Correction des travaux dirigés - Suites numériques et suites de fonctions

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 107

Énoncé

Étudier la convergence des suites u dont le terme général est :

1. $u_n := \frac{2n-4}{3n+5}$.
2. $u_n := n^3 - 2n^2$.
3. $u_n := \frac{\log(n)}{n}$.
4. $u_n := n^2 - n\log(n)$.
5. $u_n := n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. $u_n := n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
7. $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
8. $u_n := \frac{1}{n+(-1)^n}$, $n \geq 2$.
9. $u_n := (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.
10. $u_n := \sqrt[n]{n}$.
11. $u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
12. $u_n := \frac{2^n}{n^2}$.
13. $u_n := \frac{n!}{2^n}$.
14. $u_n := \frac{n!}{n^n}$.
15. $u_n := \frac{n}{2^n}$.

Correction

Correction du 1)

Le numérateur est équivalent à $2n$ et le dénominateur à $3n$ donc le quotient est équivalent à $\frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$. La limite est donc $\frac{2}{3}$.

Correction du 2)

Le terme dominant est n^3 et il tend vers $+\infty$ donc la limite est $+\infty$.

Correction du 3)

Soit la fonction $\varphi(t) := 2\sqrt{t} - \log(t)$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$. On a $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} \geq 0$ pour tout $t \geq 1$. or, $\varphi(1) = 2 > 0$ donc $\log(t) < 2\sqrt{t}$ pour tout $t \geq 1$. Ainsi, on a $\frac{\log(t)}{t} < \frac{2}{\sqrt{t}}$ lorsque $t \geq 1$. Puis, l'on en déduit la convergence de $\frac{\log(n)}{n}$ quand n tend vers l'infini.

Correction du 4)

On factorise par n^2 : $u_n = n^2\left(1 - \frac{\log(n)}{n}\right)$. Le facteur $1 - \frac{\log(n)}{n}$ converge vers 1 tandis que n^2 tend vers l'infini. La limite est donc $+\infty$.

Correction du 5)

On réécrit :

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)-\sin(0)}{h-0} = \sin'(0)\,.$$

La limite est donc $\cos(0) = 1$.

Correction du 6)

Ici, on ne peut pas identifier avec $\cos'(0)$ car $\cos(0) = 1 \neq 0$. En revanche, le facteur n tend vers l'infini alors que $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 1. La limite est donc $+\infty$.

Correction du 7)

On procède par l'astuce suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,.
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ tend vers l'infini. Conséquemment, la limite de la suite u est 0.
On aurait également pu procéder par un développement limité. En effet :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

ce qui tend également vers 0.

Correction du 8)

Quel que soit $n \geq 2$, on note : $n+(-1)^n \geq n-1$ donc pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$. La suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n\geq 2}$ tend vers 0 donc la suite u_n tend vers 0.

Correction du 9)

$(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$. La suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ tend vers 0 donc la suite de terme général $1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 1. Puis, $\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1. Ainsi, la suite u_n tend vers 3.
Remarque : on peut voir u_n comme la norme n de $(2;3)$ et l'on a ainsi prouvé $\lim_{n\to\infty} ||(2;3)||_n = 3 = ||(2;3)||_\infty$.

Correction du 10)

Par définition, on a $u_n = \exp\left\{\frac{\log(n)}{n}\right\}$. On sait que $\frac{\log(n)}{n}$ tend vers 0 donc u_n converge vers $e^0 = 1$.

Correction du 11)

La suite de terme général $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1. Ainsi, on serait tenté de dire que la limite est 1^∞. Ceci est une forme indéterminée !
On utilise à nouveau l'exponentielle :

$$u_n = \exp\left\{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right\}.$$

En procédant comme dans le 5), il vient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = f'(0)$$

avec $f(x) := \log(1+x)$. Donc $f'(0) = 1$. On en déduit que la suite u converge vers $e^1 = e$.

Correction du 12)

On écrit :

$$\frac{2^n}{n^2} = \exp\left\{n\log(2) - 2\log(n)\right\} = \exp\left\{n\log(2)\left(1 - \frac{2}{\log(2)}\frac{\log(n)}{n}\right)\right\}$$

La suite de terme général $\left(1 - \frac{2}{\log(2)}\frac{\log(n)}{n}\right)$ converge vers 1. On en déduit que u converge vers $+\infty$.

Correction du 13)

On met sous la forme d'un produit de n facteurs :

$$\frac{n!}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=3}^{n-1}\frac{k}{2}\right) \times \frac{n}{2}.$$

Pour tout $3 \leq k \leq n-1$, on a $\frac{k}{2} > 1$ donc $u_n > \frac{n}{4}$. Or, la suite de terme général $\frac{n}{4}$ tend vers $+\infty$. Conséquemment, la suite u tend vers $+\infty$.

Correction du 14)

On procède de la même manière :

$$\frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\prod_{k=2}^{n-1}\frac{k}{n}.$$

Pour tout $2 \leq k \leq n-1$, on a $\frac{k}{n} < 1$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. or, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Conséquemment, la suite u tend vers 0.
On pourrait également utiliser la formule de Sterling :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1))$$

d'où $\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}(1 + o(1))$.

Correction du 15)

On utilise le résultat du 12) : $u_n = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{2^n}{n^2}}$. La suite de terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et la suite de terme général $\frac{2^n}{n^2}$ tend vers $+\infty$ donc la suite u converge vers 0.

Remarque

Dans le 5), pour prouver que l'on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \,, \tag{1}$$

on a utilisé le résultat suivant : $\sin'(x) = \cos(x)$. Toutefois, pour montrer que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, on se sert de (1). Présentons maintenant la véritable preuve de (1).
Plaçons-nous dans le cercle trigonométrique. On appelle O le point de coordonnées $(0;0)$, $A := (1,0)$, $M(x) := (\cos(x); \sin(x))$ et $N(x) := (1; \tan(x))$. On appelle aussi $H(x)$ la projection de $M(x)$ sur la droite des abscisses : $H(x) := (\cos(x); 0)$.
Le triangle $M(x)H(x)A$ est rectangle en $H(x)$ donc on en déduit $\left\| \overrightarrow{M(x)H(x)} \right\| \leq \left\| \overrightarrow{M(x)A} \right\|$ puisque l'hypothénuse est le côté le plus long d'un triangle rectangle. Ceci se traduit ainsi :

$$\sin(x) \leq \left\| \overrightarrow{M(x)A} \right\| .$$

Comme le chemin le plus court entre deux points est un segment de droite, on en déduit que l'arc de cercle reliant A à $M(x)$ est plus long que $\left\| \overrightarrow{M(x)A} \right\|$. Par définition, la longueur de cet arc est x. Il vient :

$$\sin(x) \leq x \,.$$

On peut maintenant prouver que l'aire de la section d'angle x est égale à $\frac{x}{2}$. En effet, si $x = 2\pi \frac{1}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, l'aire de la section est égale à $\frac{\pi}{q} = \frac{x}{2}$ puis l'on peut étendre aux angles de la forme $x = 2\pi r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$. Enfin, l'on étend à $\mathbb{R}$ par l'absurde.
Or, cette section de disque est incluse dans le triangle $OAN(x)$. L'aire du triangle est donc plus grande que l'aire de la section, à savoir $\frac{x}{2}$. Or, l'aire du triangle vaut : $\frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan(x)$. Il vient :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \,.$$

On rappelle que l'on a $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)}$ d'où

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \,.$$

La continuité de la fonction cosinus en 0 achève la preuve.

Puis, pour prouver que $\sin'(x) = \cos(x)$, on écrit :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \sin(x) \left(\cos(h) - 1 \right) + \cos(x) \sin(h) \right\} .$$

En utilisant les formules trigonométriques, on obtient :

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = -2 \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\sin\left(\frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} .$$

La limite (1) implique alors la convergence de $\frac{\cos(h)-1}{h}$ vers 0. Puis, l'application de (1) à nouveau implique

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)\,.$$

On prouve de la même manière

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\,(\cos(h)-1)-\sin(x)\sin(h)}{h} \to -\sin(x)\,.$$

Toutefois, pour prouver (1), on a utilisé la continuité en 0 de la fonction cosinus puis pour prouver $\sin'(x)=\cos(x)$, on a utilisé la continuité en 0 de la fonction sinus. Pour cela, on utilise la décroissance de la fonction cosinus. Puis, l'on étudie la suite u de terme général $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Les formules trigonométriques donnent

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\,.$$

Conséquemment, l'on a

$$\begin{aligned} |1-u_{n+1}| = 1-u_{n+1} &= \frac{1-\frac{1+u_n}{2}}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} \\ &= \frac{1-u_n}{2\left(1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)} = \frac{|1-u_n|}{2\left(1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)} \\ &\le \frac{1}{2}\,|1-u_n| \le \frac{1}{2^n}\,. \end{aligned}$$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ tend vers 0. Puis, comme la fonction est décroissante par définition, on en déduit sa continuité en 0. Le théorème de Pythagore nous donne $\sin(x)=\sqrt{1-\cos^2(x)}$ pour $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$. Aussi, la fonction sinus est également continue en 0. La preuve est désormais achevée.

Exercice 108

Énoncé

Étudier la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 3$ et $3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$.

Remarque

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Cela signifie notamment que l'ensemble des suites qui vérifient cette formule de récurrence est un espace vectoriel de degré 2 ce qui explique pourquoi on a besoin de deux conditions (u_0 et u_1) pour décrire entièrement la suite.

Correction

L'équation caractéristique de cette suite est

$$3X^2 - 4X + 1 = 0\,.$$

Les solutions de cette équation sont 1 et $\frac{1}{3}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n = \lambda \times (1)^n + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n\,.$$

Il reste à trouver λ et μ. Pour cela, on se sert des valeurs initiales. On a le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 5 \\ \lambda + \frac{\mu}{3} = 3 \end{cases}\,.$$

On trouve ainsi $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ d'où

$$u_n = 2 + 3^{1-n}\,.$$

On en déduit immédiatement que la suite u est décroissante et converge vers 2.

Exercice 109

Énoncé

1) Vérifier que l'équation $x^2 = 2$ peut s'écrire $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
2) Étudier brièvement la fonction f définie sur l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
3) En déduire que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [1;2] \text{ quelconque} \\ u_{n+1} := f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

converge vers $\sqrt{2}$.
4) Calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près en utilisant cet algorithme.

Remarque

L'objet de l'exercice est d'illustrer le théorème du point fixe. En effet, dans certains cas, on ne peut pas résoudre formellement certaines équations. On utilise alors des techniques d'analyse numérique. L'idée est ici de trouver une fonction f telle que $\sqrt{2}$ en soit un point fixe. Puis, on applique le théorème du point fixe et l'on en déduit que u_n converge vers la valeur recherchée. On peut d'ailleurs évaluer la vitesse de convergence.

Correction

Correction du 1)

L'équation $x^2 = 2$ peut s'écrire $x = \frac{2}{x}$. En effet, $x \neq 0$. Puis, comme $\frac{2}{x} = x$, on en déduit $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{2}{x} = \frac{1}{2}\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x$ d'où

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) .$$

Correction du 2)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[1;2]$. On calcule sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) .$$

Ainsi, si $x < \sqrt{2}$, on a $f'(x) < 0$ et si $x > \sqrt{2}$, on a $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement décroissante sur $[1;\sqrt{2}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{2};2]$. Comme on compte utiliser le théorème du point fixe, on évalue également $|f'(x)|$. La dérivée de $f'(x)$ est $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ donc

$$\sup_{x\in[1;2]} |f'(x)| = \max\left\{|f'(1)| \ ; \ |f'(2)|\right\} = \frac{1}{2} < 1 .$$

Par ailleurs, $f(1) = \frac{3}{2} \in [1;2]$, $f(2) = \frac{3}{2}$ et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in [1;2]$. Conséquemment, pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \in \left[\sqrt{2};\frac{3}{2}\right] \subset [1;2]$.

Correction du 3)

Vérifions les trois hypothèses nécessaires à l'application du théorème du point fixe (de Picard) :

1. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $[1;2]$.
2. Pour tout $x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$.
3. Pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \in [1;2]$.

Comme $u_0 \in [1;2]$, on peut appliquer le théorème et l'on en déduit que la suite u converge vers l'unique point fixe de f, à savoir $\sqrt{2}$.

Correction du 4)

Prenons $u_0 := 2$. Évaluons la vitesse de la méthode. On a

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|f(u_n) - f(\sqrt{2})\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right| .$$

Ainsi, on peut prouver par récurrence :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|2 - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n} .$$

On souhaite évaluer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près. On a donc besoin d'avoir

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-4} .$$

On prend le logarithme et il vient

$$-n\log(2) < -4\log(10) ,$$

ce qui implique $n > 4\frac{\log(10)}{\log(2)}$ d'où l'on a besoin de calculer u_{14}. On calcule avec un logiciel de calcul formel ou en C++.

Pour aller plus loin

Remarque : dans la pratique, les algorithmes sont en général plus rapides que ce que l'on pourrait attendre au vu de la borne supérieure obtenue.

On cherche maintenant à améliorer le résultat de vitesse de convergence obtenu. Pour cela, on rappelle que $f(x) \in [\sqrt{2}; \frac{3}{2}]$ pour tout $x \in [1;2]$. On peut donc obtenir une meilleure borne pour la dérivée de

f :

$$\begin{aligned}
\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| &= u_{n+1}-\sqrt{2} \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{u_n} f'(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{u_n}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{u_n}\left(1-\frac{2}{u_n^2}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)\frac{u_n^2-2}{u_n^2} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2\frac{u_n+\sqrt{2}}{u_n^2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la suite v de terme général $v_n := \log(u_n-\sqrt{2})$. On a alors :

$$v_{n+1} \leq -\frac{1}{2}\log(2)+2v_n$$

avec $v_0 := \log(2-\sqrt{2}) < 0$. Considérons maintenant la suite w de terme général w_n tel que

$$w_{n+1} = -\frac{1}{2}\log(2)+2w_n$$

et $w_0 = v_0 = \log(2-\sqrt{2})$. La suite w est arithmético-géométrique et l'on obtient facilement

$$w_n = \left(\log(2-\sqrt{2})+\frac{1}{2}\log(2)\right)2^n-\frac{1}{2}\log(2) .$$

Par récurrence, on montre facilement que $v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conséquemment, on a

$$\log\left(u_n-\sqrt{2}\right) \leq \left(\log(2-\sqrt{2})+\frac{1}{2}\log(2)\right)2^n-\frac{1}{2}\log(2) .$$

Il suffit donc d'avoir

$$\left(\log(2-\sqrt{2})+\frac{1}{2}\log(2)\right)2^n-\frac{1}{2}\log(2) \leq -4\log(10)$$

ce qui se traduit par

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{4\log(10)-\frac{1}{2}\log(2)}{-\log\left(2\sqrt{2}-2\right)}\right)}{\log(2)} \approx 5.6 .$$

Ainsi, il est suffisant d'avoir $n \geq 6$. Calculons les termes de u :

1. $u_0 = 2$.
2. $u_1 = \frac{3}{2} = 1.5$.
3. $u_2 = \frac{17}{12} \approx 1.416667$.
4. $u_3 = \frac{577}{408} \approx 1.414216$.
5. $u_4 = \frac{665857}{470832} \approx 1.414213562$.

On voit ainsi que l'on a les neuf premières décimales dès la quatrième itération, ce qui est encore mieux que ce que l'on attendait.

Exercice 110

Énoncé

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1) Inégalité de Bernoulli : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+t)^n \geq 1 + nt$.

2) Pour tout $n \geq 1$, $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Correction

Correction du 1)

Étape 1 : On vérifie que l'hypothèse est vraie au rang 0. $(1+t)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times t$. L'hypothèse est donc bien vraie au rang 0.

Étape 2 : On suppose maintenant qu'elle est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
(1+t)^{n+1} &= (1+t) \times (1+t)^n \\
&\geq (1+t)(1+nt) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence au rang } n \\
&\geq 1 + (n+1)t + t^2 \\
&\geq 1 + (n+1)t\,.
\end{aligned}$$

L'hypothèse est vraie au rang $n+1$ pour peu qu'elle le soit au rang n.

Étape 3 : On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bernoulli est vraie.

Correction du 2)

Étape 1 : On vérifie que l'hypothèse est vraie au rang 1. $\prod_{k=1}^{1}(4k-2) = 2 = \prod_{k=1}^{1}(1+k)$. L'hypothèse est donc bien vraie au rang 1.

Étape 2 : On suppose maintenant qu'elle est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) &= (4(n+1)-2)\prod_{k=1}^{n}(4k-2) \\
&= (4n+2)\prod_{k=1}^{n}(n+k) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence au rang } n \\
&= (4n+2)\prod_{k=1}^{n}((n+1)+(k-1)) \\
&= (4n+2)\prod_{k=0}^{n-1}((n+1)+k) \\
&= (4n+2)(n+1)\frac{1}{((n+1)+n)((n+1)+(n+1))}\prod_{k=1}^{n+1}((n+1)+k) \\
&= \frac{2(2n+1)(n+1)}{(2n+1)\times 2 \times (n+1)}\prod_{k=1}^{n+1}((n+1)+k) \\
&= \prod_{k=1}^{n+1}((n+1)+k)\,.
\end{aligned}$$

L'hypothèse est vraie au rang $n+1$ pour peu qu'elle le soit au rang n.
Étape 3 : On en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Méthode directe

On peut démontrer ces inégalités sans passer par la récurrence.

1) Soit $t > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = C_n^0 + C_n^1 t + \sum_{k=2}^{n} C_n^k t^k \geq C_n^0 + C_n^1 t = 1 + nt\,.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= 2^n \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \\
&= 2^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \\
&= 2^n \frac{(2n)!}{n! \times 2^n} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \prod_{k=n+1}^{2n} k \\
&= \prod_{k=1}^{n}(n+k)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 111

Énoncé

Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions suivante :

$$\begin{array}{rccl} f_n & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) := \frac{x^n+1}{x^2+1} \end{array} .$$

Correction

Convergence simple

Si $|x| < 1$, $x^n + 1$ converge vers 1. Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $f_n(x)$ converge vers $\frac{1}{x^2+1}$.
Si $x = 1$, $x^n + 1 = 2$ et $x^2 + 1 = 2$. Ainsi, $f_n(1)$ converge vers 1.
Si $x > 1$, $x^n + 1$ converge vers $+\infty$. Ainsi, pour tout $x > 1$, $f_n(x)$ converge vers $+\infty$.
Puis, si $x \leq -1$, $x^n + 1$ ne converge pas d'où $f_n(x)$ ne converge pas.

Ainsi, la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccl} f_n & :]-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) := \frac{x^n+1}{x^2+1} \end{array}$$

converge simplement vers la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & :]-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array} .$$

Convergence uniforme

La fonction f n'est pas continue en 1. On en déduit immédiatement que la convergence n'est pas uniforme. Et, si l'on se restreint à l'intervalle $]-1;1[$, elle ne l'est pas non plus. En effet,

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_\infty &= \sup_{x \in]-1;1[} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in]-1;1[} \left| \frac{x^n}{x^2+1} \right| . \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $||f_n - f||_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conséquemment, il n'y a pas de convergence uniforme.

En revanche, on peut prouver que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle fermé et borné (compact) inclus dans $]-1;1[$. Remarque : il faut donc toujours mentionner le domaine sur lequel il y a une convergence uniforme.

Exercice 112

Énoncé

Montrer la convergence uniforme sur $[1;+\infty[$ de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) := \log\left(x+\frac{1}{n}\right) \end{array}$$

vers la fonction logarithme népérien.

Correction

La convergence simple est immédiate puisque $x+\frac{1}{n}$ tend vers x quand n tend vers l'infini. On calcule maintenant la distance (pour la norme uniforme) entre f_n et f :

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\log\left(x+\frac{1}{n}\right)-\log(x)\right| = \left|\log\left(1+\frac{1}{nx}\right)\right| .$$

Pour tout $x \geq 1$, on a $\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}$ d'où $|f_n(x)-f(x)| \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ pour tout $x \geq 1$. Conséquemment :

$$\sup_{x\geq 1} |f_n(x)-f(x)| \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$$

ce qui traduit la convergence uniforme de f_n vers f sur $[1;+\infty[$.

Remarque : si l'intervalle d'étude était $\mathbb{R}_+^*$, la convergence ne serait pas uniforme.

Exercice 113

Énoncé

1) Déterminer la limite simple des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) := \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. On rappelle la formule de Sterling : $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

2) Calculer $\lim\limits_{n\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$.

Correction

Correction du 1)

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x^n = o(n!)$ donc $f_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi, la suite de fonctions converge simplement vers 0. Prouvons maintenant la convergence uniforme. Pour cela, on calcule le supremum sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f_n. La dérivée de f_n est

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}\left(n - x\right) .$$

Le supremum est donc atteint pour $x = n$. Or, $f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$ ce qui est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ pour n tendant vers l'infini, d'après la formule de Sterling. Conséquemment, $||f_n||_\infty = f_n(n) \longrightarrow 0$ ce qui achève de prouver la convergence uniforme de la suite de fonctions f_n vers 0.

Correction du 2)

On ne peut pas conclure par la nullité de cette limite en ayant la convergence uniforme. En effet, la mesure de Lebesgue n'est pas finie sur $\mathbb{R}_+$. Il s'agit d'ailleurs d'un contre-exemple

On procède par une intégration par parties pour obtenir la formule de récurrence suivante :

$$\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx = \underbrace{\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^\infty}_{=0} + (n+1)\int 0^\infty x^n e^{-x}dx\,.$$

Conséquemment, on trouve :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!\,.$$

On en déduit que l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f_n vaut 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, cette limite vaut 1 et l'on ne peut donc pas dire que la limite de l'intégrale est égale à l'intégrale de la limite.