Correction des travaux dirigés - Trigonométrie et Nombres Complexes

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 69

Énoncé

En dessinant un cercle trignométrique, justifier géométriquement les formules suivantes pour tout x réel : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$, $\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$, $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi-x)=\sin(x)$, $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$.

Correction

La première formule correspond au théorème de Pythagore. La deuxième et la troisième s'obtiennent en remarquant qu'une rotation d'angle 2π ne change rien aux coordonnées du point. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses explique la quatrième formule ainsi que la cinquième. La sixième et la septième sont immédiates en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Les deux dernières proviennent de la symétrie par rapport au centre du cercle.

Exercice 70

Énoncé

En dessinant un triangle, justifier géométriquement les formules suivantes pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Correction

Les sinus et cosinus sont échangés si l'on considère l'angle opposé dans un triangle rectangle.

Exercice 71

Énoncé

En admettant les formules trigonométriques des deux exercices précédents pour tout x réel, démontrer par le calcul que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.

Correction

On a $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(\pi-(\frac{\pi}{2}-x)) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin(x)$. De même, $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\pi-(\frac{\pi}{2}-x)) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Exercice 72

Énoncé

En admettant les formules trigonométriques des trois exercices précédents pour tout x réel, compléter le tableau suivant où l'on a posé pour $\cos(x) \neq 0$: $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$													
$\tan(x)$																

Correction

En appliquant les formules, on obtient :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 73

Énoncé

Calculer : $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{84\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{33\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right)$.

Correction

On trouve :

1. $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = \cos(6\pi(-\frac{16\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.
2. $\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right) = \sin(\frac{37\pi}{6} - 6\pi) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
3. $\cos\left(\frac{25\pi}{4}\right) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}2$.
4. $\sin\left(-\frac{19\pi}{3}\right) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. $\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})\frac{1}{2}$.
6. $\cos\left(\frac{84\pi}{3}\right) = \cos(28\pi) = \cos(0) = 1$.
7. $\sin\left(-\frac{33\pi}{2}\right) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.
8. $\cos\left(\frac{53\pi}{6}\right) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. $\sin\left(-\frac{22\pi}{4}\right) = -\sin(5\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Exercice 74

Énoncé

Parmi les cinq expressions suivantes, une seule est différente de $-\sin(x)$. Laquelle ?

1. $-\cos(x - \frac{\pi}{2})$.
2. $\cos(\frac{5\pi}{2} + x)$.
3. $\sin(x - \pi)$.
4. $\cos(-x + \frac{\pi}{2})$.
5. $\sin(x + 3\pi)$.

Correction

On vérifie :

1. $-\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x)$. ✓
2. $\cos(\frac{5\pi}{2} + x) = \cos(\frac{5\pi}{2} + x - 2\pi) = \cos(x + \pi - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$. ✓
3. $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$. ✓
4. $\cos(-x + \frac{\pi}{2})$. ◀
5. $\sin(x + 3\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x)$. ✓

Exercice 75

Énoncé

Soient x et y deux réels appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos(x) = \frac{3}{5}$ et $\cos(y) = \frac{1}{3}$. Calculer $\sin(2x - y)$.

Correction

Comme x et y sont dans $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(x)$ et $\sin(y)$ positifs. De fait : $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$ et de même $\sin(y) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\sin(2x - y) &= \sin(2x)\cos(y) - \cos(2x)\sin(y) \\
&= 2\sin(x)\cos(x)\cos(y) - (2\cos^2(x) - 1)\sin(y) \\
&= 2\frac{4}{5}\frac{3}{5}\frac{1}{3} - \left(2\frac{9}{25} - 1\right)\frac{2\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{8}{25} + \frac{14\sqrt{2}}{75} \\
&= \frac{24 + 14\sqrt{2}}{75}.
\end{aligned}$$

Exercice 76

Énoncé

Donner les modules et les arguments de chacun des nombres complexes suivants : $-1+i\sqrt{3}$, $3-3i$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, $(-1+i)^5$, $(\sqrt{3}-i)^4$, $\frac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i}$, $\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)^6$, $\left(\sin(\frac{\pi}{6})+i\cos(\frac{\pi}{6})\right)^6$.

Correction

On a

1. $-1+i\sqrt{3}$. Le module est 2 et l'argument est $\frac{2\pi}{3}$.
2. $3-3i$. Le module est $3\sqrt{2}$ et l'argument est $-\frac{\pi}{4}$.
3. $\frac{1+i}{1-i}=i$. Le module est 1 et l'argument est $\frac{\pi}{2}$.
4. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$. Le module est $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ et l'argument est $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.
5. $-\frac{\sqrt{2}}{1+i}$. Le module est 1 et l'argument est $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.
6. $(-1+i)^5$. Le module est $\sqrt{2}^5=4\sqrt{2}$ et l'argument est $\frac{15\pi}{4}$ modulo 2π donc c'est $-\frac{\pi}{4}$.
7. $(\sqrt{3}-i)^4$. Le module est 16 et l'argument est $\frac{2\pi}{3}$.
8. $\frac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i}$. Le module est $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ et l'argument est $\frac{3\pi}{4}$.
9. $\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)^6=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6=-1$. Le module est 1 et l'argument est π.
10. $\left(\sin(\frac{\pi}{6})+i\cos(\frac{\pi}{6})\right)^6=\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)^6=e^{2i\pi}=1$. Le module est 1 et l'argument est 0.

Exercice 77

Énoncé

Un circuit électrique est soumis à deux tensions : $3\cos(2\pi ft)$ et $4\sin(2\pi ft)$. Montrer que la tension somme, $3\cos(2\pi ft)+4\sin(2\pi ft)$, peut s'écrire

$$r\cos\left(2\pi ft+\varphi\right) \quad \text{avec} \quad r>0 \text{ et } \varphi\in\mathbb{R}\,.$$

Correction

Première méthode

On considère l'équation

$$3\cos(2\pi ft)+4\sin(2\pi ft)=r\cos\left(2\pi ft+\varphi\right) \tag{1}$$

sur les variables $r>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$. On développe le membre de droite dans l'équation (1) en utilisant la formule :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\,,$$

avec $a:=2\pi ft$ et $b:=\varphi$. L'équation (1) devient alors

$$\begin{aligned}3\cos(2\pi ft)+4\sin(2\pi ft)&=r\left\{\cos\left(2\pi ft\right)\cos(\varphi)-\sin\left(2\pi ft\right)\sin(\varphi)\right\}\\&=r\cos\left(\varphi\right)\cos\left(2\pi ft\right)-r\sin(\varphi)\sin\left(2\pi ft\right)\ .\end{aligned}$$

Par identification (les fonctions sinus et cosinus étant linéairement indépendantes), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} r\cos\left(\varphi\right)=3\\ r\sin\left(\varphi\right)=-4\end{array}\right. . \tag{2}$$

On utilise maintenant la formule de Pythagore sur le cercle trigonométrique,

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1\,.$$

On a donc :

$$r^2=\left(r\cos\left(\varphi\right)\right)^2+\left(r\sin\left(\varphi\right)\right)^2=3^2+(-4)^2=25\,.$$

Conséquemment, r doit être égal à 5. Il reste maintenant à trouver φ en utilisant $r=5$ dans (2) :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\varphi\right)=\frac{3}{5}\\ \sin\left(\varphi\right)=-\frac{4}{5}\end{array}\right. . \tag{3}$$

L'angle φ n'est donc pas remarquable. Toutefois, son sinus est négatif et son cosinus est positif. On en déduit donc : $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, modulo 2π.

La fonction sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$. Ainsi, l'on a :

$$\varphi=\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)+2k\pi=-\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+2k\pi$$

avec $k\in\mathbb{Z}$. En prenant $r:=5$ et $\varphi:=-\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$, on a bien

$$3\cos(2\pi ft)+4\sin(2\pi ft)=r\cos\left(2\pi ft+\varphi\right)\ .$$

On pourrait également se servir de la bijectivité de la fonction tangente et obtenir

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + l\pi = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + l\pi$$

avec $l \in \mathbb{Z}$. Puis, comme $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, modulo 2π, on en déduit que l ne peut être que pair. Conséquemment, $r := 5$ et $\varphi := -\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ est une solution de l'équation (1).

Seconde méthode

On peut aussi passer en complexe en utilisant la formule d'Euler :

$$\cos(2\pi ft) = \frac{e^{2i\pi ft} + e^{-2i\pi ft}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(2\pi ft) = \frac{e^{2i\pi ft} - e^{-2i\pi ft}}{2i}$$

Conséquemment,

$$\begin{aligned} 3\cos(2\pi ft) + 4\sin(2\pi ft) &= 3\frac{e^{2i\pi ft} + e^{-2i\pi ft}}{2} + 4\frac{e^{2i\pi ft} - e^{-2i\pi ft}}{2i} \\ &= \frac{(3-4i)\, e^{2i\pi ft} + (3+4i)\, e^{-2i\pi ft}}{2} \\ &= \frac{z + \overline{z}}{2} \end{aligned}$$

avec $z := (3-4i)\, e^{2i\pi ft}$. D'où

$$3\cos(2\pi ft) + 4\sin(2\pi ft) = \mathrm{Re}\left\{(3-4i)\, e^{2i\pi ft}\right\} .$$

On met le complexe $(3-4i)$ sous forme polaire. On calcule d'abord son module

$$r := |3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\,.$$

On cherche maintenant à retrouver l'argument φ du complexe $(3-4i)$. Pour faire ceci, on dispose de deux formules, vues dans le cours :

$$\arg(z) = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|}\right) .$$

D'où $\arg(3-4i) = 2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.
Ou bien, on utilise la formule

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) \quad (\textbf{SI}\, \mathrm{Re}(z) > 0\,!)$$

Et l'on a $\varphi = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.
Dans les deux cas, l'on peut écrire

$$3\cos(2\pi ft) + 4\sin(2\pi ft) = \mathrm{Re}\left\{re^{i\varphi}e^{2i\pi ft}\right\} = r\cos(2\pi ft + \varphi)$$

Exercice 78

Énoncé

Montrer que $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$.

Rappel sur la formule de Newton

Soient a et b deux réels ou complexes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n b^n \quad \text{avec } C_n^p := \frac{n!}{p!(n-p)!}\,.$$

Correction

Méthode directe

Si l'on ne voit pas comment utiliser la formule du binôme de Newton, on peut se rabattre sur les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)\,.$$

On développe et l'on obtient le résultat :

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) =& \cos(3\theta + 2\theta)\\
=& \cos(3\theta)\cos(2\theta) - \sin(3\theta)\sin(2\theta)\\
=& (\cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta))\left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\\
&- (\sin(\theta)\cos(2\theta) + \cos(\theta)\sin(2\theta)) \times 2\sin(\theta)\cos(\theta)\\
=& \left(2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\right)\left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\\
&- 2\sin(\theta)\cos(\theta)\left(2\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos^2(\theta)\right)\\
=& 4\cos^5(\theta) - 2\cos^3(\theta) - 2\cos^3(\theta) + \cos(\theta) - 4\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\
&- 4\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) + 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) - 4\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)\\
=& 4\cos^5(\theta) - 4\cos^3(\theta) + \cos(\theta) - 12\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 4\cos(\theta)\sin^2(\theta)\\
=& 4\cos^5(\theta) - 4\cos^3(\theta) + \cos(\theta) - 12\cos^3(\theta) + 12\cos^5(\theta) + 4\cos(\theta) - 4\cos^3(\theta)\\
=& 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Cette méthode fonctionne et ne nécessite pas de passer en complexe mais elle a le désavantage d'être longue et la probabilité d'erreur est conséquente.

Seconde méthode

On utilise la formule de Moivre :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\,.$$

On prend ici $n = 5$:

$$\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5\,.$$

On développe maintenant le complexe dans le membre de droite en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = &(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 \\ =&C_5^0\cos^5(\theta) + iC_5^1\cos^4(\theta)\sin(\theta) + C_5^2\cos^3(\theta)i^2\sin^2(\theta) \\ &+ C_5^3\cos^2(\theta)i^3\sin^3(\theta) + C_5^4\cos(\theta)i^4\sin^4(\theta) + C_5^5 i^5\sin^5(\theta)\,.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (par identification) :

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(5\theta) = C_5^0\cos^5(\theta) - C_5^2\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + C_5^4\cos(\theta)\sin^4(\theta) \\ \sin(5\theta) = C_5^1\cos^4(\theta)\sin(\theta) - C_5^3\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + C_5^5\sin^5(\theta)\end{array}\right. .$$

On trouve les coeffficients binomiaux en utilisant la cinquième ligne du triangle de Pascal :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Conséquemment, on a :

$$\cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\left(1 - \cos^2(\theta)\right) + 5\cos(\theta)\left(1 - \cos^2(\theta)\right)^2$$

Puis, après simplification, on obtient le résultat demandé.
L'avantage de cette méthode est qu'elle est moins calculatoire. De plus, on obtient également le sinus assez facilement.

Exercice 79

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0\,. \tag{4}$$

Correction

En premier lieu, on calcule le discriminant :

$$\Delta := b^2 - 4ac = (2i - 3)^2 - 4(5 - i) = -15 - 8i\,.$$

On cherche maintenant une racine complexe de $-15 - 8i$. On sait qu'une telle racine existe. Soit $\delta := x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Conséquemment :

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \end{array}\right. .$$

On dispose en fait d'une troisième équation. En effet :

$$|\Delta| = \left|\delta^2\right| = |\delta|^2 = x^2 + y^2\,.$$

On calcule maintenant le module de Δ. Celui-ci vaut $|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$. On a donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{array}\right. .$$

On remarque

$$x = \pm\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-15 + 17}{2}} = \pm 1$$

et de même :

$$y = \pm\sqrt{-\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2}} = \pm\sqrt{\frac{15 + 17}{2}} = \pm 4$$

On choisit les signes tels que $2xy$ soit du signe de -8. Aussi, une racine possible de Δ est

$$\delta := 1 - 4i\,.$$

L'équation initiale (4) a donc deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

et

$$z_2 = \frac{-b - \delta}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i\,.$$

Exercice 80

Énoncé

Sachant que $\sin(\alpha) = \frac{1}{4}$ et $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calculer $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

Correction

Comme $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, on sait que $\cos(\alpha)$ est strictement négatif. Or, $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{16}$.
D'où $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ puis $\tan(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Exercice 81

Énoncé

Montrer que les expressions suivantes, quand elles existent, ont une valeur constante :

1. $A = \dfrac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\cos(x) - \sin(x)} + \dfrac{\cos^3(x) + \sin^3(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$.
2. $B = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))(1 + \tan^2(x))$.

Correction

Correction du 1)

On rappelle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on dispose des égalités

$$x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

et

$$x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

Par conséquent, on a : $A = (\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)) + (\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)) = 2$.

Correction du 2)

On développe : $B = (1 - \sin^2(x))(1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}) = \cos^2(x) \times (1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Exercice 82

Énoncé

Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
2. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$.
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.
4. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
5. $\tan(x)\tan(2x) = 1$.
6. $\sqrt{3}\tan(x) = 2\sin(x)$.
7. $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$.

Correction

Correction du 1)

On a directement $2x - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - x + 2n\pi$ ou $2x - \frac{3\pi}{2} = x - \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} := \left\{\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction du 2)

On se ramène à : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(x + \frac{13\pi}{12}\right)$. D'où l'on a directement $2x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{13\pi}{12} + 2n\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{13\pi}{12} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} := \left\{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction du 3)

On se ramène à $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. D'où l'on a directement $x + \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ou $x + \frac{\pi}{4} = -2x - \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} := \left\{\frac{\pi}{12} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}n \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction du 4)

On se ramène à $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. D'où l'on a directement $2x - \frac{\pi}{2} = \frac{x}{2} + 2n\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{2} = -\frac{x}{2} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} := \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}n \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}n \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction du 5)

On calcule comme suit :

$$\tan(x)\tan(2x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1 - 2\sin^2(x)} = \frac{2\sin^2(x)}{1 - 2\sin^2(x)}.$$

Comme cette quantité doit être égale à 1, on en déduit $\sin^2(x) = \frac{1}{4}$ d'où $\sin(x) = \pm\frac{1}{2}$. Il vient $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{6} + n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction du 6)

Cette équation admet $n\pi$ comme solution pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On suppose maintenant $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Alors, on peut diviser par $\sin(x)$ des deux côtés et il vient $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \{n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Correction du 7)

On pose $t := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$. L'équation devient donc

$$(1-t^2)^3 + 8t^3 = (1+t^2)^3\,,$$

ce qui donne $6t^2 - 8t^3 + 2t^6 = 0$. Une solution évidente est $t = 0$. On suppose maintenant $t \neq 0$ d'où $t^4 - 4t + 3 = 0$. 1 est une solution évidente. On suppose maintenant $t \neq 1$ d'où $t^3 + t^2 + t - 3 = 0$. 1 est encore une solution évidente donc on peut diviser par $t - 1$ car $t \neq 1$. Il vient $t^2 + 2t + 3 = 0$. Or, cette équation n'a pas de solution réelle. On a donc deux possibilités : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ou $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1$. Ceci nous donne $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ou $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \{2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 83

Énoncé

Calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction

On connait $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2 - 1$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. De même, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Puis, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$.

Enfin, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. De même, $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 84

Énoncé

On se donne α et β éléments de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan(\alpha)=\frac{1}{5}$ et $\tan(\beta)=\frac{1}{239}$. Calculer $\gamma=4\alpha-\beta$.

Correction

On commence par calculer $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}=\frac{5}{12}$. On calcule maintenant $\tan(4\alpha)=\frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)}=\frac{120}{119}$. On calcule maintenant $\tan(\gamma)=\frac{\tan(4\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(4\alpha)\tan(\beta)}=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}}=\frac{28561}{28561}=1$. Par conséquent, $\gamma=\frac{\pi}{4}+n\pi$ où $n\in\mathbb{Z}$. Or, comme $\tan(\alpha)<\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$, on a $4\alpha<\frac{2\pi}{3}$ d'où $\gamma<\frac{\pi}{4}+\pi$. De même, $\tan(\alpha)>\tan(\beta)$ donc $\alpha>\beta$ d'où $\gamma\geq 3\alpha\geq 0$. Il s'ensuit $\gamma=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 85

Énoncé

Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, distinct de 1, le nombre $i\frac{1+z}{1-z}$ est réel.

Correction

On a $z = e^{i\theta}$. D'où

$$i\frac{1+z}{1-z} = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\frac{(1+e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{2-2\cos(theta)} = i\frac{2i\sin(\theta)}{2-2\cos(theta)} = -\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 86

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $x^2 = y$, $y^2 = z$ et $z^2 = x$.

Correction

On a directement $x^8 = x$. $x = 0$ est une solution et elle implique $x = y = z = 0$. On suppose dorénavant que $x \neq 0$. Alors : x est une racine septième de l'unité d'où $x = e^{ni\frac{2\pi}{7}}$ avec $n \in [\![0; 6]\!]$. Ainsi, on a huit solutions au système :

1. $x = y = z = 0$.
2. $x = y = z = 1$.
3. $x = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $y = e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $z = e^{i\frac{8\pi}{7}}$.
4. $x = e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $y = e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.
5. $x = e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $y = e^{i\frac{12\pi}{7}}$, $z = e^{i\frac{10\pi}{7}}$.
6. $x = e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $y = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $z = e^{i\frac{4\pi}{7}}$.
7. $x = e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $y = e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $z = e^{i\frac{12\pi}{7}}$.
8. $x = e^{i\frac{12\pi}{7}}$, $y = e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $z = e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

Exercice 87

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2z+1)^4 = (z-1)^4$.

Correction

On remarque que $z = 1$ n'est pas une solution donc on peut diviser par $(z-1)^4$ des deux côtés. Il vient que $\frac{2z+1}{z-1}$ est une racine quatrième de l'unité. On a ainsi quatre solutions :

1. $\frac{2z+1}{z-1} = 1$ d'où $z = -2$.
2. $\frac{2z+1}{z-1} = i$ d'où $z = -\frac{1+3i}{5}$.
3. $\frac{2z+1}{z-1} = -1$ d'où $z = 0$.
4. $\frac{2z+1}{z-1} = -i$ d'où $z = \frac{-1+3i}{5}$.

Exercice 88

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^2$.

Correction

On a $z = x + iy$. L'équation devient donc $x - iy = x^2 - y^2 + 2ixy$. On a ainsi un système de deux équations à deux inconnues : $x = x^2 - y^2$ et $(2x+1)y = 0$. On regarde d'abord le cas où $y = 0$. Alors, on a $x = 1$ ou $x = 0$. Ceci nous donne deux solutions : 0 et 1. On suppose maintenant $y \neq 0$. Alors $x = -\frac{1}{2}$ puis $y^2 = \frac{3}{4}$. Par conséquent, on a quatre solutions à l'équation : 0, 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 89

Énoncé

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S := u+u^2+u^4$. Calculer $S+\overline{S}$ et $S\overline{S}$. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Correction

Par définition, u est une racine septième de l'unité non réelle. Ainsi, $S+\overline{S} = u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = \frac{1-u^7}{1-u} = 0$. Également, on a

$$S+\overline{S} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = 0\,.$$

Calculons maintenant $S\overline{S}$:

$$\begin{aligned} S\overline{S} &= \left(u+u^2+u^4\right)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\right) \\ &= 1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^3}+u+1+\frac{1}{u^2}+u^3+u^2+1 \\ &= 3+(u+\overline{u})+\left(u^2+\overline{u^2}\right)+\underbrace{\left(u^3+\overline{u^3}\right)}_{=u^4+\overline{u^4}}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $S\overline{S} = 3+S+\overline{S} = 3$. Or, $S\overline{S} = \Im(S)^2 = \left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)^2$ d'où $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \pm\sqrt{3}$. On remarque que $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq -\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Puis, le terme central est positif. Il s'ensuit $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sqrt{3}$.

Exercice 90

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $z^2 - 5(1+i)z + 17i = 0$.
2. $z^2 - (2i+1)z + i - 1 = 0$.
3. $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$.
4. $z^2 - 6z + 11 = 0$.
5. $iz^2 - 2iz + i - 2 = 0$.
6. $2z^2 - (3+2i)z + 5 = 0$.
7. $\frac{z^2}{2} - \sqrt{3}z + 2 = 0$.
8. $z^2 + 8(1-i)z - 34i = 0$.
9. $z^2 - (5+2i)z + 5(1+i) = 0$.
10. $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$.
11. $z^4 = -119 + 120i$.
12. $z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0$.

Correction

Correction du 1)

On calcule le discriminant $\Delta := 25(1+i)^2 - 68i = -18i = (3-3i)^2$. D'où $z = \frac{5+5i+3-3i}{2} = 4+i$ ou $z = \frac{5+5i-3+3i}{2} = 1+4i$.

Correction du 2)

On calcule le discriminant $\Delta := (-1-2i)^2 + 4 - 4i = 1 = 1^2$. Ainsi, $z = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i$ ou $z = \frac{1+2i-1}{2} = i$.

Correction du 3)

On calcule le discriminant $\Delta := 4(1+i)^2 - 16i = -8i = (2(-1+i))^2$. Ainsi, $z = \frac{-2-2i-2+2i}{2} = -2$ ou $z = \frac{-2-2i+2-2i}{2} = -2i$.

Correction du 4)

On calcule le discriminant $\Delta := 6^2 - 44 = -8 = (2\sqrt{2}i)^2$. Ainsi, $z = \frac{6+2\sqrt{2}i}{2} = 3+\sqrt{2}i$ ou $z = \frac{6-2\sqrt{2}i}{2} = 3-\sqrt{2}i$.

Correction du 5)

On commence par transformer l'équation en multipliant par $-i$: $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$. On calcule le discriminant $\Delta := (-2)^2 - 4 - 8i = -8i = (2(-1+i))^2$. Ainsi, $z = \frac{2-2+2i}{2} = i$ ou $z = \frac{2+2-2i}{2} = 2-i$.

Correction du 6)

On commence par transformer l'équation en multipliant par $\frac{1}{2}$: $z^2 - (\frac{3}{2}+i)z + \frac{5}{2} = 0$. On calcule le discriminant $\Delta := \left(\frac{3}{2}+i\right)^2 - 10 = \frac{-35+24i}{4} = \left(\frac{1}{2}+3i\right)^2$. Ainsi, $z = \frac{\frac{3}{2}+i+\frac{1}{2}+3i}{2} = 1+2i$ ou $z = \frac{\frac{3}{2}+i-\frac{1}{2}-3i}{2} = \frac{1}{2} - i$.

Correction du 7)

On commence par transformer l'équation en multipliant par 2 : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta := -4 = (2i)^2$. Ainsi, $z = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$ ou $z = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$.

Correction du 8)

On calcule le discriminant $\Delta := (8(1-i))^2 + 136i = 8i = (2+2i)^2$. Ainsi, $z = \frac{-8+8i+2+2i}{2} = -3+5i$ ou $z = \frac{-8+8i-2-2i}{2} = -5+3i$.

Correction du 9)

On calcule le discriminant $\Delta := (-5-2i)^2 - 20 - 20i = 1 = 1^2$. Ainsi, $z = \frac{5+2i+1}{2} = 3+i$ ou $z = \frac{5+2i-1}{2} = 2+i$.

Correction du 10)

On calcule le discriminant $\Delta := (-2)^2 - 4(1-2i) = 8i = (2+2i)^2$. Ainsi, $z = \frac{2+2+2i}{2} = 2+i$ ou $z = \frac{2-2-2i}{2} = -i$.

Correction du 11)

On pose $Z := z^2$. Alors : $Z^2 = -119 + 120i$. On cherche Z sous la forme $Z = X + iY$. On obtient $X^2 - Y^2 = -119$ ainsi que $XY = 60 > 0$. En regardant les modules, il vient $X^2 + Y^2 = \sqrt{119^2 + 120^2} = 169$. Ainsi, $X^2 = 25$ et $Y^2 = 144$. On trouve donc $Z = 5+12i$ ou $Z = -5-12i$. On cherche maintenant une racine à $5+12i$. On cherche z sous la forme $z = x+iy$. On obtient $x^2 - y^2 = 5$ ainsi que $xy = 6 > 0$. En regardant les modules, il vient $x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Ainsi, $x^2 = 9$ et $y^2 = 4$. On en déduit qu'une solution à l'équation est $z = 3+2i$. On obtient toutes les autres en multipliant par les racines quatrièmes de l'unité. D'où $\mathcal{S} = \{3+2i; -2+3i; -3-2i; 2-3i\}$.

Correction du 12)

On pose $Z := z^3$. On a alors $Z^2 - 2\cos(\theta)Z + 1 = 0$ ce qui donne directement $Z = e^{i\theta}$ ou $Z = e^{-i\theta}$. Les six solutions sont donc $e^{i\frac{\theta}{3}}$, $e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\theta}{3}}$, $e^{i\frac{-\theta+2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-\theta+4\pi}{3}}$.