Correction des travaux dirigés - Variables aléatoires discrètes

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 57

Énoncé

Soit l'espace fondamental $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. L'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}$ ainsi définie :

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

On définit les variables aléatoires réelles X et Y comme suit.

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$X(\omega)$	1	3	4	7	2
$Y(\omega)$	3	1	0	-1	4

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire XY.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$.

Remarque 1

Dans cet exercice, on dispose de la description complète des deux variables aléatoires. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on connaît $X(\omega)$ ainsi que $Y(\omega)$. Ceci nous permettrait de déterminer les lois de X et de Y si cela nous était demandé. Également, on peut décrire précisément les variables aléatoires XY et $\sup(X, Y)$ et de fait déterminer leurs lois. Il convient de noter que dans les cas les plus intéressants, on ne dispose ni de la description précise des variables aléatoires ni de l'univers Ω. D'ailleurs, dans les exercices suivants, on ne connaît pas l'univers.

Remarque 2

Dans cet exercice, nous avons un exemple de deux variables aléatoires réelles qui ne sont pas indépendantes. En effet, si X et Y étaient indépendantes, on disposerait de l'égalité $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 3)$. Or, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$ et de même $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$ ainsi que $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$. Comme $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, on sait déjà que l'on ne dispose pas de l'indépendance des deux variables aléatoires.

Correction

Correction du 1)

On commence par calculer $XY(\omega) := X(\omega) \times Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$:

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$X(\omega)$	1	3	4	7	2
$Y(\omega)$	3	1	0	-1	4
$X(\omega) \times Y(\omega)$	3	3	0	-7	8

Ainsi, la variable aléatoire XY prend quatre valeurs : 3, 0, -7 et 8. Pour chacune de ces valeurs, on calcule la probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(XY = 3\right) &= \mathbb{P}\left(\{\omega \ : \ XY(\omega) = 3\}\right) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}\,, \\
\mathbb{P}\left(XY = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\omega_3\right) = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}\,, \\
\mathbb{P}\left(XY = -7\right) &= \mathbb{P}(\omega_4) = \frac{1}{12} \\
\text{et} \quad \mathbb{P}\left(XY = 8\right) &= \mathbb{P}(\omega_5) = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}\,.
\end{aligned}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire XY est donc :

z_i	-7	0	3	8
$\mathbb{P}(XY = z_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$

On peut aussi l'écrire sous la forme d'une distribution, comme ceci :

$$\mathbb{P}_{XY} = \frac{1}{12}\delta_{-7} + \frac{1}{6}\delta_0 + \frac{5}{12}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_8\,.$$

Correction du 2)

On fait maintenant de même avec la variable aléatoire $\sup\left(X\,,\,Y\right)$:

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$X(\omega)$	1	3	4	7	2
$Y(\omega)$	3	1	0	-1	4
$\sup\left(X(\omega), Y(\omega)\right)$	3	3	4	7	4

Ainsi, la variable aléatoire $\sup\left(X\,,\,Y\right)$ prend trois valeurs : 3, 4 et 7. Pour chacune de ces valeurs, on calcule la probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup\left(X\,,\,Y\right) = 3\right] &= \mathbb{P}\left(\omega_1\right) + \mathbb{P}\left(\omega_2\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \\
\mathbb{P}\left[\sup\left(X\,,\,Y\right) = 7\right] &= \mathbb{P}\left(\omega_4\right) = \frac{1}{12} \\
\text{et} \quad \mathbb{P}\left[\sup\left(X\,,\,Y\right) = 4\right] &= \mathbb{P}\left(\omega_3\right) + \mathbb{P}\left(\omega_5\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}\,.
\end{aligned}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$ est donc :

z_i	3	4	7
$\mathbb{P}\left(\sup(X,Y) = z_i\right)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

On peut aussi l'écrire sous la forme d'une distribution, comme ceci :

$$\mathbb{P}_{\sup(X,Y)} = \frac{5}{12}\delta_3 + \frac{1}{2}\delta_4 + \frac{1}{12}\delta_7\,.$$

Exercice 58

Énoncé

Soient deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y définies sur un même espace fondamental. On suppose X et Y indépendantes. Les lois de probabilités des deux variables sont données dans les deux tableaux ci-dessous

x_i	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et

y_i	2	4
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$.

Correction

La variable aléatoire X est toujours inférieure strictement à 4 donc si $Y = 4$ alors $\sup(X, Y) = 4$. Et, si $Y = 2$, $\sup(X, Y) = 2$ si $X = 2$ ou $X = 1$ et $\sup(X, Y) = 3$ si $X = 3$. Ainsi, la variable aléatoire $\sup(X, Y)$ prend trois valeurs différentes : 2, 3 et 4. On en calcule maintenant les probabilités.

— $\mathbb{P}\left[\sup(X, Y) = 2\right] = \mathbb{P}\left[\{Y = 2, X = 1 \,\text{ou}\, X = 2\}\right]$. Comme les variables X et Y sont indépendantes, il vient $\mathbb{P}\left[\sup(X, Y) = 2\right] = \mathbb{P}\left[Y = 2\right] \times \mathbb{P}\left[X = 1 \,\text{ou}\, X = 2\right]$. Puis, comme les évènements $\{X = 1\}$ et $\{X = 2\}$ sont disjoints, on trouve

$$\mathbb{P}\left[\sup(X, Y) = 2\right] = \mathbb{P}(Y = 2) \times \left[\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)\right] = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}\,.$$

— De même, $\mathbb{P}\left[\sup(X, Y) = 3\right] = \mathbb{P}(X = 3) \times \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

— Puis, $\mathbb{P}\left[\sup(X, Y) = 4\right] = \mathbb{P}(Y = 4) = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire $\sup(X, Y)$ est donc :

z_i	2	3	4
$\mathbb{P}(\sup(X, Y) = z_i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$

On peut aussi l'écrire sous la forme d'une distribution, comme ceci :

$$\mathbb{P}_{\sup(X,Y)} = \frac{3}{16}\delta_2 + \frac{1}{16}\delta_3 + \frac{3}{4}\delta_4\,.$$

Remarque

Ici, nous n'avons pas accès à l'univers sous-jacent. Néanmoins, l'hypothèse d'indépendance nous permet de résoudre l'exercice en faisant un arbre.

Exercice 59

Énoncé

Des individus sont soumis à une épreuve composée de trois questions indépendantes. On propose trois réponses possibles à la première question, quatre à la deuxième et cinq à la troisième. À chaque question, une réponse et une seule est correcte. Chaque individu doit choisir une réponse à chaque question.

Si sa réponse à la première question est correcte, il a trois points. À la deuxième question, s'il a juste, il a trois points. La bonne réponse à la troisième question donne quatre points.

Soit X la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation la note obtenue à l'épreuve par un individu qui choisit au hasard les réponses aux questions.

1. Déterminer l'ensemble des réalisations possibles de X.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

On soumet les individus à une deuxième épreuve indépendante de la première avec le même nombre de questions, de réponses par question, de points obtenus en cas de bonne réponse (unique pour chaque question à nouveau).

On décide d'attribuer à un individu la note finale égale au maximum des notes qu'il a obtenues aux deux épreuves. Soit Y cette note finale pour un individu qui répond au hasard aux deux épreuves.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Correction

On appelle X_1 la note obtenue à la première question, X_2 celle obtenue à la seconde et X_3 celle obtenue à la troisième. Les trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes d'après les hypothèses. Par définition, $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Correction du 1) et du 2) simultanément (première méthode)

En faisant un arbre de probabilité, on voit que la variable aléatoire discrète X peut prendre six valeurs : 0, 3, 4, 6, 7 et 10.

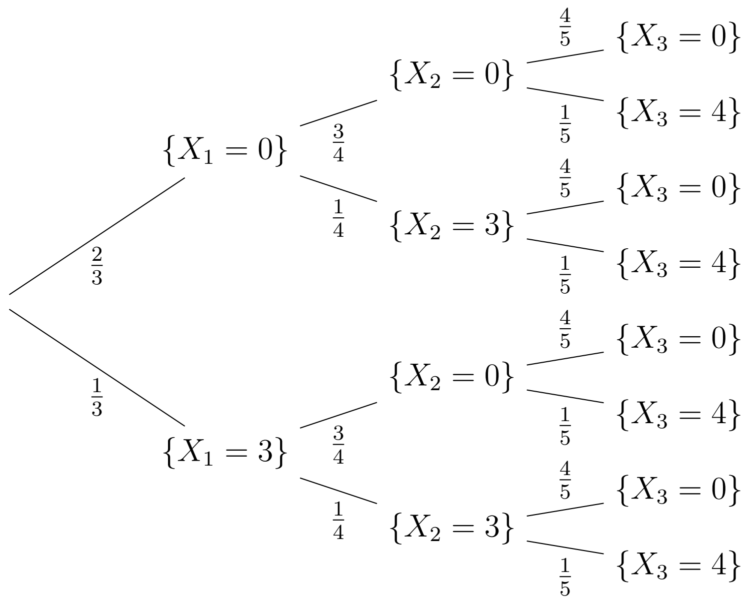
On calcule les probabilités de chacune de ces valeurs :

- $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, X_3=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\times\mathbb{P}(X_2=0)\times\mathbb{P}(X_3=0) = \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{24}{60}$ en utilisant l'indépendance.
- $\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X_1=3, X_2=0, X_3=0) + \mathbb{P}(X_1=0, X_2=3, X_3=0) = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right) + \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{20}{60}$.
- $\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, X_3=4) = \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{5} = \frac{6}{60}$.
- $\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(X_1=3, X_2=3, X_3=0) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{60}$.
- $\mathbb{P}(X=7) = \mathbb{P}(X_1=3, X_2=0, X_3=4) + \mathbb{P}(X_1=0, X_2=3, X_3=4) = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{5} + \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{5}{60}$.
- $\mathbb{P}(X=10) = \mathbb{P}(X_1=3, X_2=3, X_3=4) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{60}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

x_i	0	3	4	6	7	10
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{24}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{1}{60}$

Figure 1 – Arbre de probabilité



On peut aussi l'écrire sous la forme d'une distribution, comme ceci :

$$\mathbb{P}_X = \frac{24}{60}\delta_0 + \frac{20}{60}\delta_3 + \frac{6}{60}\delta_4 + \frac{4}{60}\delta_6 + \frac{5}{60}\delta_7 + \frac{1}{60}\delta_{10}\,.$$

On peut calculer $\mathbb{E}(X) = 2.55$ à partir de cette loi. On peut remarquer : $\mathbb{E}(X_1) = 1$, $\mathbb{E}(X_2) = 0.75$ et $\mathbb{E}(X_3) = 0.8$ et l'on a donc bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)$.

Correction du 1) et du 2) simultanément (seconde méthode)

On remarque $\mathbb{P}_{X_1} = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3$, $\mathbb{P}_{X_2} = \frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_3$ et $\mathbb{P}_{X_3} = \frac{4}{5}\delta_0 + \frac{1}{5}\delta_4$. Comme X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X &= \mathbb{P}_{X_1+X_2+X_3}\\
&= \mathbb{P}_{X_1} * \mathbb{P}_{X_2} * \mathbb{P}_{X_3}\\
&= \left(\frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3\right) * \left(\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_3\right) * \left(\frac{4}{5}\delta_0 + \frac{1}{5}\delta_4\right)\\
&= \left[\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\delta_0 + \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\right)\delta_3 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\delta_6\right] * \left(\frac{4}{5}\delta_0 + \frac{1}{5}\delta_4\right)\\
&= \left(\frac{6}{12}\delta_0 + \frac{5}{12}\delta_3 + \frac{1}{12}\delta_6\right) * \left(\frac{4}{5}\delta_0 + \frac{1}{5}\delta_4\right)\\
&= \frac{6}{12}\times\frac{4}{5}\delta_0 + \frac{5}{12}\times\frac{4}{5}\delta_3 + \frac{1}{12}\times\frac{4}{5}\delta_6\\
&+ \frac{6}{12}\times\frac{1}{5}\delta_4 + \frac{5}{12}\times\frac{1}{5}\delta_7 + \frac{1}{12}\times\frac{1}{5}\delta_{10}\\
&= \frac{24}{60}\delta_0 + \frac{20}{60}\delta_3 + \frac{6}{60}\delta_4 + \frac{4}{60}\delta_6 + \frac{5}{60}\delta_7 + \frac{1}{60}\delta_{10}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 3) (première méthode)

Cela consiste à prendre une variable aléatoire X' de même loi que X et indépendante de X. On cherche donc la loi de la variable aléatoire $Y := \sup(X, X')$ en faisant un arbre de probabilités :

- $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0, X'=0) = \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(X'=0) = (\mathbb{P}(X=0))^2 = \frac{576}{3600}$.
- $\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X=0, X'=3) + \mathbb{P}(X=3, X'=0) + \mathbb{P}(X=3, X'=3) = 2 \times \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(X=3) + (\mathbb{P}(X=3))^2 = \frac{1360}{3600}$.
- $\mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X=0, X'=4) + \mathbb{P}(X=3, X'=4) + \mathbb{P}(X=4, X'=0) + \mathbb{P}(X=4, X'=3) + \mathbb{P}(X=4, X'=4) = 2\times\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(X=4) + 2\times\mathbb{P}(X=3)\times\mathbb{P}(X=4) + (\mathbb{P}(X=4))^2 = \frac{564}{3600}$.
- On procède de même : $\mathbb{P}(Y=6) = 2\times\mathbb{P}(X=6)\times\mathbb{P}(X<6) + (\mathbb{P}(X=6))^2 = 2\times\frac{4}{60}\times\frac{50}{60} + \frac{16}{3600} = \frac{416}{3600}$.
- $\mathbb{P}(Y=7) = 2\times\mathbb{P}(X=7)\times\mathbb{P}(X<7) + (\mathbb{P}(X=7))^2 = 2\times\frac{5}{60}\times\frac{54}{60} + \frac{25}{3600} = \frac{565}{3600}$.
- $\mathbb{P}(Y=10) = 2\times\mathbb{P}(X=10)\times\mathbb{P}(X<10) + (\mathbb{P}(X=10))^2 = 2\times\frac{1}{60}\times\frac{59}{60} + \frac{1}{3600} = \frac{119}{3600}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = \sup(X, X')$ est donc :

x_i	0	3	4	6	7	10
$\mathbb{P}(\sup(X, X') = x_i)$	$\frac{576}{3600}$	$\frac{1360}{3600}$	$\frac{564}{3600}$	$\frac{416}{3600}$	$\frac{565}{3600}$	$\frac{119}{3600}$

On peut aussi l'écrire sous la forme d'une distribution, comme ceci :

$$\mathbb{P}_Y = \frac{576}{3600}\delta_0 + \frac{1360}{3600}\delta_3 + \frac{564}{3600}\delta_4 + \frac{416}{3600}\delta_6 + \frac{565}{3600}\delta_7 + \frac{119}{3600}\delta_{10}\,.$$

À partir de cette loi, on peut montrer que l'espérance est bien augmentée et elle vaut : $\mathbb{E}(Y) = 3.8825$.

Correction du 3) (deuxième méthode)

On peut aussi utiliser la fonction de répartition. En effet, en utilisant les mêmes notations que précédemment, on trouve :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, X' \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)\mathbb{P}(X' \leq t) = F_X(t)^2\,,$$

en utilisant l'indépendance de X avec X' ainsi que le fait qu'elles aient même loi. Ensuite, on remarque que la fonction $t \mapsto F_X(t)$ est constante par morceaux. Il en est donc de même de $T \mapsto F_X(t)^2$.

On trouve ainsi :

- Pour $t < 0$, $F_Y(t) = 0$.
- Pour $t \in [0;3[$, $F_Y(t) = \left(\frac{24}{60}\right)^2 = \frac{576}{3600}$ d'où $\mathbb{P}(Y=0) = F_Y(0) - F_Y(0^-) = \frac{576}{3600}$.
- Pour $t \in [3;4[$, $F_Y(t) = \left(\frac{24}{60} + \frac{20}{60}\right)^2 = \frac{1936}{3600}$ et donc $\mathbb{P}(Y=3) = F_Y(3) - F_Y(0) = \frac{1936}{3600} - \frac{576}{3600} = \frac{1360}{3600}$.
- Pour $t \in [4;6[$, $F_Y(t) = \left(\frac{50}{60}\right)^2 = \frac{2500}{3600}$ et donc $\mathbb{P}(Y=4) = F_Y(4) - F_Y(3) = \frac{2500}{3600} - \frac{1936}{3600} = \frac{564}{3600}$.
- Pour $t \in [6;7[$, $F_Y(t) = \left(\frac{54}{60}\right)^2 = \frac{2916}{3600}$ et donc $\mathbb{P}(Y=6) = F_Y(6) - F_Y(4) = \frac{2916}{3600} - \frac{2500}{3600} = \frac{416}{3600}$.
- Pour $t \in [7;10[$, $F_Y(t) = \left(\frac{59}{60}\right)^2 = \frac{3481}{3600}$ et donc $\mathbb{P}(Y=7) = F_Y(7) - F_Y(6) = \frac{3481}{3600} - \frac{2916}{3600} = \frac{565}{3600}$.
- Pour $t \in [10;+\infty[$, $F_Y(t) = 1$ et donc $\mathbb{P}(Y=10) = F_Y(10) - F_Y(7) = 1 - \frac{3481}{3600} = \frac{119}{3600}$.

Correction du 3) (troisième méthode)

On peut faire une varianteb de la deuxième méthode en utilisant les outils des mathématiques pour le signal ; que vous n'avez pas encore abordées... Donc cette correction est à regarder plus tard dans l'année.

On reprend l'égalité $F_Y(t) = F_X(t)^2$. On dérive cette fonction constante par morceaux et il vient :

$$\mathbb{P}_Y = F_Y' \,.$$

La fonction F_Y est constante par morceaux donc dérivable au sens des distributions et par application de la formule des sauts, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y = &\Big(F_Y(0) - F_Y(0^-)\Big)^2 \delta_0 + \Big(F_Y(3) - F_Y(3^-)\Big)^2 \delta_3 + \Big(F_Y(4) - F_Y(4^-)\Big)^2 \delta_4 \\ &+ \Big(F_Y(6) - F_Y(6^-)\Big)^2 \delta_6 + \Big(F_Y(7) - F_Y(7^-)\Big)^2 \delta_7 + \Big(F_Y(10) - F_Y(10^-)\Big)^2 \delta_{10} \,.\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \{0; 3; 4; 6; 7; 10\}$, on a

$$\begin{aligned}F_Y(k) - F_Y(k^-) &= F_X(k)^2 - F_X(k^-)^2 \\ &= \Big(F_X(k^-) + \mathbb{P}(X = k)\Big)^2 - F_X(k^-)^2 \\ &= 2\mathbb{P}(X = k)F_X(k^-) + \mathbb{P}(X = k)^2 \\ &= 2\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X < k) + \mathbb{P}(X = k)^2 \,.\end{aligned}$$

L'on retrouve bien la formule de la première méthode.

Exercice 60

Énoncé

Soit X une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 avec probabilité 0.75, la valeur 1 avec probabilité 0.2 et la valeur 2 avec probabilité 0.05.
Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend la valeur 0 avec probabilité 0.2, la valeur 1 avec probabilité 0.3 et la valeur 2 avec la probabilité 0.5. On suppose que X et Y sont définies sur un même espace fondamental et sont indépendantes.

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X et de Y.

On considère la variable aléatoire $S := X + Y$.

2. Déterminer la loi de probabilité de S et tracer son diagramme.

3. Déterminer la fonction de répartition de S et tracer son graphe.

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de S.

Correction

Correction du 1)

Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X\right) =& 0 \times \mathbb{P}\left(X = 0\right) + 1 \times \mathbb{P}\left(X = 1\right) + 2 \times \mathbb{P}\left(X = 2\right) \\ =& 0 \times 0.75 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.05 \\ =& 0.3\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) =& 0 \times \mathbb{P}\left(Y = 0\right) + 1 \times \mathbb{P}\left(Y = 1\right) + 2 \times \mathbb{P}\left(Y = 2\right) \\ =& 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.5 \\ =& 1.3\,.\end{aligned}$$

Par définition, $\sigma^2[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. On calcule l'espérance du carré de X dans un premier temps :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) =& 0^2 \times \mathbb{P}\left(X = 0\right) + 1^2 \times \mathbb{P}\left(X = 1\right) + 2^2 \times \mathbb{P}\left(X = 2\right) \\ =& 0^2 \times 0.75 + 1^2 \times 0.2 + 4 \times 0.05 \\ =& 0.4\,.\end{aligned}$$

Il s'ensuit $\sigma^2[X] = 0.4 - (0.3)^2 = 0.31$.
De même, $\sigma^2[Y] = 0.61$.

Correction du 2)

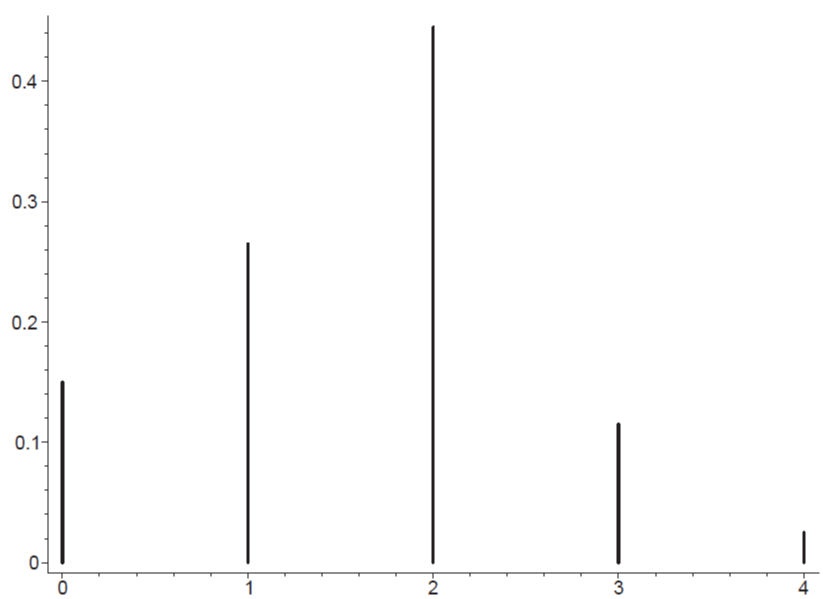
Comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_S =& \mathbb{P}_{X+Y} \\
=& \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y \\
=& (0.75\delta_0 + 0.2\delta_1 + 0.05\delta_2) * (0.2\delta_0 + 0.3\delta_1 + 0.5\delta_2) \\
=& \left(\frac{15}{20}\delta_0 + \frac{4}{20}\delta_1 + \frac{1}{20}\delta_2\right) * \left(\frac{2}{10}\delta_0 + \frac{3}{10}\delta_1 + \frac{5}{10}\delta_2\right) \\
=& \frac{30}{200}\delta_0 + \frac{45}{200}\delta_1 + \frac{75}{200}\delta_2 \\
& \qquad + \frac{8}{200}\delta_1 + \frac{12}{200}\delta_2 + \frac{20}{200}\delta_3 \\
& \qquad\qquad + \frac{2}{200}\delta_2 + \frac{3}{200}\delta_3 + \frac{5}{200}\delta_4 \\
=& \frac{30}{200}\delta_0 + \frac{53}{200}\delta_1 + \frac{89}{200}\delta_2 + \frac{23}{200}\delta_3 + \frac{5}{200}\delta_4 \,.
\end{aligned}$$

Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire S sous forme de tableau :

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(S = x_i)$	0.15	0.265	0.445	0.115	0.025

Et sa représentation graphique :



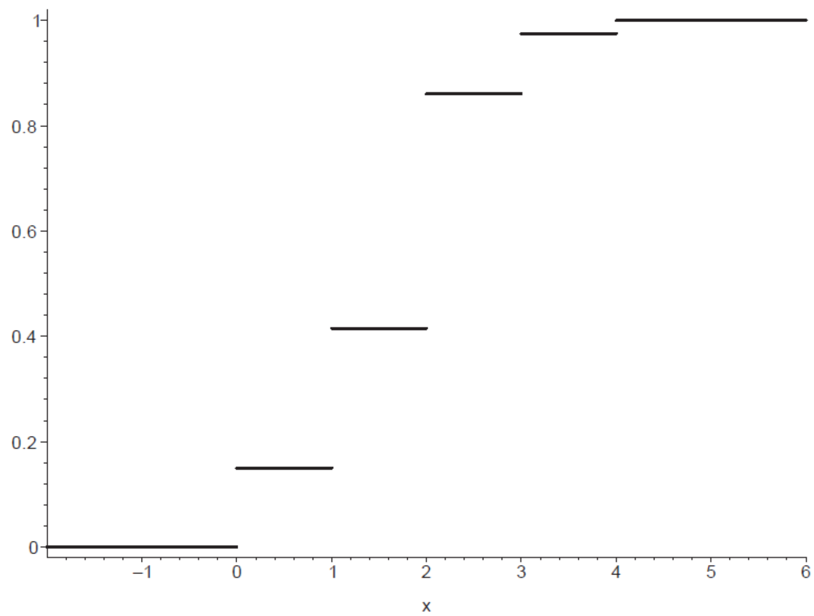
Correction du 3)

On note F_S cette fonction de répartition. Par définition, $F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x)$. Il s'agit donc de la fonction *discontinue* dont la dérivée au sens des distributions est égale à $\frac{30}{200}\delta_0 + \frac{53}{200}\delta_1 + \frac{89}{200}\delta_2 + \frac{23}{200}\delta_3 + \frac{5}{200}\delta_4$.

— Pour $-\infty < x < 0$, $F_S(x) = 0$.

— Pour $0 \leq x < 1$, $F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \frac{30}{200}$.
— Pour $1 \leq x < 2$, $F_S(x) = \frac{30}{200} + \frac{53}{200} = \frac{83}{200}$.
— Pour $2 \leq x < 3$, $F_S(x) = \frac{83}{200} + \frac{89}{200} = \frac{172}{200}$.
— Pour $3 \leq x < 4$, $F_S(x) = \frac{172}{200} + \frac{23}{200} = \frac{195}{200}$.
— Pour $4 \leq x < +\infty$, $F_S(x) = \frac{195}{200} + \frac{5}{200} = 1$.

Voici le graphe de la fonction de répartition :



Correction du 4)

Par définition, $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y] = 0.3+1.3 = 1.6$. On pourrait aussi calculer à partir de la loi de probabilité de S mais ce serait plus long. Et, la variance vaut

$$\mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]\,,$$

par indépendance de X et Y. Conséquemment, on a $\mathrm{Var}[S] = 0.31 + 0.61 = 0.92$.

Exercice 61

Énoncé

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par

$$F_X(x) := \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)\,.$$

Calculer $\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right[\right)$, $\mathbb{P}\left(X \in [0;2[\right)$ et $\mathbb{P}\left(X \in]3;+\infty[\right)$.

Correction 1

On remarque que les discontinuités de F_X sont en 0, 1 et 2. En dérivant la fonction *discontinue* F_X au sens des distributions, on obtient ainsi $\mathbb{P}_X = F_X' = \frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right) = \mathbb{P}_X(0) = \frac{1}{4}\,,\\
&\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\right) = \mathbb{P}_X(0) + \mathbb{P}_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,,\\
&\mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right[\right) = \mathbb{P}_X(1) + \mathbb{P}_X(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,,\\
&\mathbb{P}\left(X \in [0;2[\right) = \mathbb{P}_X(0) + \mathbb{P}_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,,\\
\text{et}\quad &\mathbb{P}\left(X \in]3;+\infty[\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

Correction 2

On peut aussi utiliser les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)\\
&\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)\\
&\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)\\
\text{et}\quad &\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)\,,
\end{aligned}$$

où $a < b$. On obtient alors immédiatement

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right) = F_X\left(\frac{1}{2}^-\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}\,,\\
&\mathbb{P}\left(X \in \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\right) = F_X\left(\frac{3}{2}^-\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}\,,\\
&\mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right[\right) = F_X\left(\frac{5}{2}^-\right) - F_X\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,,\\
&\mathbb{P}\left(X \in [0;2[\right) = F_X\left(2^-\right) - F_X\left(0^-\right) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}\,,\\
\text{et}\quad &\mathbb{P}\left(X \in]3;+\infty[\right) = F_X(+\infty) - F_X\left(3^-\right) = 1 - 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Exercice 62

Énoncé

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_n := \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \text{si } 1 \leq n \leq ab \\ 0 & \text{si } ab < n \end{cases} .$$

1) *Quelle(s) condition(s) doivent satisfaire les entiers a et b pour qu'il existe une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?*

2) *On suppose que a et b sont tels qu'il existe une variable aléatoire X satisfaisant $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ en fonction de a et b.*

3) *Trouver a et b tels que $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2}$.*

Correction

Correction du 1)

Deux conditions doivent être satisfaites : $p_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. La première hypothèse nous donne $a \leq b$. La deuxième donne

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{ab} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \sum_{n=1}^{ab} \frac{b-a}{ab} = b - a \, .$$

Il s'ensuit que $b = a + 1$. On remarque que la première hypothèse n'est pas contredite. On a donc une unique condition : $b = a + 1$. Cette condition permet de respecter les axiomes d'une probabilité. Par conséquent, la condition $b = a + 1$ est nécessaire et suffisante.

Correction du 2)

Par définition :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{ab} n \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{ab} \sum_{n=1}^{ab} n = \frac{1}{ab} \frac{ab(ab+1)}{2} = \frac{a(a+1)+1}{2} \, .$$

Correction du 3)

On doit vérifier $a(a+1) + 1 = 7$. Ceci nous donne $a = 2$ ou $a = -3$. Or, $a > 0$. On en déduit $a = 2$ et $b = 3$.

Exercice 63

Énoncé

Soient $a \in]0;1[$ et $b > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et l'on suppose

$$\mathbb{P}\left(\{X = k\} \cap \{Y = p\}\right) = \frac{b^k e^{-b} a^p (1-a)^{k-p}}{p!(k-p)!},$$

si $k \geq p$ et 0 sinon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de Y.

3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z := X - Y$.

5) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Correction

Correction du 1)

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\{X = k\} \bigcap \Omega\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{X = k\} \bigcap \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{Y = p\}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\{X = k\} \bigcap \{Y = p\}\right)\right) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\{X = k\} \bigcap \{Y = p\}\right) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(X = k, Y = p\right).
\end{aligned}$$

Puis, comme cette probabilité vaut zéro quand $p > k$, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{p=0}^{k} \mathbb{P}\left(X=k, Y=p\right) \\
&= \sum_{p=0}^{k} \frac{b^k e^{-b} a^p (1-a)^{k-p}}{p!(k-p)!} \\
&= \frac{b^k}{k!} e^{-b} \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!(k-p)!} a^p (1-a)^{k-p} \\
&= \frac{b^k}{k!} e^{-b} \underbrace{\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^p (1-a)^{k-p}}_{=(a+(1-a))^k=1} \\
&= \frac{b^k}{k!} e^{-b}\,.
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} e^{-b} \delta_k$.

Remarque

On reconnaît ici la loi de Poisson de paramètre b : $\mathcal{P}(b)$.

Correction du 2)

En procédant de la même manière, on a :

$$\mathbb{P}(Y=p) = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{b^k e^{-b} a^p (1-a)^{k-p}}{p!(k-p)!} = \frac{a^p}{p!} e^{-b} b^p \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} \frac{b^{k-p}(1-a)^{k-p}}{(k-p)!}}_{=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k (1-a)^k}{k!} = e^{b-ab}} = \frac{(ab)^p}{p!} e^{-ab}\,.$$

D'où $\mathbb{P}_Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ab)^p}{p!} e^{-ab} \delta_p$.

Remarque

On reconnaît ici la loi de Poisson de paramètre ab : $\mathcal{P}(ab)$.

Correction du 3)

Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit d'exhiber un contre-exemple. Prenons $k := 1$ et $p := 2$. Alors $p > k$ d'où $\mathbb{P}\left(X=k, Y=p\right) = 0$. Or, $\mathbb{P}(X=1) \times \mathbb{P}(Y=2) = \left(be^{-b}\right) \times \left(\frac{abe^{-ab}}{2}\right) \neq 0$.

Correction du 4)

Comme $X \geq Y$, on en déduit $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Puis, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = j) &= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = p, Z = j) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = p, X = p + j) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^{p+j} e^{-b} a^p (1-a)^j}{p! j!} \\
&= \frac{(b(1-a))^j}{j!} e^{-b} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^p a^p}{p!} \\
&= \frac{(b(1-a))^j}{j!} e^{-(b(1-a))} .
\end{aligned}$$

Correction du 5)

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y = p, Z = j\right) &= \mathbb{P}\left(X = p + j, Y = p\right) \\
&= \frac{b^{p+j} e^{-b} a^p (1-a)^j}{p! j!} \\
&= \frac{(ab)^p}{p!} e^{-ab} \times \frac{(b(1-a))^j}{j!} e^{-(b(1-a))} \\
&= \mathbb{P}(Y = p) \times \mathbb{P}(Z = j) \,,
\end{aligned}$$

pour tout couple $(p, j) \in \mathbb{N}^2$. Donc Y et Z sont indépendantes.

Remarque

On pourrait prouver sans difficulté que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 64 (*)

Énoncé

On se donne une variable aléatoire X, de moment d'ordre 2 fini. On considère la fonction $f(x) := \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(x - X\right)^2\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\mathbb{E}\left[f(X)\right]$.

Remarques

Cet exercice sert à tordre le cou à certaines idées qui semblent intuitives. Il m'est venu en tête après que l'on m'a posé une question durant un exposé en janvier 2012. Cette question, venant d'un expert en probabilités, montrait une erreur de raisonnement lié à cet exercice. Je présente d'abord l'idée intuitive pour résoudre l'exercice (idée fausse). Puis, je présente la vraie correction et enfin, j'explique rigoureusement pourquoi l'idée intuitive reposait sur une erreur.

Correction

Idée intuitive (et fausse)

Par définition, on a

$$f(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(X - X\right)^2\right] = 0\,.$$

Donc, la variable aléatoire $f(X)$ est constante et égale à 0. Son espérance vaut donc 0.

Correction juste

On développe le carré dans l'espérance, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(x^2 + X^2 - 2xX\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X^2]\right)\,.$$

On remplace maintenant x par X :

$$f(X) = \frac{1}{2}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X^2]\right)\,.$$

Puis, on prend l'espérance :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X^2]\right) = \sigma^2[X]\,,$$

la variance de X, laquelle n'est pas forcément nulle.

Explication

L'erreur vient du fait que X n'est pas une constante mais une variable aléatoire, c'est-à-dire une application (mesurable) d'un espace probabilisé sous-jacent $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, f étant une application, $f(X)$ est aussi une variable aléatoire. On n'écrit pas l'aléa de manière générale mais il peut être judicieux ici de le mettre :

$$f(X)(\omega_0) = f(X(\omega_0)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X(\omega_0) - X)^2\right]\,.$$

Lorsque l'on prend l'espérance, on somme sur tous les aléas possibles, les aléas en question n'étant pas ω_0. On peut ainsi écrire

$$f(X)(\omega_0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(X(\omega_0) - X(\omega)\right)^2 d\mathbb{P}(\omega)\,,$$

où la notation intégrale est générale et peut correspondre à une somme discrète si la probabilité $\mathbb{P}$ est une somme de distributions de Dirac. On voit avec cette notation que $X(\omega_0) - X(\omega)$ n'a aucune raison d'être égal à 0 si $\omega \neq \omega_0$ et si X n'est pas une constante.

Une autre façon de le voir est de considérer Y une variable aléatoire réelle de même loi que X et indépendante de X. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(x-Y)^2\right]\,.$$

Puis, on en déduit

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\Big) = \sigma^2[X]\,,$$

car X et Y ont les mêmes moments et sont indépendants.

Pour aller (beaucoup) plus loin

Ce paragraphe illustre une application très avancée de l'exercice. On considère l'équation aux dérivées partielles dite des milieux granulaires :

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}u_t(x) + \left(V(x) + (F * u_t)(x)\right)u_t(x)\right\}\,,$$

où V et F sont deux potentiels, $\sigma > 0$ et $*$ dénote la convolution. Cette équation est utilisée pour modéliser les systèmes d'échanges entre banques, les systèmes neuronaux, pour construire des algorithmes stochastiques... Une interprétation de cette équation est l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sigma dB_t - \left(V'(X_t) + \left(F' * u_t\right)(X_t)\right)dt\,,$$

où l'on impose que u_t est la densité de probabilité de X_t. Ici, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mouvement Brownien (version probabiliste de la chaleur). Cette équation est l'équation de McKean-Vlasov. Or, on a

$$(F' * u_t)(x) = \mathbb{E}\left[F'\left(x - X_t\right)\right]\,,$$

par définition de u_t et de la convolution. Une erreur liée à l'exercice est de croire que l'on a $(F' * u_t)(X_t) = 0$. Dans le cas où $F(x) := \frac{1}{6}x^3$, on retrouve l'exercice.

Exercice 65 (*)

Énoncé

Pour allumer un feu, Mélissandre a donné à Stannis une boîte contenant n allumettes. Celles-ci sont un peu humides et chacune ne fonctionne qu'avec la probabilité $p \in]0;1[$. Soit X le nombre d'allumettes utilisées par Stannis dans sa tentative.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Quelle est son espérance ?

Correction

Correction du 1)

On remarque $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Et, par définition, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = (1-p)^{k-1}p$$

et $\mathbb{P}(X = n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^{n-1}$.

Ainsi : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1}\delta_k + (1-p)^{n-1}\delta_n$.

Remarque

Il s'agit ici d'une loi géométrique tronquée.

Correction du 2)

On calcule l'espérance comme suit :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = p\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1} + n(1-p)^{n-1}\,.$$

On pose $\psi(x) := \sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{x-x^n}{1-x}$. On remarque $\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1} = \psi'(1-p) = \frac{1-n(1-p)^{n-1}+(n-1)(1-p)^n}{p^2}$ d'où

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1-n(1-p)^{n-1}+(n-1)(1-p)^n}{p} + n(1-p)^{n-1} = \frac{1-(1-p)^n}{p}\,.$$

Exercice 66 (*)

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1; n]\!]$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

Correction

Par définition, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} kp_k$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k}$ où $p_k := \mathbb{P}(X = k) \geq 0$. On pose $a_k := \sqrt{kp_k}$ et $b_k := \sqrt{\frac{p_k}{k}}$. On a alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \times \mathbb{E}(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2 = 1^2 = 1\,,$$

ce qui achève la preuve.

Exercice 67 (*)

Énoncé

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose $\mathbb{E}(X) < \infty$.

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$.

2) En déduire que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{E}(X)$.

Correction (1) et 2) simultanément)

On peut procéder à une "intégration par parties". Soit $N \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On a alors

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)\right) .$$

La sommation étant finie, on peut séparer les deux sommes comme suit :

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{l=1}^{N} l\mathbb{P}(X \geq l+1) .$$

Dans la seconde somme, le changement de variables $k := l+1$ donne :

$$\sum_{l=1}^{N} l\mathbb{P}(X \geq l+1) = \sum_{k=2}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geq k) .$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X \geq k) - N\mathbb{P}(X \geq N+1) .\end{aligned}$$

Le terme de gauche converge vers $\mathbb{E}[X]$ quand N tend vers l'infini. Il suffit donc de prouver que $N\mathbb{P}(X \geq N+1)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Pour ceci, on écrit

$$N\mathbb{P}(X \geq N+1) \leq N\mathbb{P}(X \geq N) = N\sum_{k=N}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=N}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) .$$

Puis, comme la série de terme générale $k\mathbb{P}(X = k)$ converge (vers $\mathbb{E}[X]$), on en déduit que la quantité $\sum_{k=N}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, ce qui achève la preuve.

Exercice 68 (*)

Énoncé

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans un ensemble fini $M := [\![1;k]\!]$ et telles que $\mathbb{P}(X_n = i) = p_i$. Soit M^n l'ensemble des suites (messages) de longueur n. Il y en a k^n. On considère l'entropie de la répartition $p := (p_i)_{1 \le i \le k}$,

$$H(p_1, \cdots, p_k) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log(p_i)\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. On définit l'ensemble des messages ϵ-typiques par

$$\mathcal{T}_n^\epsilon := \left\{(i_1, \cdots, i_n) \in M^n \;:\; e^{-n(H+\epsilon)} \le p_{i_1} \cdots p_{i_n} \le e^{-n(H-\epsilon)}\right\}\,.$$

1) *Montrer que l'on a* $\mathbb{E}\left(-\log(p_{X_n})\right) = H$.

2) *En déduire*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log(p_{X_i})) - H\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in (\mathcal{T}_n^\epsilon)^c\right) \le \frac{\mathrm{Var}\left[-\log(p_{X_1})\right]}{n\epsilon^2}\,.$$

3) *Obtenir la limite suivante*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon\right) = 1\,.$$

4) *Montrer que l'on a*

$$\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon\right) \ge e^{-n(H+\epsilon)} \# \mathcal{T}_n^\epsilon\,,$$

et en déduire que $\#\mathcal{T}_n^\epsilon \le e^{n(H+\epsilon)}$.

5) *Réciproque. Supposons que l'on ait pu trouver $\mathcal{C}_n \subset M^n$ tel que*

$$\lim_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n\right) = 1$$

et $\#\mathcal{C}_n \le e^{Kn}$. On va montrer que l'on a $K \ge H$.

(a) Montrer que $\lim_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{T}_n^\epsilon\right) = 1$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{T}_n^\epsilon\right) \le e^{-n(H-\epsilon)} e^{Kn}$. Conclure.

6) *On prend $D = 2$, $M = \{0, 1\}$, $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$. Si $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, vérifier que $H = -\log(2)$ et que le nombre de suites typiques est, dans un sens à préciser, 2^n. (Pas de compression possible.) Cas général : étudier la forme de $H(p) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$ et en déduire le comportement des suites typiques.*

Correction

Correction du 1)

Par définition de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(-\log(p_{X_n})\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(X_n = i\right)\left(-\log(p_i)\right) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log(p_i) = H\,.$$

Correction du 2)

Par définition, $(i_1, \cdots, i_n)$ est un message typique si l'on a

$$n(H+\epsilon) > -\log(p_{i_1}) - \cdots - \log(p_{i_n}) > n(H-\epsilon)\,.$$

En d'autres termes, on a

$$\left| -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log(p_{i_k}) - H \right| < \epsilon\,.$$

Il s'ensuit l'égalité

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (-\log(p_{X_i})) - H \right| > \epsilon \right) = \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in (\mathcal{T}_n^{\epsilon})^c \right)\,.$$

On applique maintenant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev au membre de gauche et l'on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (-\log(p_{X_i})) - H \right| > \epsilon \right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left[-\log(p_{X_1})\right]}{n\epsilon^2}\,.$$

Correction du 3)

En faisant tendre n vers 0, on a la convergence vers 0 de $\frac{\mathrm{Var}\left[-\log(p_{X_1})\right]}{n\epsilon^2}$, ce qui achève la preuve.

Correction du 4)

Par définition, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^{\epsilon} \right) = \sum_{(i_1, \cdots, i_n) \in \mathcal{T}_n^{\epsilon}} \mathbb{P}\left(X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n \right)\,.$$

Soit maintenant $(i_1, \cdots, i_n) \in \mathcal{T}_n^{\epsilon}$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n \right) &= \mathbb{P}\left(X_1 = i_1 \right) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = i_n) \\ &= p_{i_1} \times \cdots \times p_{i_n} \\ &\geq e^{-n(H+\epsilon)}\,.\end{aligned}$$

La preuve de l'inégalité est achevée. On en déduit immédiatement $\#\mathcal{T}_n^{\epsilon} \leq e^{n(H+\epsilon)}$

Correction du 5)(a)

On a prouvé

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^{\epsilon} \right) = 1$$

et l'on a supposé

$$\lim_{n\infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{C}_n \right) = 1\,.$$

Alors, la probabilité de l'intersection tend bien vers 1 quand n tend vers l'infini.

Correction du 5)(b)

Par définition, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon \cap \mathcal{C}_n\right) = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in \mathcal{T}_n^\epsilon \cap \mathcal{C}_n} \mathbb{P}\left(X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\right) .$$

Soit maintenant $(i_1, \cdots, i_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 = i_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = i_n) \\ &= p_{i_1} \times \cdots p_{i_n} \\ &\leq e^{-n(H-\epsilon)} .\end{aligned}$$

Puis, l'on a

$$\#\left(\mathcal{T}_n^\epsilon \cap \mathcal{C}_n\right) \leq \#\mathcal{C}_n \leq e^{Kn} .$$

On obtient donc l'inégalité demandée. Or, le terme de gauche tend vers 1. Quant au terme de droite, il est égal à $\exp\left(n\left(K - H + \epsilon\right)\right)$. On en déduit $K \geq H - \epsilon$. Or, cette inégalité est valable pour tout $\epsilon > 0$ d'où $K \geq H$.

Correction du 6)

Le calcul $H = -\log(2)$ est immédiat. On peut montrer que le nombre de messages typiques est supérieur à $e^{n(H-\epsilon)}$ donc supérieur à $2^n e^{-n\epsilon}$. Ceci est valable pour tout ϵ donc le nombre de messages typiques est exponentiellement équivalent à 2^n.

Dans le cas général, le nombre de messages typiques est exponentiellement équivalent à $e^{nH} << 2^n$. On a donc trouvé un ensemble de messages de faible taille mais de probabilité proche de 1.