Correction des travaux dirigés - Séries numériques et séries de fonctions

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 114

Énoncé

Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

1. $u_n := \frac{n}{3n-1}$.
2. $u_n := \frac{1}{2^n-3}$.
3. $u_n := \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
4. $u_n := \frac{2^n}{n^{10}}$.
5. $u_n := \frac{1}{n\log(n)}$ pour $n \geq 2$.
6. $u_n := (-1)^n\frac{\log(n)}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction

Correction du 1)

Le numérateur est équivalent à n et le dénominateur est équivalent à $3n$ donc u_n converge vers $\frac{1}{3} \neq 0$. la série n'est donc pas convergente.

Correction du 2)

On utilise le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n-3}{2^{n+1}-3} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{3}{2^n}}{1-\frac{3}{2^{n+1}}} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1\,.$$

On aurait aussi pu utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs (pour $n \geq 2$) vu que $\frac{1}{2^n-3} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ dès que $n \geq 2$.

Correction du 3)

On utilise ici le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\longrightarrow 1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} < 1\,.$$

La série est donc convergente.

Correction du 4)

La série est divergente car le terme général u_n tend vers l'infini.

Correction du 5)

On ne peut pas utiliser le critère de Cauchy. En effet $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow 1$. De même, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ donc on ne peut pas utiliser le critère de D'Alembert. Comme les termes sont positifs, on utilise la comparaison avec l'intégrale. Soit $f(x) := \frac{1}{x\log(x)}$ pour $x \geq 2$. La fonction f est définie sur $[2;+\infty[$ positive et sa limite est 0 en l'infini. De plus, la fonction $x \mapsto x\log(x)$ est croissante donc f est décroissante strictement. Conséquemment, on peut utiliser le théorème de comparaison avec une intégrale. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_2^R f(x)dx &= \int_2^R \frac{dx}{x\log(x)}\\ &= \int_2^R \frac{d\log(x)}{\log(x)}\\ &= \int_{\log(2)}^{\log(R)} \frac{du}{u}\\ &= (\log(\log(R)) - \log(\log(2))) \longrightarrow +\infty\,.\end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale diverge.

Correction du 6)

La série est alternée. On lui applique donc le théorème des séries alternées. On vérifie que les axiomes sont vérifiés. La suite $\frac{\log(n)}{n}$ tend vers 0 en décroissant. En effet, soit $f(x) := \frac{\log(x)}{x}$ alors $f'(x) = \frac{1-\log(x)}{x^2} < 0$ dès que $x \geq 3$. Ainsi, la série $\left(\Sigma(-1)^n\frac{\log(n)}{n}\right)_{n\geq 3}$ est convergente. Comme la nature de la convergence ne dépend pas des premiers termes de la série, on en déduit la convergence de la série $\left(\Sigma(-1)^n\frac{\log(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 115

Énoncé

Étudier la convergence des séries de terme général :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.
2. $2\log(n^3+1)+3\log(n^2+1)$.
3. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$.
4. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
5. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
6. $\frac{(-1)^n}{\log(n)}$.
7. $\frac{1!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
8. $\frac{1}{\log(n)^{\log(n)}}$.

Correction

Correction du 1)

Un développement limité de ce terme est $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e = -\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Or, la série harmonique ne converge pas. Conséquemment, la série diverge vers $-\infty$.

Correction du 2)

Le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

Correction du 3)

Un développement limité de ce terme est $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}$. Conséquemment, la série converge.

Correction du 4)

Si $|a|<1$, le terme général est équivalent à a^n et donc la série converge. Si $|a|>1$, le terme général est équivalent à a^{-n} et donc la série converge. Mais, si $|a|=1$, le terme général ne tendant pas vers 0, la série est donc divergente.

Correction du 5)

On applique le critère spécial des séries alternées pour en déduire la convergence de la série.

Correction du 6)

On applique le critère spécial des séries alternées pour en déduire la convergence de la série.

Correction du 7)

On remarque $1!+\cdots+n! \leq (n-1)(n-1)!+n! \leq 2\times n!$. Donc, le terme général (qui est positif) est inférieur à $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ donc la série converge.

Correction du 8)

On réécrit comme suit : $\frac{1}{\log(n)^{\log(n)}} = \exp\left(-\log(n)\log(\log(n))\right) = n^{-\log(\log(n))}$. Pour n suffisamment grand, on a donc $\frac{1}{\log(n)^{\log(n)}} < n^{-2}$. La série est donc convergente.

Exercice 116

Énoncé

Soit la suite de terme général $u_n := (n^4+n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$ où P est un polynôme. À quelle condition sur P la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Correction

On a $(n^4+n^2)^{\frac{1}{4}} = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Donc, si $\deg(P) \neq 3$, le terme général ne converge pas vers 0. De plus, le coefficient dominant de P doit être 1. On a donc $P(n) = n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma$. Il vient :

$$u_n = n\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\frac{\gamma}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

On fait un développement limité. Toutefois, on peut déjà remarquer que le terme dominant est $-\frac{\alpha}{3}$. Pour que u_n tende vers 0, il faut donc $\alpha = 0$.

$$u_n = n\left[\left(1+\frac{1}{4n^2} - \frac{3}{32}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \left(1+\frac{\beta}{3n^2}+\frac{\gamma}{3n^3}-\frac{\beta}{9n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right].$$

Le terme dominant est donc en $\frac{1}{n}$ avec le coefficient $\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{3}\right)$. Cette série diverge si $\beta \neq \frac{3}{4}$. Il faut donc $\beta = \frac{3}{4}$. Enfin, dans ce cas, on obtient : $u_n \approx -\frac{\gamma}{3n^2}$. Conséquemment, la série converge, quelle que soit la valeur de γ. Il s'ensuit $P(n) = n^3 + \frac{3n}{4} + \gamma$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 117

Énoncé

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
4. $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
5. $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.

Correction

Correction du 1)

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$. On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \longrightarrow \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 2)

On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+2}$. On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - 2\frac{1}{2} - 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{n+1}\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 3)

On remarque $k^3 + 8k^2 + 17k + 10 = (k+1)(k+2)(k+5)$. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{k^3+8k^2+17k+10} = \frac{1}{4}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{12}\frac{1}{k+5}$. On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10} &= \frac{1}{12}\left(3\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} + \sum_{k=6}^{n+5} \frac{1}{k}\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{12}\left(3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right) = \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 4)

On regarde la somme partielle :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \log(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \log(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} \log(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \log(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \log(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \log(k)\\
&= \log(2) + \sum_{k=3}^{n-1} \log(k) + \sum_{k=3}^{n-1} \log(k) + \log(n) + \log(n+1)\\
&\qquad - 2\log(2) - 2\sum_{k=3}^{n-1} \log(k) - 2\log(n)\\
&= -\log(2) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow -\log(2)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 118

Énoncé

Démontrer la convergence des séries suivantes puis calculer leur somme :

1. $\Sigma \frac{2}{4n^2-1}$ pour $n \geq 1$.
2. $\Sigma \frac{1}{n!}$.

Correction

Première série

Pour montrer la convergence, on se sert de la comparaison avec une intégrale. On pose $f(x) := \frac{1}{4x^2-1}$. cette fonction est positive, décroissante sur $[1; +\infty[$ et sa limite en l'infini est égale à 0. Par ailleurs, cette fonction est équivalente à $\frac{1}{4x^2}$ en l'infini. Ainsi, on regarde l'intégrale :

$$\int_1^R f(x)dx = \int_1^R \frac{1}{4x^2}dx = 4 - \frac{4}{R} \longrightarrow 4\,.$$

Cette intégrale étant finie, on en déduit la convergence de la série. Pour le calcul de la série, on se sert de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles :

$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}\,.$$

D'où

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\,.$$

On peut alors écrire la somme partielle d'ordre n sous la forme suivante :

$$\begin{array}{llllll} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{1} + & \displaystyle\frac{1}{3} + & \displaystyle\frac{1}{5} + & \cdots + & \displaystyle\frac{1}{2n-1} & \\ \qquad\qquad\qquad\quad - & \displaystyle\frac{1}{3} - & \displaystyle\frac{1}{5} - & \cdots - & \displaystyle\frac{1}{2n-1} & \displaystyle - \frac{1}{2n+1}\,. \end{array}$$

On obtient immédiatement :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n^2-1} = 1 - \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 1\,.$$

On a ainsi obtenu la limite sans faire le moindre calcul.

Deuxième série

Les termes sont tous strictement positifs et l'on peut utiliser le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0\,.$$

La série est donc convergente. Pour obtenir la valeur exacte, on utilise le développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, en prenant $x = 1$, on obtient immédiatement $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Remarque

On peut montrer ce résultat sans faire appel au développement en série entière. Soient les deux suites U et V définies par

$$U_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et

$$V_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n}\frac{1}{n!}\,.$$

On remarque immédiatement que la suite U est croissante et majorée par la suite V. La suite V est, quant à elle, décroissante :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n}\frac{1}{n!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0\,.$$

De plus, $V_n - U_n = \frac{1}{n}\frac{1}{n!}$ tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes si bien qu'elles sont convergentes de même limite.

On pose ensuite $f_n(x) := e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{n!}$. Alors, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = e^{-1}U_n$. La fonction f_n est le produit d'une fonction polynômiale et de l'inverse de l'exponentielle donc elle est dérivable sur $[0;1]$. De plus, on a :

$$f_n'(x) = -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{n!} + e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} < 0\,.$$

Conséquemment, on a $f_n(1) \leq f_n(0) = 1$ c'est-à-dire $U_n \leq e$.

On introduit maintenant $g_n(x) := f_n(x) + \frac{x}{n!}$. Cette fonction est à nouveau dérivable et l'on a $g_n'(x) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{x^n}{e^x}\right) \geq 0$ car $x^n \leq 1 \leq e^x$. La fonction g_n est donc croissante sur $[0;1]$ d'où $g_n(1) \geq g_n(0) = f_n(0) = 1$. Il vient donc immédiatement : $f_n(1) \geq 1 - \frac{1}{n!}$ d'où $U_n \geq e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \longrightarrow e$. Ceci achève la preuve.

Exercice 119

Énoncé

Soient deux séries numériques absolument convergentes de terme général a_n et b_n. Montrer que la série de fonctions de terme général $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Correction

On utilise ici le critère de Weierstrass. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| &\leq |a_n| \, |\cos(nx)| + |b_n| \, |\sin(nx)| \\ &\leq |a_n| + |b_n| \ . \end{aligned}$$

Or, les séries réelles de termes généraux $|a_n|$ et $|b_n|$ sont toutes les deux convergentes. Ainsi, la série de terme général $|a_n| + |b_n|$ est convergente. Conséquemment, la série de terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ converge absolument pour la norme infinie (ou elle converge “normalement”). On applique le critère de Weierstrass et la preuve est achevée.

Exercice 120

Énoncé

Donner le rayon de convergence R et la fonction somme des séries entières de terme général u_n et étudier le cas où $x = \pm R$:

1. $u_n(x) := \frac{x^n}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$.
2. $u_n(x) := \frac{x^n}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$.

Correction

Première série

Comme les termes sont strictement positifs, on peut calculer le rayon de convergence R avec la formule suivante :

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty\,.$$

La série converge donc sur tout $\mathbb{R}$ (et sur tout $\mathbb{C}$ en fait).
On peut donc écrire $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$.

Deuxième série

Comme les termes sont strictement positifs, on peut calculer le rayon de convergence R avec la formule suivante :

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1\,.$$

La série converge donc sur l'intervalle $]-1;1[$ (et sur tout le disque unité **ouvert** dans $\mathbb{C}$ en fait).
On peut donc écrire $S(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$. De plus, la fonction S est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$, et l'on peut dériver terme à terme :

$$S''(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Il suffit alors d'intégrer la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ deux fois. On obtient :

$$S'(x) = -\log(1-x)$$

puis en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
S(x) &= -\int_0^x \log(1-t)dt \\
&= -\left[t\log(1-t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1-t}dt \\
&= -x\log(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) dt \\
&= -x\log(1-x) + \log(1-x) + x\,.
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à étudier ce qu'il se passe en $x = 1$ et $x = -1$.

Si on regarde la fonction somme, on voit

$$\lim_{x \to -1^+} S(x) = 2\log(2) - 1\,.$$

Mais aussi :

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = 1\,.$$

En effet, $\displaystyle\lim_{h\to 0} h\log(h) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\log\left(\frac{1}{X}\right) = -\lim_{X\to+\infty} \frac{\log(X)}{X} = 0.$

On regarde maintenant la série avec $x = 1$ et avec $x = -1$. On sait que les séries sont convergentes car la valeur absolue du terme principal est $\frac{1}{n(n-1)}$ ce qui est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente (en utilisant le théorème de comparaison avec une intégrale). Avec $x = 1$, on peut procéder à un télescopage comme dans le 1) de l'exercice 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 = \lim_{x\to 1^-} S(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour prouver la convergence de la série entière lorsque $x = -1$, on utilise le théorème des séries alternées. En effet, la quantité $\frac{1}{n(n-1)}$ tend vers 0 en décroissant. On obtient par ailleurs le résultat :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\log(2) - 1\,.$$

Remarque

Lorsque l'on a une série entière, on peut calculer sa somme et la mettre sous une forme analytique sur le domaine de convergence. Par exemple, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

pour tout $x \in]-1;1[$. Mais l'existence de $f(x_0)$ ne suffit pas pour justifier que la série converge si $x_0 \notin]-1;1[$. En effet :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n}_{\text{n'existe pas}} \neq \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n}_{=+\infty} \neq \frac{1}{1-2} = -1\,.$$

Exercice 121

Énoncé

1) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge.

Correction

Correction du 1) et 2) simultanément

Si $e^x \leq 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ diverge car le terme général tend vers $+\infty$. Au contraire, si $x > 0$ (ce qui implique $e^x > 1$), la série converge. Ainsi, la série converge sur $\mathbb{R}_+^*$.

On calcule $f(x)$ maintenant. On remarque $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ny^n$ où $y := e^x$. Calculons $g(y) := \sum_{n=0}^{\infty} ny^n$ pour $y \in]0;1[$. On remarque $g(y) = y\frac{d}{dy}\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{y}{(1-y)^2}$ d'où $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$.

On en déduit la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$ mais la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 122

Énoncé

Montrer, pour $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_{t=0}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$.

Correction

On procède au développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$. Donc :

$$\int_{t=0}^{1} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt = \int_{0}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+x-1} dt \,.$$

On peut intervertir les deux sommes et l'on obtient $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+x-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.