Correction des travaux dirigés - Algèbre linéaire

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 91

Énoncé

Trouver $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) = (2, -3, 4)$.

Correction

Il s'agit de résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 4 \\ x & + & y & & & = & -3 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right. . \tag{1}$$

On peut résoudre ce système de différentes manières. Toutefois, comme la matrice sous-jacente est triangulaire inférieure :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut résoudre directement :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ 4 + y = -3 \\ 4 + y + z = 2 \end{array}\right.$$

d'où $x = 4$ et $y = -7$. Puis : $4 + (-7) + z = 2$ donc $z = 5$.

Exercice 92

Énoncé

Déterminer k de manière à ce que les vecteurs u et v soient orthogonaux avec :
1) $u := (1, k, -3)$ et $v := (2, -5, 4)$.
2) $u := (2, 3k, -4, 1, 5)$ et $v := (6, -1, 3, 7, 2k)$.

Rappel

Les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0.

Correction

Correction du 1)

Le produit scalaire de $(1, k, -3)$ et $(2, -5, 4)$ est égal à

$$(1, k, -3) \,.\, (2, -5, 4) = 1 \times 2 + k \times (-5) + (-3) \times 4 = 2 - 5k - 12 = -5\,(k+2)\ .$$

Ainsi, les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $k = -2$.

Correction du 2)

Le produit scalaire de $(2, 3k, -4, 1, 5)$ et $(6, -1, 3, 7, 2k)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&(2, 3k, -4, 1, 5) \,.\, (6, -1, 3, 7, 2k) \\
&= 2 \times 6 + (3k) \times (-1) + (-4) \times 3 + 1 \times 7 + 5 \times (2k) \\
&= 12 - 3k - 12 + 7 + 10k = 7(k+1)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $k = -1$.

Exercice 93

Énoncé

Soit $\mathbb{E} := \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes sur le corps des réels. Montrer que $\mathbb{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ lorsque
1) $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices ayant un déterminant nul.
2) $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices M telles que $M^2 = M$.

Correction

Pour montrer qu'un sous-ensemble $\mathbb{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, il suffit de vérifier l'une de ces trois conditions :

1. $\mathbb{F} = \emptyset$. Cette condition n'est jamais vraiment réalisée en pratique donc il faut regarder les conditions 2 et 3.
2. $\mathbb{F}$ n'est pas stable pour l'addition. Il suffit alors d'exhiber $x, y \in \mathbb{F}$ tels que $x + y \notin \mathbb{F}$.
3. $\mathbb{F}$ n'est pas stable pour la multiplication par un scalaire. Il suffit alors d'exhiber $x \in \mathbb{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda.x \notin \mathbb{F}$.

Si $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices ayant un déterminant nul

On considère les deux matrices

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par calcul, on a : $\text{Det}(M) = 1 \times 0 - 0 \times 0 = 0$ et $\text{Det}(N) = 0 \times 1 - 0 \times 0 = 0$. Mais, $\text{Det}\,(M + N) = \text{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$. Donc $M + N \notin \mathbb{F}$.

Si $\mathbb{F}$ est l'ensemble des matrices M telles que $M^2 = M$

La matrice identité $I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{F}$ puisque $I_2^2 = I_2 \times I_2 = I_2$. Or, $(2I_2)^2 = 4I_2 \neq 2I_2$. Donc $2.I_2 \notin \mathbb{F}$.

Exercice 94

Énoncé

Écrire la matrice $E := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction

On doit ici résoudre l'équation :

$$x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

avec $x, y, z \in \mathbb{R}$. On réécrit cette équation sous la forme d'un système de quatre équations linéaires à trois inconnues en identifiant les coefficients des matrices :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 3 \\ x & & & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & - & z & = & -1 \end{array} \right. \tag{2}$$

On peut résoudre par substitution : $x = 3$ puis $2z = -2$ donc $z = -1$. Enfin l'équation $x + y = 1$ implique $y = -2$. La dernière équation doit être vérifiée : $(-2) - (-1)$ est bien égal à -1. On a donc une unique solution : $x = 3$, $y = -2$ et $z = -1$.

Par le pivot de Gauss

Dans le cas présent, il n'est nul besoin de faire appel au pivot de Gauss pour résoudre (2). Toutefois, présentons celui-ci pour bien montrer qu'il fonctionne même si le nombre d'équations est différent du nombre d'inconnues.

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & (L_1) \\ 1 & 0 & 2 & 1 & (L_2) \\ 1 & 1 & 0 & 1 & (L_3) \\ 0 & 1 & -1 & -1 & (L_4) \end{array}$$

On choisit 1 comme pivot. Il vient

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & (L_1) \\ 0 & 0 & 2 & -2 & (L_2) - (L_1) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & (L_3) - (L_1) \\ 0 & 1 & -1 & -1 & (L_4) \end{array}$$

Puis

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & (L_1) \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & (L_2) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & (L_3) \\ 0 & 0 & -1 & 1 & (L_4) - (L_3) \end{array}$$

Puis

$$\begin{array}{ccc|cl}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 & (L_1) \\
0 & 0 & \boxed{2} & -2 & (L_2) \\
0 & \boxed{1} & 0 & -2 & (L_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & (L_4) + \frac{1}{2}\,(L_2)
\end{array}$$

Il n'y a plus de pivot disponible puisque la quatrième ligne ne contient que des coefficients nuls. Remarquons que ce système n'aurait pas de solution si le membre de droite de la quatrième ligne n'était pas nul. On réordonne et on divise et l'on obtient

$$\begin{array}{ccc|cl}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 & (L_1) \\
0 & \boxed{1} & 0 & -2 & (L_3) \\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{2}\,(L_2) \\
0 & 0 & 0 & 0 & (L_4)
\end{array}$$

Exercice 95

Énoncé

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes sur le corps des réels. Soit $\mathbb{E}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques ($M^T = M$) et $\mathbb{F}$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques ($M^T = -M$). Montrer que l'on a

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F},$$

c'est-à-dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} + \mathbb{F}$ et $\mathbb{E} \bigcap \mathbb{F} = \{0\}$.

Correction

Première Méthode

Soit une matrice carrée M quelconque de taille $n \times n$. On peut écrire

$$M = \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{:=S} + \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{:=A}. \tag{3}$$

On remarque : $S^T = \frac{\left(M+M^T\right)^T}{2} = \frac{M^T+\left(M^T\right)^T}{2} = \frac{M^T+M}{2} = S$ donc $S \in \mathbb{E}$.
Et, $A^T = \frac{\left(M-M^T\right)^T}{2} = \frac{M^T-\left(M^T\right)^T}{2} = \frac{M^T-M}{2} = -A$ donc $A \in \mathbb{F}$.
Conséquemment, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la combinaison linéaire d'une matrice de $\mathbb{E}$ et d'une matrice de $\mathbb{F}$. En d'autres termes, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E}+\mathbb{F}$. Puis, si $M \in \mathbb{E}\bigcap\mathbb{F}$, on a $M^T = M$ et $M^T = -M$ d'où $2M = 0$ d'où $M = 0$. Ainsi, $\mathbb{E}\bigcap\mathbb{F} = \{0\}$.

Deuxième Méthode

Si l'on ne voit pas directement l'astuce (3), on peut procéder par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On suppose qu'elle est de la forme :

$$M = S + A \tag{4}$$

où S est une matrice symétrique et A est une matrice anti-symétrique. Alors, on a :

$$M^T = S^T + A^T = S - A. \tag{5}$$

On a donc le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} S + A = M \\ S - A = M^T \end{cases}.$$

On en déduit que l'on a nécessairement

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}.$$

Puis, on vérifie que l'on a bien $S^T = S$, $A^T = -A$ et $S+A = M$. On en déduit donc que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme d'une matrice symétrique plus une matrice antisymétrique. De plus, on a prouvé que cette décomposition est unique d'où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$. (Il est donc inutile de prouver que les espaces $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont d'intersection réduite au singleton $\{0_n\}$.)

Troisième Méthode

On peut également utiliser la formule de Grassmann : $\dim(\mathbb{E}+\mathbb{F}) = \dim\mathbb{E} + \dim\mathbb{F} - \dim(\mathbb{E}\bigcap\mathbb{F})$. On montre que $\mathbb{E}\bigcap\mathbb{F} = \{0\}$ de la même manière que dans la première méthode. Puis, on remarque :

$$\dim\mathbb{E} = n + \frac{n^2-n}{2} \quad \text{et} \quad \dim\mathbb{F} = \frac{n^2-n}{2}\,.$$

En effet, on peut vérifier que la famille

$$\{E_{1,1}\,;\,\cdots\,;\,E_{n,n}\}\bigcup\left\{\frac{E_{i,j}+E_{j,i}}{2} \;\mid\; n \geq j > i \geq 1\right\}$$

est une base de $\mathbb{E}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont le coefficient à la ligne i et à la ligne j vaut 1 et où tous les autres sont nuls. De même, la famille $\left\{\frac{E_{i,j}-E_{j,i}}{2} \;\mid\; n \geq j > i \geq 1\right\}$ est une base de $\mathbb{F}$. Conséquemment, on a $\dim(\mathbb{E}\oplus\mathbb{F}) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ d'où $\mathbb{E}\oplus\mathbb{F} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 96

Énoncé

Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Correction

Le calcul matriciel donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

si $n \geq 4$.

Exercice 97

Énoncé

Soit $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

Correction

Le calcul matriciel donne

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 18 & -11 & 12 \\ 9 & -6 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors écrire

$$A^2 - 3A = -2I_3 .$$

On divise par -2 :

$$A \times \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 \right) = I_3 ,$$

ce qui prouve d'une part l'inversibilité de A et d'autre par que son inverse est $-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3$.

Exercice 98

Énoncé

Calculer le déterminant de la matrice $M := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction

On procède également par récurrence en effectuant le développement par rapport à la première colonne. Et, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(M) &= \left((-1)^{n+1} a_n\right) \times \cdots \times \left((-1)^{2+1} a_2 a_1\right) \\ &= (-1)^{3+\cdots(n+1)} \prod_{i=1}^{n} a_i \\ &= (-1)^{\frac{n^2+3n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

Puis, on note que si n est de la forme $n = 4p$ ou $n = 4p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{\frac{n^2+3n}{2}} = 1$ sinon $(-1)^{\frac{n^2+3n}{2}} = -1$.

Exercice 99

Énoncé

Soient $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les déterminants des matrices A^2, A^3, AB, AB^T, $3A$ et $A - B$.

Correction

Idée globale

L'objet de l'exercice n'est pas de calculer six déterminants après avoir effectué cinq opérations matricielles. Il s'agit d'utiliser les formules sur le déterminant. En effet, on rappelle

$$\text{Det }(M \times N) = \text{Det }(M) \text{Det }(N) \tag{6}$$

et

$$\text{Det }\left(M^T\right) = \text{Det }(M)\,. \tag{7}$$

On calcule donc le déterminant de A et celui de B.

Déterminants de A et B

On calcule le déterminant de A en développant par rapport à la première colonne (qui contient 3 éléments nuls) et l'on obtient

$$\text{Det }(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut utiliser la règle de Sarrus ou alors on peut remplacer la seconde ligne (L_2) par $(L_2) + (L_1)$ d'où

$$\text{Det }(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième ligne car elle contient un seul coefficient non nul et l'on a

$$\text{Det }(A) = (-1)^{2+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 3 = 9\,.$$

On calcule maintenant le déterminant de B :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}\,(B) \\
&= (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{Développement par rapport à la deuxième colonne} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{On remplace } (L_2) \text{ par } (L_2) - (L_3) \\
&= (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{Développement par rapport à la deuxième ligne} \\
&= -3
\end{aligned}$$

Résultats

On en déduit directement Det $(A^2) = (\mathrm{Det}\,(A))^2 = 9^2 = 81$, d'après (6).
Puis, Det $(A^3) = (\mathrm{Det}\,(A))^3 = 9^3 = 729$, d'après (6).
Puis, Det $(A \times B) = \mathrm{Det}\,(A)\mathrm{Det}\,(B) = 9 \times (-3) = -27$, d'après (6).
Ensuite, Det $(A \times B) = \mathrm{Det}\,(A)\mathrm{Det}\,(B^T) = \mathrm{Det}\,(A)\mathrm{Det}\,(B) = -27$ d'après (7).
Enfin, Det $(3A) = 3^4$Det $(A) = 81 \times 9 = 729$ car le déterminant est multi-linéaire et car la matrice a 4 lignes et 4 colonnes.

Pour finir, le déterminant n'est pas linéaire donc on doit calculer la matrice $A - B$ et l'on trouve :

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes sont nulles donc le déterminant est nul, par définition de celui-ci.

Exercice 100

Énoncé

Soit λ une valeur propre d'une application linéaire $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ étant un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{E}_\lambda$ l'ensemble de tous les vecteurs propres de T correspondant à la valeur propre λ. On parle d'espace propre associé à λ : $\mathbb{E}_\lambda := \{v \in \mathbb{E} \mid T(v) = \lambda v\}$.
Montrer que $\mathbb{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Correction

Il suffit ici de vérifier deux axiomes :

1. $\mathbb{E}_\lambda \neq \emptyset$.
2. Pour tout $v, w \in \mathbb{E}_\lambda$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\alpha.v + w \in \mathbb{E}_\lambda$.

Par définition, il existe au moins un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ donc $\mathbb{E}_\lambda$ est non vide. *Remarque : Même si λ n'était pas valeur propre, on a $T(0) = 0 = \lambda.0$ d'où $0 \in \mathbb{E}_\lambda$.*
On se donne maintenant $v, w \in \mathbb{E}_\lambda$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{array}{ll}
T(\alpha.v + w) & \\
= \alpha.T(v) + T(w) & \text{car } T \text{ est linéaire} \\
= \alpha.(\lambda.v) + \lambda.w & \text{car } v, w \in \mathbb{E}_\lambda \\
= (\alpha \times \lambda).v + \lambda.w & \text{car } \mathbb{E} \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K} \\
= (\lambda \times \alpha).v + \lambda.w & \text{car } \mathbb{K} \text{ est commutatif} \\
= \lambda.(\alpha.v) + \lambda.w & \text{car } \mathbb{E} \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K} \\
= \lambda.(\alpha.v + w) & \text{car } \mathbb{E} \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K}.
\end{array}$$

On en déduit donc que $\alpha.v + w$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. En d'autres termes : $\alpha.v + w \in \mathbb{E}_\lambda$. ceci prouve que $\mathbb{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Exercice 101

Énoncé

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Trouver toutes les valeurs propres de A et leurs vecteurs propres correspondants.
2) Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction

Valeurs propres et vecteurs propres

Pour trouver les valeurs propres, on calcule le polynôme caractéristique associé χ_A :

$$\begin{vmatrix} 1-X & 4 \\ 2 & 3-X \end{vmatrix} = (X-1)(X-3) - 8 = X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)\,.$$

Les deux valeurs propres sont donc -1 et 5. On aurait aussi pu les trouver en utilisant le pivot de Gauss. Cherchons maintenant $v_{-1} \in \mathbb{R}^2$ tel que $Av_{-1} = -v_{-1}$ et $v_5 \in \mathbb{R}^2$ tel que $Av_5 = 5v_5$ avec $v_{-1} \neq 0$ et $v_5 \neq 0$.
On est donc amené à résoudre deux systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues. Un vecteur v_{-1} possible est $v_{-1} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un vecteur v_5 possible est $v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation

Soit $P := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit de la matrice de passage de la base $(v_{-1}; v_5)$ vers la base canonique. Soit f l'application linéaire associée à A. Soit $v := (x;y)^T \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On calcule :

$$P^{-1}APv = P^{-1}A\left(xv_{-1} + yv_5\right) = P^{-1}\left(xAv_{-1} + yAv_5\right) = P^{-1}\left(-xv_{-1} + 5yv_5\right)\,.$$

Puis, par définition, $P^{-1}v_{-1} = (1,0)^T$ et $P^{-1}v_5 = (0,1)^T$. On obtient donc

$$P^{-1}AP(x;y)^T = (-x;5y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}(x;y)^T\,.$$

Conséquemment, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale. On peut aussi le vérifier par le calcul matriciel.

Exercice 102

Énoncé

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction

Inverse de A

On utilise la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^T$. On a $\det(A) = 1$.

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Inverse de B

On utilise le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}$$

On choisit le deuxième élément de la deuxième ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1') := (E_1) - 2 \times (E_2) \\ (E_2') := (E_2) \\ (E_3') := (E_3) \end{array}$$

On choisit ensuite le troisième élément de la troisième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1'') := (E_1') + 7 \times (E_3') \\ (E_2'') := (E_2') - 2(E_3') \\ (E_3'') := (E_3') \end{array}$$

Par conséquent : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inverse de C

On utilise le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}$$

On choisit le premier élément de la première ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
\boxed{2} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & (E'_1) := (E_1) \\
0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & (E'_2) := (E_2) - \frac{1}{2}(E_1) \\
0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & (E'_3) := (E_3) + \frac{1}{2}(E_1)
\end{array}$$

On choisit ensuite le deuxième élément de la deuxième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
\boxed{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & (E''_1) := (E'_1) + (E'_2) \\
0 & \boxed{-2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & (E''_2) := (E'_2) \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 & (E''_3) := (E'_3) + \frac{3}{2}(E'_2)
\end{array}$$

On choisit ensuite le troisième élément de la troisième ligne comme pivot :

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
\boxed{2} & 0 & 0 & 2 & -8 & -6 & (E'''_1) := (E''_1) - 6(E''_3) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 10 & 6 & (E'''_2) := (E''_2) + 6(E''_3) \\
0 & 0 & \boxed{\dfrac{1}{4}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 & (E'''_3)
\end{array}$$

Pour terminer, on ramène tous les pivots à 1 :

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & (E''''_1) := \frac{1}{2}(E'''_1) \\
0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -5 & -3 & (E''''_2) := -\frac{1}{2}(E'''_2) \\
0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 6 & 4 & (E''''_3) := 4(E'''_3)
\end{array}$$

Par conséquent : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 103

Énoncé

Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -3 \end{array}\right. .$$

Correction

On remarque que la somme des trois équations nous donne : $6x + 6y + 6z = 0$ soit $z = -x - y$. On substitue dans la deuxième équation et il vient $-x + y = 0$ d'où $x = y$ et $z = -2x$. On remplace ensuite dans la première équation et l'on trouve $3x = 3$ d'où $x = 1$, $y = 1$ et $z = -2$.

Exercice 104

Énoncé

Déterminer le nombre a pour que le système linéaire suivant ait une solution

$$\begin{cases} x - 3y - 4t = 1 \\ -x + 3y + z + 2t = 2 \\ -3x - y + 2z - 3t = a \\ 7x - y - z - 4t = -4 \end{cases}.$$

On suppose maintenant que a prend cette valeur. Y a-t-il une ou plusieurs solutions ? Y a-t-il une solution pour laquelle y vaut 3 ? Si oui, écrire cette solution.

Correction

Ici, on choisit de procéder au pivot de Gauss :

$$\begin{array}{cccc|c l} 1 & -3 & 0 & -4 & 1 & \quad (E_1) \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 2 & \quad (E_2) \\ -3 & -1 & 2 & -3 & a & \quad (E_3) \\ 7 & -1 & -1 & -4 & -4 & \quad (E_4) \end{array}$$

On choisit le premier élément de la première ligne comme pivot.

$$\begin{array}{cccc|c l} \boxed{1} & -3 & 0 & -4 & 1 & \quad (E_1') := (E_1) \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & \quad (E_2') := (E_2) + (E_1) \\ 0 & -10 & 2 & -15 & a+3 & \quad (E_3') := (E_3) + 3(E_1) \\ 0 & 20 & -1 & 24 & -11 & \quad (E_4') := (E_4) - 7(E_1) \end{array}$$

On choisit le troisième élément de la deuxième ligne comme pivot.

$$\begin{array}{cccc|c l} \boxed{1} & -3 & 0 & -4 & 1 & \quad (E_1'') := (E_1') \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 3 & \quad (E_2'') := (E_2') \\ 0 & -10 & 0 & -11 & a-3 & \quad (E_3'') := (E_3') - 2(E_2') \\ 0 & 20 & 0 & 22 & -8 & \quad (E_4'') := (E_4') + (E_2') \end{array}$$

On choisit le deuxième élément de la troisième ligne comme pivot.

$$\begin{array}{cccc|c l} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{7}{10} & \frac{19-3a}{10} & \quad (E_1''') := (E_1'') - \frac{3}{10}(E_3'') \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 3 & \quad (E_2''') := (E_2'') \\ 0 & \boxed{-10} & 0 & -11 & a-3 & \quad (E_3''') := (E_3'') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-14 & \quad (E_4''') := (E_4'') + 2(E_3'') \end{array}$$

La dernière ne peut être vraie que si $2a - 14 = 0$. Ainsi, le système n'admet de solutions que pour $a = 7$.

On suppose maintenant $a = 7$. On a donc le système :

$$\begin{array}{cccc|c l} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & \quad (E_1''') \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 3 & \quad (E_2''') \\ 0 & \boxed{-10} & 0 & -11 & 4 & \quad (E_3''') \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x - \frac{7}{10}t = -\frac{1}{5} \\ z - 2t = 3 \\ -10y - 11t = 4 \end{cases}$$

On va maintenant tester $y = 3$. Le système devient

$$\begin{cases} x - \frac{7}{10}t = -\frac{1}{5} \\ z - 2t = 3 \\ 11t = -34 \end{cases}$$

On trouve ainsi une unique solution : $x = -\frac{26}{11}$, $z = -\frac{35}{11}$ et $t = -\frac{34}{11}$.

Exercice 105

Énoncé

Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y-z=2 \\ 2x+5y+4z=3 \\ 3x+7y+4z=1 \end{array}\right. .$$

Correction

On procède au pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|cl} 3 & 2 & -1 & 2 & (E_1) \\ 2 & 5 & 4 & 3 & (E_2) \\ 3 & 7 & 4 & 1 & (E_3) \end{array}$$

On choisit le premier élément de la première ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{3} & 2 & -1 & 2 & (E_1') := (E_1) \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} & \frac{5}{3} & (E_2') := (E_2) - \frac{2}{3}(E_1) \\ 0 & 5 & 5 & -1 & (E_3') := (E_3) - (E_1) \end{array}$$

On choisit le deuxième élément de la troisième ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{3} & 0 & -3 & \frac{12}{5} & (E_1'') := (E_1') - \frac{2}{5}(E_3') \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{5} & (E_2'') := (E_2') - \frac{11}{15}(E_3') \\ 0 & \boxed{5} & 5 & -1 & (E_3'') := (E_3') \end{array}$$

On choisit le troisième élément de la deuxième ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{3} & 0 & 0 & \frac{48}{5} & (E_1''') := (E_1'') + 3(E_2'') \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{12}{5} & (E_2''') := (E_2'') \\ 0 & \boxed{5} & 0 & -13 & (E_3''') := (E_3'') - 5(E_2'') \end{array}$$

Il vient $x = \frac{16}{5}$, $y = -\frac{13}{5}$ et $z = \frac{12}{5}$.

Exercice 106

Énoncé

Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z=4 \\ 3x+y+2z=6 \\ 5x+5y+10z=6 \end{array}\right. .$$

Correction

On procède au pivot de Gauss :

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 10 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}$$

On choisit le premier élément de la première ligne comme pivot.

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -6 \\ 0 & -5 & -10 & -14 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (E_1') := (E_1) \\ (E_2') := (E_2) - 3(E_1) \\ (E_3') := (E_3) - 5(E_1) \end{array}$$

On observe que les deux dernières équations impliquent $-6 = -14$. C'est impossible. Le système n'a donc pas de solution.

On aurait pu remarquer que les deux dernières colonnes étaient proportionnelles et donc que la matrice sous-jacente n'était pas inversible.