s}ds$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := \int_{s=1}^{t} \log(s)e^{s}ds \times e^{-t} = \int_{s=1}^{t} \log(s)e^{s-t}ds$ est une solution particulière.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{-t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := \int_{s=1}^{t} \log(s)e^{s-t}ds$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (5) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto \int_{s=1}^{t} \log(s)e^{s-t}ds + Ce^{-t}\,;\, C \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Correction du 4)

On réécrit :

$$x'(t) - 5x(t) = e^{5t} . \tag{7}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - 5x_0(t) = 0 . \tag{8}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 - 5 = 0 .$$

Il y a une unique solution : $X_0 = 5$. Conséquemment, les solutions de l'équation (8) sont de la forme $x_0(t) = Ce^{5t}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (7). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{5t}$. L'équation (7) devient alors

$$\lambda'(t)e^{5t} + 5\lambda(t)e^{5t} - 5\lambda(t)e^{5t} = e^{5t} .$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = 1 ,$$

dont $t \mapsto t$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := t \times e^{5t} = te^{5t}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients constants. Or, le second membre est $t \mapsto e^{5t}$. *On remarque que* 5 *est une solution de l'équation caractéristique de l'équation homogène associée. Conséquemment, on doit augmenter le degré.* Ainsi, on recherche une solution particulière sous la forme $x_1(t) := \lambda te^{5t}$. Alors, on a $x_1'(t) = \lambda e^{5t} + 5x_1(t)$. Ainsi, l'équation (7) devient

$$\lambda e^{5t} + 5x_1(t) - 5x_1(t) = e^{5t} ,$$

d'où $x_1(t) := te^{5t}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{5t})$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := te^{5t}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (7) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto (t + C)\, e^{5t} \,;\, C \in \mathbb{R} \right\} .$$

Correction du 5)

On réécrit :

$$x'(t) + 3t^2 x(t) = t^2 . \tag{9}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients non constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) + 3t^2 x_0(t) = 0\,. \tag{10}$$

On met donc cette équation sous la forme d'une équation à variables séparées :

$$\frac{x_0'(t)}{x_0(t)} = -3t^2\,, \tag{11}$$

pour $x_0(t) \neq 0$. On intègre l'équation (11) et l'on a alors

$$\log |x_0(t)| = -t^3 + C\,,$$

où C est une constante. Conséquemment, il vient

$$x_0(t) = C' e^{-t^3}\,,$$

où C' est une constante. On peut vérifier que cette fonction vérifie bien (10). Conséquemment, les solutions de l'équation (10) sont de la forme $x_0(t) = Ce^{-t^3}$ où C est une constante.
On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (9). Pour cela, on peut procéder de deux manières : la méthode de la variation de la constante et en devinant l'entrée par rapport à la sortie.

Méthode de la variation de la constante On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{-t^3}$. L'équation (9) devient alors

$$\lambda'(t)e^{-t^3} - 3t^2\lambda(t)e^{-t^3} + 3t^2\lambda(t)e^{-t^3} = t^2\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = t^2 e^{t^3}\,,$$

dont $t \mapsto \frac{1}{3}e^{t^3}$ est une primitive. Ainsi, $x_1(t) := \frac{1}{3}e^{t^3} \times e^{-t^3} = \frac{1}{3}$ est une solution particulière.

En devinant l'entrée par rapport à la sortie L'équation est linéaire et à coefficients non constants. Or, le second membre est $t \mapsto t^2$ et le coefficient devant le terme $x(t)$ dans l'équation est un monôme de degré 2. On teste donc une entrée constante : $x_1(t) = C$. Alors, on a $x_1'(t) = 0$. Ainsi, l'équation (9) devient

$$3t^2 C = t^2\,,$$

d'où $x_1(t) := \frac{1}{3}$ est une solution.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{-t^3}\right)$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := \frac{1}{3}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (9) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{ t \mapsto \frac{1}{3} + Ce^{-t^3}\,;\, C \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Correction du 6)

On réécrit :

$$x'(t) - x(t) = \sin(t)\,. \tag{12}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - x_0(t) = 0\,. \tag{13}$$

On considère donc l'équation caractéristique :

$$X_0 - 1 = 0\,.$$

Il y a une unique solution : $X_0 = 1$. Conséquemment, les solutions de l'équation (13) sont de la forme $x_0(t) = Ce^t$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (12). Pour cela, on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^t$. L'équation (12) devient alors

$$\lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = \sin(t)\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \sin(t)e^{-t}\,.$$

On cherche maintenant une primitive de $\sin(t)e^{-t}$. On peut procéder à une intégration par parties ou on peut aussi passer en complexes. Passons en complexes :

$$\begin{aligned}\int \sin(t)e^{-t}dt &= \mathrm{Im}\left\{\int e^{(i-1)t}\right\}\\ &= \mathrm{Im}\left\{\frac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right\}\\ &= \mathrm{Im}\left\{\frac{(-i-1)(\cos(t)e^{-t} + i\sin(t)e^{-t})}{2}\right\}\\ &= \frac{-\cos(t) - \sin(t)}{2}e^{-t}\,.\end{aligned}$$

Ainsi, $x_1(t) := \frac{-\cos(t)-\sin(t)}{2}e^{-t} \times e^t = -\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$ est une solution particulière.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^t)$. Et, on a une solution particulière $x_1(t) := -\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$. Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (12) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto -\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2} + Ce^t\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Correction du 7)

On réécrit :

$$(1+t^2)x'(t) - tx(t) = 1 + t + t^2\,. \tag{14}$$

Cette équation est linéaire, du premier ordre et à coefficients non constants. Le terme devant $x'(t)$ étant une fonction, la première chose à faire est de diviser par ce terme à savoir $1+t^2$. Or, la fonction $t \mapsto 1+t^2$ est non nulle. On peut donc diviser sans se poser de questions sur l'intervalle d'étude. On a une nouvelle équation :

$$x'(t) - \frac{t}{1+t^2}x(t) = 1 + \frac{t}{1+t^2}\,. \tag{15}$$

On sait donc que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un espace affine de dimension un. Cherchons l'espace vectoriel sous-jacent. Pour ça, on résout l'équation homogène associée :

$$x_0'(t) - \frac{t}{1+t^2}x_0(t) = 0\,. \tag{16}$$

On met donc cette équation sous la forme d'une équation à variables séparées :

$$\frac{x_0'(t)}{x_0(t)} = \frac{t}{1+t^2}\,, \tag{17}$$

pour $x_0(t) \neq 0$. On intègre l'équation (17) et l'on a alors

$$\log|x_0(t)| = C + \frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right)\,,$$

où C est une constante. Conséquemment, il vient

$$x_0(t) = C'\sqrt{1+t^2}\,,$$

où C' est une constante. On peut vérifier que cette fonction vérifie bien (16). Conséquemment, les solutions de l'équation (16) sont de la forme $x_0(t) = C\sqrt{1+t^2}$ où C est une constante.

On cherche maintenant à trouver une solution particulière à l'équation (15). Pour cela, on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution x_1 sous la forme $x_1(t) = \lambda(t)x_0(t)$ c'est-à-dire sous la forme $x(t) = \lambda(t)\sqrt{1+t^2}$. L'équation (15) devient alors

$$\lambda'(t)\sqrt{1+t^2} = 1 + \frac{t}{1+t^2}\,.$$

Il vient alors

$$\lambda'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + t\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

On intègre maintenant cette fonction. On sait, voir formulaire, qu'une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est la fonction $t \mapsto \log\left(t + 1\sqrt{1+t^2}\right)$. Et, une primitive de $t \mapsto t\,(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Ainsi, $x_1(t) := \left(\log\left(t+1\sqrt{1+t^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \times \sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+t^2}\log\left(t+1\sqrt{1+t^2}\right) - 1$ est une solution particulière.

On a résolu l'équation homogène dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \sqrt{1+t^2}\right)$. Et, on a une solution particulière

$$x_1(t) := \sqrt{1+t^2}\log\left(t+1\sqrt{1+t^2}\right) - 1\,.$$

Alors, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (9) est

$$\mathcal{S} = x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \sqrt{1+t^2}\log\left(t+1\sqrt{1+t^2}\right) - 1 + C\sqrt{1+t^2}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Exercice 124

Énoncé

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & + & x_2(t) & + & x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_3'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2x_3(t) & + & x_4(t) \\ x_4'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & x_3(t) & + & 2x_4(t) \end{array}\right. .$$

Correction

On remarque que $S'(t) = 5S(t)$ où $S(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$. Donc on a l'égalité suivante :

$$S(t) = (x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0))\, e^{5t} .$$

Puis, on observe $x_i'(t) = x_i(t) + S(t)$ pour tout $i \in [\![1;4]\!]$.

Ainsi : $x_i'(t) = C_i e^t + e^t \int_0^t e^{-u} S(u) du = K_i e^t + \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^{5t}$. Or, $x_i(0) = K_i + \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right)$. Conséquemment :

$$\begin{array}{l} x_1(t) = \frac{1}{4}\left(3x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^t + \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^{5t} \\ x_1(t) = \frac{1}{4}\left(x_1(0) + 3x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^t + \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^{5t} \\ x_1(t) = \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + 3x_3(0) + x_4(0)\right) e^t + \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^{5t} \\ x_1(t) = \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + 3x_4(0)\right) e^t + \frac{1}{4}\left(x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)\right) e^{5t} \end{array}$$

Exercice 125

Énoncé

Résoudre ces différentes équations différentielles du premier ordre :

1) $tx'(t) - 2x(t) - t^4 = 0$.
2) $2tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t}$.
3) $x'(t)\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-x(t)^2}$.
4) $x'(t)\tan(t) = x(t)$.
5) $x'(t) = 2tx(t)^2$.
6) $x(t) - \frac{t}{2}x'(t) = \sqrt{x(t)}$.
7) $tx'(t) - x(t) - x(t)^3 = 0$.

Correction

Correction du 1)

On cherche ici à résoudre l'équation différentielle

$$tx'(t) - 2x(t) - t^4 = 0\,. \tag{18}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants. Or, le coefficient devant le terme $x'(t)$ est t. Cette fonction s'annule en 0. On va donc diviser par t mais on résout alors sur des intervalles qui ne contiennent pas 0 et l'on fera ensuite des recollements. On étudie donc maintenant

$$x'(t) - \frac{2}{t}x(t) = t^3\,. \tag{19}$$

On considère l'équation homogène associée

$$x_0'(t) - \frac{2}{t}x_0(t) = 0\,.$$

On la transforme en une équation à variables séparées :

$$\frac{x_0'(t)}{x_0(t)} = \frac{2}{t}\,,$$

pour $x_0(t) \neq 0$. En intégrant, il vient $\log|x_0(t)| = 2\log|t| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ d'où $x_0(t) = \lambda t^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il suffit maintenant de chercher une solution particulière. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante ou on teste une entrée de la forme $x_1(t) := Ct^\alpha$ avec $\alpha > 0$ et $C \in \mathbb{R}$. On a alors

$$tx_1'(t) - 2x_1(t) = C\alpha t^\alpha - 2Ct^\alpha = C\,(\alpha - 2)\,t^\alpha\,.$$

En prenant $\alpha = 4$ puis $C = \frac{1}{2}$, on a une solution particulière : $x_1(t) = \frac{t^4}{2}$. On a donc résolu l'équation sur $\mathbb{R}_+$:

$$x_+(t) = \frac{t^4}{2} + \lambda_+ t^2\,,$$

où $\lambda_+ \in \mathbb{R}$. On l'a également résolue sur $\mathbb{R}_-$:

$$x_-(t) = \frac{t^4}{2} + \lambda_- t^2\,,$$

où $\lambda_- \in \mathbb{R}$. On peut ensuite recoller ces deux solutions en 0 :

$$x(t) = \frac{t^4}{2} + \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_+ t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ \lambda_- t^2 & \text{si } t \leq 0 \end{array} \right. .$$

Cette fonction est alors continue, dérivable et de dérivée continue en 0. Toutefois, il y a deux degrés de liberté. Il faut donc retenir de cet exercice que si le coefficient devant $x'(t)$ peut s'annuler, il faut être précautionneux.

Correction du 2)

On cherche ici à résoudre l'équation différentielle

$$2tx'(t) + x(t) = \frac{1}{t}\,. \tag{20}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas définie en 0. On ne peut donc résoudre que sur des intervalles ne contenant pas 0. Aussi, il n'y a aucun problème à diviser par $2t$, le coefficient devant $x'(t)$. Il ne faudra pas effectuer de recollements. On étudie donc

$$x'(t) + \frac{1}{2t}x(t) = \frac{1}{2t^2}\,. \tag{21}$$

On considère l'équation homogène associée

$$x_0'(t) + \frac{1}{2t}x_0(t) = 0\,.$$

On la transforme en une équation à variables séparées :

$$\frac{x_0'(t)}{x_0(t)} = -\frac{1}{2t}\,.$$

pour $x_0(t) \neq 0$. On intègre l'équation et il vient $\log|x_0(t)| = -\frac{1}{2}\log|t| + C$ où C est une constante. Conséquemment, il vient $x_0(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit maintenant de chercher une solution particulière à l'équation (20). Pour cela, on remarque que la sortie est $\frac{1}{t}$. Ainsi, on teste le signal d'entrée $x_1(t) := \frac{C}{t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. L'équation (20) devient alors

$$2t\frac{-C}{t^2} + \frac{C}{t} = \frac{1}{t}\,.$$

En prenant $C = -1$, on a une solution particulière $x_1(t) = -\frac{1}{t}$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+$ est donc

$$\mathcal{S}_+ = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{t} + \frac{C}{\sqrt{t}}\,;\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et, sur $\mathbb{R}_-$, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_- = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{t} + \frac{C'}{\sqrt{-t}}\,;\, C' \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction du 3)

On cherche à résoudre l'équation à variables séparées

$$x'(t)\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-x(t)^2}\,. \tag{22}$$

Il est extrêmement important de prendre garde. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ n'est pas lipschitzienne sur un intervalle contenant 0. Conséquemment, on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il faudra donc être très précautionneux avec les éventuels phénomènes de Peano.
Soit x une solution de (22) sur un intervalle $\mathcal{I}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ n'est définie que sur $[-1;1]$. Par conséquent, $\mathcal{I} \subset [-1;1]$.
Par définition, $\sqrt{1-x(t)^2} \geq 0$ pour tout $t \in \mathcal{I}$ et $\sqrt{1-t^2} \geq 0$ pour tout $t \in [-1;1]$. On en déduit immédiatement que l'on a $x'(t) \geq 0$. Donc la fonction x est croissante sur l'intervalle $\mathcal{I}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ n'est définie que sur $[-1;1]$ donc, pour tout $t \in \mathcal{I}$, on a $-1 \leq x(t) \leq 1$. Immédiatement, si $x(t_-) = -1$, alors $x(t) = -1$ pour tout $t \in \mathcal{I}$ tel que $t \leq t_-$. De même, si $x(t_+) = 1$, alors $x(t) = 1$ pour tout $t \in \mathcal{I}$ tel que $t \geq t_+$.
On a donc immédiatement identifé deux solutions : $x_{min}(t) := -1$ pour tout $t \in [-1;1]$ et $x_{max}(t) := 1$ pour tout $t \in [-1;1]$. Par ailleurs, il n'y a pas d'autres fonctions constantes à vérifier l'équation (22).
Soit maintenant une autre solution de (22). On suppose que cette fonction n'est pas constante. Soit donc $t_0 \in [-1;1]$ tel que $x_0 := x(t_0) \notin \{-1;1\}$. Alors, par continuïté, il existe un intervalle ouvert $\mathcal{J}$ contenant t_0 tel que $x(t) \notin \{-1;1\}$ pour tout $t \in \mathcal{J}$. Comme $\mathcal{J}$ est ouvert, il ne contient ni 1 ni -1. On peut alors diviser par $\sqrt{1-x(t)^2}$ et par $\sqrt{1-t^2}$. L'équation (22) devient alors

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{1-x(t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,. \tag{23}$$

Or une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathcal{J}$, on a

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx(s)}{\sqrt{1-x(s)^2}} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\,.$$

D'où :

$$\arcsin(x(t)) - \arcsin(x_0) = \arcsin(t) - \arcsin(t_0)\,. \tag{24}$$

Conséquemment, en utilisant $\sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin\left(\arcsin(t) + \arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)\right) \\
&= t\cos\left(\arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)\right) + \sqrt{1-t^2}\sin\left(\arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)\right) \\
&= t\left(\sqrt{1-x_0^2}\sqrt{1-t_0^2} + x_0 t_0\right) + \sqrt{1-t^2}\left(x_0\sqrt{1-t_0^2} - t_0\sqrt{1-x_0^2}\right) \\
&=: \varphi(t)\,.
\end{aligned}$$

La résolution n'est pas terminée car il reste à identifier l'intervalle maximal sur lequel la fonction φ coïncide avec la fonction x. Pour cela, on introduit deux valeurs particulières :

$$\begin{aligned}
t_- &:= \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \left(\arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)\right)\right) \\
\text{et} \quad t_+ &:= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

On a en effet
$$\varphi(t_-) = -1$$
si $-\frac{\pi}{2} - (\arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et
$$\varphi(t_+) = 1$$
si $\frac{\pi}{2} - (\arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ceci dépend du signe de $\theta_0 := \arcsin(x_0) - \arcsin(t_0)$. On scinde maintenant l'étude en trois cas différents :

Premier cas : $\theta_0 > 0$. Alors, $\varphi(t_+) = 1$ avec $t_+ < 1$. Puis, pour tout $t \in [-1; t_+]$, on a
$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \theta_0 \leq \arcsin(t) + \theta_0 \leq \arcsin(t_+) + \theta_0 = \frac{\pi}{2}\,.$$
La fonction sinus est bijective sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit
$$-1 < \varphi(-1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_+) = 1\,.$$
Conséquemment, la fonction φ coïncide avec la fonction x sur l'intervalle $[-1; t_+]$. Puis, comme x est croissante, on a la description suivante de la fonction x :
$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t) = \sin\left(\arcsin(t) + \theta_0\right) & \text{si } -1 \leq t \leq t_+ \\ 1 & \text{si } t_+ \leq t \leq 1 \end{cases}\,.$$
Deuxième cas : $\theta_0 < 0$. Alors, $\varphi(t_-) = -1$ avec $t_- > -1$. Puis, pour tout $t \in [t_-; 1]$, on a
$$-\frac{\pi}{2} = \arcsin(t_-) + \theta_0 \leq \arcsin(t) + \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0 < \frac{\pi}{2}\,.$$
La fonction sinus est bijective sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit
$$-1 = \varphi(t_-) \leq \varphi(t) \leq \varphi(1) < 1\,.$$
Conséquemment, la fonction φ coïncide avec la fonction x sur l'intervalle $[t_-; 1]$. Puis, comme x est croissante, on a la description suivante de la fonction x :
$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ \varphi(t) = \sin\left(\arcsin(t) + \theta_0\right) & \text{si } t_- \leq t \leq 1 \end{cases}\,.$$
Troisième cas : $\theta_0 = 0$. Alors, $\varphi(t_-) = -1$ avec $t_- = -1$ et $\varphi(t_+) = 1$ si $t_+ = 1$. Puis, pour tout $t \in [-1; 1]$, on a
$$-\frac{\pi}{2} = \arcsin(t_-) \leq \arcsin(t) \leq \arcsin(t_+) = \frac{\pi}{2}\,.$$
La fonction sinus est bijective sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit
$$-1 = \varphi(t_-) \leq \varphi(t) \leq \varphi(1) = 1\,.$$
Conséquemment, la fonction φ coïncide avec la fonction x sur l'intervalle $[-1; 1]$. Par ailleurs, avec $\theta_0 = 0$, on a $\varphi(t) = \sin\left(\arcsin(t)\right) = t$:
$$x(t) = t\,.$$
Cet exercice illustre donc parfaitement bien la nécessité de faire attention à l'intervalle sur lequel on résout.

Correction du 4)

On réécrit
$$x'(t)\tan(t) = x(t)\,. \tag{25}$$
Il s'agit d'une équation linéaire sans second membre donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension un. En paticulier, il existe une solution x_0 telle que x_0 ne soit pas nulle sur tout l'intervalle de définition. La fonction tangente est définie sur les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$. On résout donc sur un tel intervalle. Sans rien changer à la généralité, on prend $k = 0$. On met l'équation sous la forme d'une équation à variables séparées en divisant par $x(t)$ et par $\tan(t)$ (il faudra donc faire attention ensuite aux intervalles) :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,.$$

En intégrant, il vient $\log|x(t)| = C + \log|\sin(t)|$ avec $C \in \mathbb{R}$. On a alors $x(t) = \lambda\sin(t)$ où λ est une constante réelle. Ainsi, les solutions sont de la forme

$$x(t) = \begin{cases} \lambda_-\sin(t) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \\ \lambda_+\sin(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}\,.$$

Cette fonction est bien continue. Toutefois, pour que sa dérivée soit continue aussi, il faut $\lambda_- = \lambda_+$. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda\sin(t)\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Correction du 5)

On réécrit
$$x'(t) = 2tx(t)^2 \,. \tag{26}$$
Il s'agit d'une équation non linéaire. On divise par $x(t)^2$ sur un intervalle où x ne s'annule pas :
$$\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 2t \,.$$

L'intégration donne $\frac{1}{x(t)} = -t^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. On a ainsi $x(t) = \frac{1}{C-t^2}$. cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ si $C < 0$, sinon elle est définie sur $]-\infty; -\sqrt{C}[$, sur $]-\sqrt{C}; \sqrt{C}[$ et sur $]\sqrt{C}; +\infty[$. Les solutions ainsi définies ne s'annulent jamais. En d'autres termes, s'il existe t_0 tel que $x(t_0) \neq 0$ alors x ne s'annule jamais. Et, $x_0(t) := 0$ est une solution (qui correspond à $C = \pm\infty$). Voici donc toutes les solutions (c'est-à-dire la fonction et l'intervalle) de (26) :
- La fonction constante égale à 0 : $x(t) := 0$ sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.
- Pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x_{-\lambda^2}(t) := -\frac{1}{x^2+\lambda^2}$ sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.
- Pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x_{\lambda^2}(t) := -\frac{1}{x^2-\lambda^2}$ sur l'intervalle $]-\infty; -\lambda[$.
- Pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x_{\lambda^2}(t) := -\frac{1}{x^2-\lambda^2}$ sur l'intervalle $]-\lambda; \lambda[$.
- Pour tout $\lambda > 0$, la fonction $x_{\lambda^2}(t) := -\frac{1}{x^2-\lambda^2}$ sur l'intervalle $]\lambda; +\infty[$.
- La fonction $x_0(t) := -\frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
- La fonction $x_0(t) := -\frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Correction du 6)

On réécrit
$$x(t) - \frac{t}{2}x'(t) = \sqrt{x(t)} \,. \tag{27}$$
D'abord, on sait d'avance que la fonction solution x soit être positive. La fonction constante égale à 0 est une solution. Cherchons une autre solution c'est-à-dire x telle que x vérifie (27) et telle que $x(t_0) > 0$ pour un $t_0 \in \mathbb{R}$. Ensuite, il s'agit d'une équation de Bernoulli. On pose $x(t) := y(t)^2$. Il vient alors
$$y(t)^2 - ty(t)y'(t) = y(t) \,. \tag{28}$$
On se place sur un intervalle où $y(t)$ ne s'annule pas. On peut alors diviser par $y(t)$ sur cet intervalle. On obtient l'équation linéaire
$$-\, ty'(t) + y(t) = 1 \,. \tag{29}$$
On regarde l'équation homogène associée
$$-ty_0'(t) + y_0(t) = 0 \,.$$

Il faut alors diviser par t aussi on devra être prudent avec les intervalles contenant 0. Il s'agit d'une équation à variables séparées qu'on intègre facilement :
$$y_0(t) = \lambda t \,,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de l'équation (29) est la fonction constante égale à 1. Les solutions de l'équation linéaire (29) sont ainsi
$$y(t) = \begin{cases} \lambda_- t + 1 & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda_+ t + 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \,,$$

où λ_- et λ_+ sont deux constantes réelles non nécessairement égales. Conséquemment, si x est une solution non nulle partout de l'équation (27), on a

$$x(t) = \begin{cases} (\lambda_- t + 1)^2 & \text{si } t \leq 0 \\ (\lambda_+ t + 1)^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} ,$$

pour $t \in \mathcal{I}$ tel que $x(t) \neq 0$. Cette fonction est bien continue en 0 mais pour que sa dérivée soit continue, il faut obligatoirement $\lambda_- = \lambda_+$. Les solutions sont donc de la forme

$$x(t) = (\lambda t + 1)^2 ,$$

pour t tel que $x(t) \neq 0$. On peut ensuite recoller en $-\frac{1}{\lambda}$ avec la fonction $t \mapsto 0$, si $\lambda \neq 0$ et l'on a l'ensemble de toutes les solutions de (27) :

— $x(t) := 0$ sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.
— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x(t) := (\lambda t + 1)^2$ sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.
— Pour tout $\lambda \neq 0$, $x(t) := (\lambda t + 1)^2$ si $t \leq -\frac{1}{\lambda}$ et $x(t) = 0$ si $t \geq -\frac{1}{\lambda}$. Cette fonction est définie sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.
— Pour tout $\lambda \neq 0$, $x(t) = 0$ si $t \leq -\frac{1}{\lambda}$ et $x(t) := (\lambda t + 1)^2$ si $t \geq -\frac{1}{\lambda}$. Cette fonction est définie sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.

Correction du 7)

On réécrit

$$tx'(t) - x(t) - x(t)^3 = 0\,. \tag{30}$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées. On va devoir diviser par t et par $x(t) + x(t)^3$. Ainsi, il faudra faire attention aux intervalles contenant 0 et à la nullité éventuelle de la fonction $x(t)$. La fonction constante égale à 0 est une solution. On cherche maintenant une solution x sur un intervalle $\mathcal{I}$ où x ne s'annule pas. L'équation devient alors

$$\frac{x'(t)}{x(t) + x(t)^3} = \frac{1}{t}\,. \tag{31}$$

Pour intégrer (31), on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{X + X^3} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{1 + X^2}\,.$$

On multiplie par X et on fait tendre X vers 0 d'où $\alpha = 1$. Puis on multiplie par $1 + X^2$ et l'on fait tendre X vers i d'où $\beta = -1$ et $\gamma = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int \frac{dX}{X + X^3} &= \int \frac{dX}{X} - \int \frac{X}{1 + X^2} \\ &= \log|X| - \frac{1}{2}\log\left(1 + X^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{X^2}\right)\,.\end{aligned}$$

En intégrant (31), il vient

$$-\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{x(t)^2}\right) = \log|t| + C\,,$$

où C est une constante. Après quelques calculs, on obtient

$$x_\lambda(t) = \frac{\pm t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}\,,$$

où λ est une constante strictement positive. Cette fonction n'est jamais nulle et elle est définie sur $]-\lambda;\lambda[$. Voici donc l'ensemble de toutes les solutions de (30) :

— La fonction $x_\infty(t) := 0$ sur l'intervalle $\mathcal{I} := \mathbb{R}$.

— La fonction $x_\lambda^+(t) := \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}$ sur l'intervalle $\mathcal{I} :=]-\lambda;\lambda[$.

— La fonction $x_\lambda^-(t) := -\frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}$ sur l'intervalle $\mathcal{I} :=]-\lambda;\lambda[$.

Il n'y a pas d'autres solutions possibles car on ne peut pas recoller ces différentes fonctions de telles sortes que la fonction recollée soit continue et de dérivée continue.

Exercice 126

Énoncé

Résoudre ces différentes équations différentielles du second ordre :

1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}$.

2) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}$.

3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t)$.

4) $t^2\left(\log(t) - 1\right)x''(t) - tx'(t) + x(t) = 0$.

5) $t^2x''(t) + tx'(t) - x(t) = t^2$.

6) $t^2x''(t) - t(t+2)x'(t) + (t+2)x(t) = -t(t+1)$.

Correction

Correction du 1)

On réécrit :

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t}\,. \tag{32}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension deux. On résout donc d'abord l'équation homogène associée

$$x_0''(t) - 3x_0'(t) + 2x_0(t) = 0\,. \tag{33}$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2. L'ensemble des solutions de l'équation (33) est donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^t\,;\, t \mapsto e^{2t})$.
On cherche maintenant une solution particulière x_1. On devine le signal d'entrée à partir du signal de sortie. La sortie est $2e^{-t}$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $x_1(t) := \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation (32) devient alors

$$(-1)^2\lambda e^{-t} - 3 \times (-1)\lambda e^{-t} + 2\lambda e^{-t} = 2e^{-t}\,,$$

ce qui donne $\lambda = \frac{1}{3}$. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (32) est

$$\mathcal{S} := x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \frac{1}{3}e^{-t} + \lambda e^t + \mu e^{2t}\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}_{,}\,.$$

Correction du 2)

On réécrit :

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (3t-1)e^{2t}\,. \tag{34}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension deux. On résout donc d'abord l'équation homogène associée

$$x_0''(t) - 4x_0'(t) + 4x_0(t) = 0\,. \tag{35}$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = 0$ dont la solution double est 2. L'ensemble des solutions de l'équation (35) est donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\,(t \mapsto e^{2t}\,;\, t \mapsto te^{2t})$.
On cherche maintenant une solution particulière x_1. On devine le signal d'entrée à partir du signal de sortie. La sortie est une fonction polynômiale de degré 1 multipliée par l'exponentielle de $2t$. Or,

2 est solution double de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme $x_1(t) := (at^3 + bt^2)e^{2t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation (34) devient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(at^3 + bt^2\right)e^{2t} + 2\frac{d}{dt}\left(at^3 + bt^2\right)\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right) + \left(at^3 + bt^2\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{2t}\right)\\
&- 4\frac{d}{dt}\left(at^3 + bt^2\right)e^{2t} - 4(at^3 + bt^2)\frac{d}{dt}\left(e^2 t\right)\\
&+ 4(at^3 + bt^2)e^{2t}\\
&= (3t - 1)e^{2t}\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne $6at + 2b = 3t - 1$ d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (34) est

$$\mathcal{S} := x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + \lambda t + \mu\right)e^{2t}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}_, \,.$$

Correction du 3)

On réécrit :

$$x''(t) + x(t) = \cos(2t)\,. \tag{36}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donc un espace affine de dimension deux. On résout donc d'abord l'équation homogène associée

$$x_0''(t) + x_0(t) = 0\,. \tag{37}$$

L'équation caractéristique est

$$X^2 + 1 = 0\,,$$

dont les solutions sont i et $-i$. L'ensemble des solutions de l'équation (37) est donc engendré par la famille $(t \mapsto e^{it}\,;\, t \mapsto e^{-it})$. Comme on résout sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 := \mathrm{Vect}\,(t \mapsto \cos(t)\,;\, t \mapsto \sin(t))$.
On cherche maintenant une solution particulière x_1. On devine le signal d'entrée à partir du signal de sortie. La sortie est $\cos({}^2t) = \frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}$. Comme ni $2i$ ni $-2i$ ne sont des racines de X^2+1, on cherche alors une solution particulière sous la forme $x_1(t) = \lambda\cos(2t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation (36) devient alors

$$(\lambda - 4\lambda)\cos(2t) = \cos(2t)\,,$$

ce qui donne $\lambda = -\frac{1}{3}$. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (36) est

$$\mathcal{S} := x_1 + \mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto -\frac{1}{3}\cos(2t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)\,;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}_{,}\,.$$

Correction du 4)

On réécrit :

$$t^2\left(\log(t)-1\right)x''(t)-tx'(t)+x(t)=0\,. \tag{38}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants. On l'étudie sur l'intervalle $\mathcal{I}:=\,]0;+\infty[$. Il n'y a pas de méthode générale donc il faut deviner au moins une solution évidente. La fonction constante $t\mapsto 1$ ne fonctionne pas.
On teste la fonction $t\mapsto t$ et celle-ci marche. En effet, on a

$$t^2\left(\log(t)-1\right)\frac{d^2}{dt^2}t-t\frac{d}{dt}t+t=0-t\times 1+t=0\,.$$

Il faut maintenant trouver une autre solution non colinéaire à $t\mapsto t$. On peut soit deviner que $t\mapsto\log(t)$ est une solution plus ou moins "évidente" (on la teste car elle intervient dans l'un des coefficients) soit on procède à la méthode de la variation de la constante. On cherche alors une autre solution sous la forme $x_1(t):=\lambda(t)t$ où λ est une fonction. L'équation (38) devient alors

$$t^2\left(\log(t)-1\right)\left(\lambda''(t)t+2\lambda'(t)\right)-t^2\lambda'(t)-t\lambda(t)+\lambda(t)t=0\,.$$

On trouve ainsi

$$\left(\log(t)-1\right)\left(\lambda''(t)t+2\lambda'(t)\right)-\lambda'(t)=0\,,$$

après avoir divisé par t^2 (on se place sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut). On la met sous la forme d'une variable séparées en divisant par $\log(t)-1$ (il faudra donc faire attention aux intervalles qui contiennent e^1) et par $\lambda'(t)$ (en se plaçant sur un intervalle où λ' ne s'annule pas) :

$$\frac{\lambda''(t)}{\lambda'(t)}=\frac{1}{t\left(\log(t)-1\right)}-\frac{2}{t}\,,$$

ce qui s'intègre comme suit

$$\log|\lambda'(t)|=-2\log(t)+\log|\log(t)-1|+\lambda\,,$$

où $\lambda\in\mathbb{R}$. On obtient alors

$$\lambda'(t)=\frac{C}{t^2}\log(t)-\frac{C}{t^2}\,,$$

où C est une constante réelle. Il suffit maintenant d'intégrer le membre de droite. La fonction $t\mapsto-\frac{C}{t^2}$ admet $t\mapsto\frac{C}{t}$ comme primitive. Primitivons l'autre fonction :

$$\int\frac{\log(t)}{t^2}dt=-\frac{\log(t)}{t}+\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{\log(t)}{t}-\frac{1}{t}\,.$$

Ainsi, une primitive de $t\mapsto\frac{C}{t^2}\log(t)-\frac{C}{t^2}$ est

$$-C\frac{\log(t)}{t}-\frac{C}{t}+\frac{C}{t}=-C\frac{\log(t)}{t}\,.$$

Ainsi, $x_1(t)=-C\frac{\log(t)}{t}t=-C\log(t)$ est une solution. On est ainsi tenté de dire que l'ensemble des solutions est

$$\left\{t\mapsto\lambda\log(t)+\mu t\,;\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}\,.$$

Toutefois, il ne faut pas oublier de recoller en $t=e^1$. En effet, on a divisé par $\log(t)-1$. On cherche des solutions telles que les fonctions soient continues et de dérivées continues. On cherche à recoller une solution $t \mapsto \lambda_- \log(t) + \mu_- t$ sur $]0; e]$ et une solution $t \mapsto \lambda_+ \log(t) + \mu_+ t$ sur $[e; +\infty[$. cela revient à résoudre le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_- + \mu_- e = \lambda_+ + \mu_+ e \\ \frac{\lambda_-}{e} + \mu_- = \frac{\lambda_+}{e} + \mu_+ \end{array} \right. .$$

La résolution donne $\mu_- = \mu_+ + \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{e}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension trois :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \Big\{ t \mapsto & \alpha \log(t) \mathbb{1}_{0<t<e^1} + \left(\gamma + \frac{\beta - \alpha}{e^1} \right) t \mathbb{1}_{0<t<e^1} \\ & + \beta \log(t) \mathbb{1}_{e^1 \leq t} + \gamma t \mathbb{1}_{e^1 \leq t} \,;\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \Big\} . \end{aligned}$$

Correction du 5)

On réécrit :

$$t^2x''(t) + tx'(t) - x(t) = t^2\,. \tag{39}$$

On résout d'abord l'équation homogène associée

$$t^2x_0''(t) + tx_0'(t) - x_0(t) = 0\,. \tag{40}$$

D'un point de vue intuitif, quand on dérive, le degré diminue de 1. Ainsi, $t^2x''(t) + tx'(t) - x(t)$ est de même degré que $x(t)$. On cherche une solution sous la forme $x_0(t) = t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation (40) devient alors

$$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1)\,t^\alpha = 0\,.$$

On est ainsi amené à résoudre l'équation

$$\alpha^2 - 1 = 0\,,$$

dont les solutions sont $\alpha_+ = 1$ et $\alpha_- = -1$. La fonction $t \mapsto t^{-1}$ n'est pas définie en 0. On ne se place donc pas sur des intervalles contenant 0 lorsque l'on utilise la fonction $t \mapsto t^{-1}$. L'ensemble des solutions de (40) est donc

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x_0(t) := \lambda t$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $x_0(t) := \lambda t + \frac{\mu}{t}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $x_0(t) := \lambda t + \frac{\mu}{t}$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

Il suffit maintenant de trouver une solution particulière. On ne procède pas à la méthode de la variation de la constante. On cherche la solution sous la forme $x_1(t) = Ct^2$ avec $C \in \mathbb{R}$. L'équation (39) devient alors

$$2Ct^2 + Ct^2 - Ct^2 = t^2$$

d'où $C = \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions de (39) est donc

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x_0(t) := \lambda t + \frac{t^2}{2}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $x_0(t) := \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{t^2}{2}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $x_0(t) := \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{t^2}{2}$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

Correction du 6)

On réécrit :

$$t^2x''(t) - t(t+2)x'(t) + (t+2)x(t) = -t(t+1) \tag{41}$$

On résout d'abord l'équation homogène associée

$$t^2x_0''(t) - t(t+2)x_0'(t) + (t+2)x_0(t) = 0\,. \tag{42}$$

Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre cette équation. On doit donc deviner une solution particulière. On teste la fonction $t \mapsto 1$. Cette fonction n'est pas solution. On teste ensuite $t \mapsto t$ et c'est une solution. On cherche maintenant la solution générale de (41) sous la forme $x(t) := f(t)t$. L'équation (41) devient alors

$$t^3\left(f''(t) - f'(t)\right) = -t(t+1)\,.$$

On divise par t^3 (et l'on aura alors à étudier les recollements possibles en 0 par la suite) et il suffit maintenant de résoudre l'équation différentielle

$$f''(t) - f'(t) = -\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\,, \tag{43}$$

sur un intervalle ne contenant pas 0. On intègre cette équation et l'on obtient

$$f'(t) - f(t) = -\log|t| + \frac{1}{t} + \lambda\,,$$

où λ est une constante réelle. Une solution de l'équation homogène associée est $t \mapsto e^t$. Il suffit maintenant de trouver une solution particulière. Or, on remarque que la fonction $t \mapsto \log|t|$ est solution de

$$f'(t) - f(t) = -\log|t| + \frac{1}{t}\,,$$

tandis que la fonction $t \mapsto -\lambda$ est solution de

$$f'(t) - f(t) = \lambda\,.$$

Conséquemment, la résolution générale de (43) est

$$f(t) = -\lambda + \log|t| + \mu e^t\,,$$

où λ et μ sont des constantes réelles. La solution générale de (41) est ainsi

$$x(t) = -\lambda t + t\log|t| + \mu t e^t\,,$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t\log|t|$ peut être prolongée par continuïté en 0 mais sa dérivée ne peut pas être prolongée en 0. Conséquemment, l'ensemble des solutions de l'équation (41) est

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $x(t) := t\log|t| + \lambda t + \mu t e^t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $x(t) := t\log|t| + \lambda t + \mu t e^t$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.