Correction des travaux dirigés - Analyse combinatoire et modèle probabiliste

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 43

Énoncé

Une population est décrite suivant le genre, l'état matrimonial et la profession. On distingue quatre catégories d'états matrimoniaux et cent catégories de professions.

1. Combien y a-t-il de catégories combinées ?

2. Généralisation : une population est décrite suivant p caractères qualitatifs. Le $i^{\text{ème}}$ caractère a n_i modalités distinctes pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. Combien y a-t-il de catégories combinées ?

Correction

Correction du 1)

On peut d'abord noter qu'il y a deux types de genre. Ces trois découpages de la population fournissent donc en tout

$$2 \times 4 \times 100 = 800$$

catégories combinées. En effet, on découpe déjà la population en deux catégories suivant le genre. Puis, chacune de ces catégories est subdivisée en quatre sous-catégories ce qui fait donc $2 \times 4 = 8$ sous-catégories une fois que l'on a combiné. Puis, chacune de ces sous-catégories est elle-même subdivisée en cent sous-catégories. Il y a donc en tout $2 \times 4 \times 100 = 800$ catégories combinées.

On peut voir cela comme un arbre dont le tronc est subdivisé en deux grosses branches. Chacune de ces grosses branches se divise ensuite en quatre branches de taille moyenne. Puis, chacune des $2 \times 4 = 8$ *branches se scinde ensuite en* 100 *petites branches. Au total, il y a* 800 *petites branches.*

Correction du 2)

On trouve $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ catégories au total.
En effet, on a n_1 catégories suivant le classement du premier caractère qualitatif. Puis, chacune de ces catégories est subdivisée en n_2 catégories ce qui fait donc $n_1 \times n_2$ catégories au total. Puis, on redécoupe en n_3 puis en n_4 (etc) puis en n_p catégories. Le nombre de catégories est donc bien le produit $n_1 \times \cdots \times n_p$.

Ce résultat se prouve rigoureusement en procédant à une récurrence.

Exercice 44

Énoncé

1. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en deux groupes, de trois et sept individus respectivement ?

2. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en trois groupes, de deux, trois et cinq individus respectivement ?

3. De combien de façons peut-on diviser un groupe de dix individus en quatre groupes, de un, deux, trois et quatre individus respectivement ?

4. De combien de façons peut-on diviser un groupe de n individus en r groupes, de $n_1, \cdots, n_r$ individus respectivement ? (avec $n_1 + \cdots + n_r = n$)

Correction

Correction du 1)

Scinder un groupe de dix individus en deux groupes - l'un de trois et l'autre de sept - revient exactement à prendre trois individus parmi les dix sans tenir compte des permutations. Il s'agit donc d'une combinaison. Le nombre de façons de scinder de la sorte est par conséquent égal à

$$\binom{10}{3} := \frac{10!}{3! \times 7!} = 120\,.$$

Il y a donc 120 façons de décomposer un groupe de dix individus en un groupe de trois et un groupe de sept.

On pourra noter que l'on aurait pu prendre sept individus parmi dix au lieu d'en prendre trois. Le nombre aurait alors été $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\times 3!} = \binom{10}{3} = 120$. *Le nombre est bien le même.*

Correction du 2)

On commence par choisir les individus du groupe de deux (en effet, l'ordre n'a aucune importance comme on vient de le remarquer). On choisit donc deux individus parmi dix sans tenir compte des permutations ce qui donne $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\times 8!} = 45$ possibilités. Il reste maintenant huit individus. Il reste à scinder ce groupe de huit en un groupe de trois et un groupe de cinq.

Ensuite, on choisit les éléments du groupe de trois parmi les huit individus qui sont restés. On a pour cela exactement $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\times 5!} = 56$ possibilités.

En tout, il y a donc $\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = \frac{10!}{2!\times 8!} \times \frac{8!}{3!\times 5!} = \frac{10!}{2!\times 3!\times 5!} = 2\,520$ possibilités.

On peut noter que les facteurs $2!$, $3!$ *et* $5!$ *peuvent être permutés sans que le résultat ne soit changé. Par conséquent, on aurait pu commencer par le groupe de trois ou par le groupe de cinq.*

Correction du 3)

On procède comme précédemment. On choisit l'individu du groupe de un. On a pour cela $\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!\times 9!} = 10$ possibilités. On choisit ensuite les éléments du groupe de deux parmi les $10 - 1 = 9$ éléments restants. On a pour cela $\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\times 7!} = 36$ possibilités. On choisit ensuite les éléments du groupe de trois parmi les $9 - 2 = 7$ éléments restants. On a pour cela $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\times 4!} = 35$ possibilités.

En tout, il y a donc $\binom{10}{1} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{10!}{1!\times 9!} \times \frac{9!}{2!\times 7!} \times \frac{7!}{3!\times 4!} = \frac{10!}{1!\times 2!\times 3!\times 4!} = 12\,600$ possibilités.

On peut noter que les facteurs 1!, 2!, 3! *et* 4! *peuvent être permutés sans que le résultat ne soit changé. Par conséquent, on aurait pu commencer par le groupe de deux, par le groupe de trois ou par le groupe de cinq.*

Correction du 4)

On choisit d'abord les n_1 individus du premier groupe. On a pour cela $\binom{n}{n_1}$ possibilités. Ensuite, on choisit les n_2 individus du second groupe. On a pour cela $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibilités. Ainsi de suite. En tout, on a donc exactement

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{r-2}}{n_{r-1}} \\
&= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \times \cdots \times \frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-2})!}{n_{r-1}!\,(n-n_1-\cdots-n_{r-2}-n_{r-1})!} \\
&= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_{r-1}!\,(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_r!}
\end{aligned}$$

possibilités car $n - n_1 - \cdots - n_{r-1} = n_r$.
On peut noter que les facteurs $n_1!, \cdots, n_r!$ *peuvent être permutés sans que le résultat ne soit changé. Par conséquent, on aurait pu former les groupes dans n'importe quel ordre.*

Ce résultat se prouve rigoureusement en procédant à une récurrence.

Exercice 45

Énoncé

1. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de cinq cartes comprenant quatre cartes de même valeur ?
2. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement un as ?
3. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement deux as ?
4. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement trois as ?
5. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant exactement quatre as ?
6. À partir d'un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on former un paquet de quatre cartes comprenant au moins un as ? (calculer de deux manières différentes et écrire l'égalité qui en résulte)

Correction

Correction du 1)

On choisit déjà la valeur dont on veut un carré. Il y a donc $\binom{8}{1} = 8$ choix possibles. Ensuite, on prend le carré de cette carte (ce qui ne laisse aucun choix) et enfin, on choisit une carte parmi les $32-4 = 28$ qui restent afin de compléter le paquet de cartes. Il y a donc en tout $\binom{8}{1} \times \binom{28}{1} = 8 \times 28 = 224$ façons de former un tel paquet de cartes.

Correction du 2)

On choisit déjà un as parmi les quatre. Il y a $\binom{4}{1} = 4$ choix possibles pour cet as. Ensuite, on choisit 3 cartes parmi les $32 - 4 = 28$ qui restent afin de compléter le paquet. Il y a donc en tout $\binom{4}{1} \times \binom{28}{3} = 13\,104$ façons de former un tel paquet de cartes.

Correction du 3)

On choisit déjà deux as parmi les 4. Il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles pour ces deux as. Ensuite, on choisit 2 cartes parmi les $32 - 4 = 28$ qui restent afin de compléter le paquet. Il y a donc en tout $\binom{4}{2} \times \binom{28}{2} = 2\,268$ façons de former un tel paquet de cartes.

Correction du 4)

On choisit déjà trois as parmi les 4. Il y a donc $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles pour ces 3 as. Ensuite, on choisit $4 - 3 = 1$ carte parmi les $32 - 4 = 28$ qui restent afin de compléter le paquet. Il y a donc en tout $\binom{4}{3} \times \binom{28}{1} = 112$ façons de former un tel paquet de cartes.

Correction du 5)

On choisit déjà quatre as parmi les 4. Il y a donc $\binom{4}{4} = 1$ choix possible pour ces 4 as. Ensuite, on choisit $4 - 4 = 0$ cartes parmi les $32 - 4 = 28$ qui restent afin de compléter le paquet. Il y a donc en tout $\binom{4}{4} \times \binom{28}{0} = 1$ façon de former un tel paquet de cartes.

Correction du 6)

1. Première méthode : on veut un as ou deux as ou trois as ou quatre as ce qui donne $\binom{4}{1} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{2} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{1} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{0} = 13\,104 + 2\,268 + 112 + 1 = 15\,485$ façons de former un tel paquet de cartes.
2. Seconde méthode : on ne veut pas avoir zéro as. C'est donc le nombre total de façons de former un paquet de quatre cartes moins le nombre de façons de former un paquet de quatre cartes ne comportant aucun as. Le nombre total de façons de former un paquet de quatre cartes à partir de trente-deux cartes est égal à $\binom{32}{4}$. Le nombre de façons de former un paquet de quatre cartes ne contenant aucun as parmi trente-deux cartes est égal au nombre de façons de former un paquet de quatre cartes parmi vingt-huit cartes ce qui fait $\binom{28}{4}$ façons. Ainsi, le nombre total de façons de former un paquet de quatre cartes contenant au moins un as parmi trente-deux cartes est égal à

$$\binom{32}{4} - \binom{28}{4} = 35\,960 - 20\,475 = 15\,485\,.$$

On en déduit par ailleurs l'égalité

$$\binom{32}{4} = \binom{4}{0}\binom{28}{4} + \binom{4}{1}\binom{28}{3} + \binom{4}{2}\binom{28}{2} + \binom{4}{3}\binom{28}{1} + \binom{4}{4}\binom{28}{0}\,.$$

Une troisième méthode semblerait pouvoir être utilisée. On pourrait imaginer choisir un as parmi les quatre puis choisir les trois autres cartes du paquet parmi les $32 - 1 = 31$ *cartes qui restent. Cela fournirait* $\binom{4}{1} \times \binom{31}{3} = 17\,980$ *façons. Ce résultat est donc évidemment faux. Pourquoi ? Car avec cette méthode, l'un des as est choisi différemment des autres : il est "marqué".*

On va illustrer cette différence dans un exemple où l'on peut dénombrer à la main. On suppose que l'on a quatre cartes : deux as et deux rois. Les quatre cartes sont donc $\{A1, A2, R1, R2\}$. On pose une question similaire à la précédente : de combien de façons peut-on former un paquet de deux cartes comprenant au moins un as ? Listons toutes les façons de former un tel paquet en suivant la méthode numéro un.

1. Lorsque l'on a exactement un as.
   (a) S'il s'agit d'A1. Les combinaisons sont (A1,R1) et (A1,R2).
   (b) S'il s'agit d'A2. Les combinaisons sont (A2,R1) et (A2,R2).
2. Lorsque l'on a exactement deux as : (A1,A2).

Dénombrons maintenant avec la méthode numéro trois. On doit d'abord choisir un as. On aura ensuite à choisir une carte parmi les trois qui restent.

1. On choisit l'as A1. Les combinaisons sont (A1,R1), (A1,R2) et (A1,A2).
2. On choisit l'as A2. Les combinaisons sont (A2,R1), (A2,R2) et (A2,A1).

Or, les deux combinaisons (A1,A2) et (A2,A1) sont identiques. L'erreur de la méthode numéro trois est donc de compter plusieurs fois certaines combinaisons.

Exercice 46

Énoncé

Soient trois évènements A, B et C associés à une même expérience aléatoire. Exprimer sous écriture ensembliste les évènements suivants et calculer leur probabilité.

1. Seuls A et B sont réalisés.

2. Deux évènements au plus sont réalisés.

3. Au moins un évènement est réalisé.

4. Aucun des trois évènements n'est réalisé.

5. Deux évènements exactement sont réalisés.

6. Seul A est réalisé.

7. Deux évènements au moins sont réalisés.

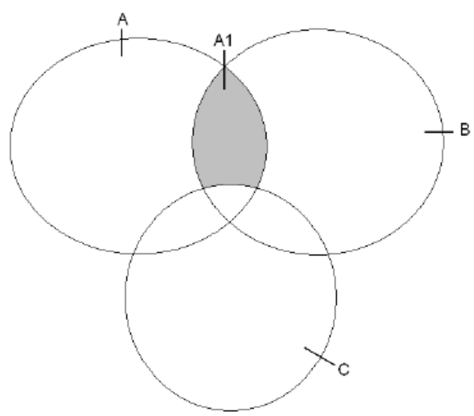
8. Un évènement exactement est réalisé.

9. Les trois évènements sont réalisés.

Correction

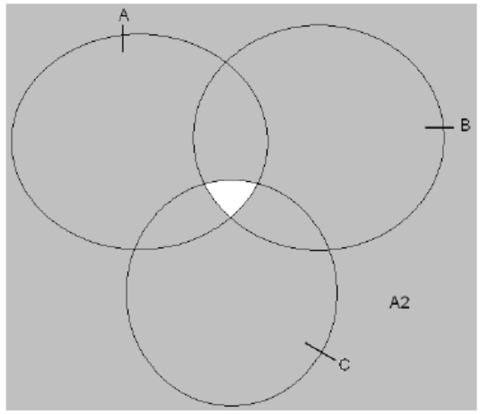
Correction du 1)

A et B sont réalisés et C ne l'est pas. L'évènement demandé est donc $\mathcal{A}_1 = A \cap B \cap \overline{C}$. Sa probabilité est $\mathbb{P}(\mathcal{A}_1) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. En effet, $A \cap B = \mathcal{A}_1 \cup (A \cap B \cap C)$ et $\mathcal{A}_1 \cap (A \cap B \cap C) = \emptyset$



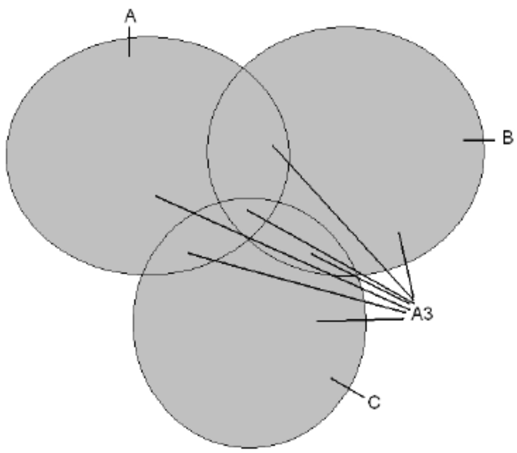
Correction du 2)

Deux évènements au plus sont réalisés donc l'un au moins n'est pas réalisé. Cet évènement est donc $\mathcal{A}_2 = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \overline{A \cap B \cap C}$. Sa probabilité est $\mathbb{P}(\mathcal{A}_2) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.



Correction du 3)

Au moins un évènement est réalisé. Il s'agit donc de l'union des trois évènements A, B et C à savoir $\mathcal{A}_3 = A \cup B \cup C$:

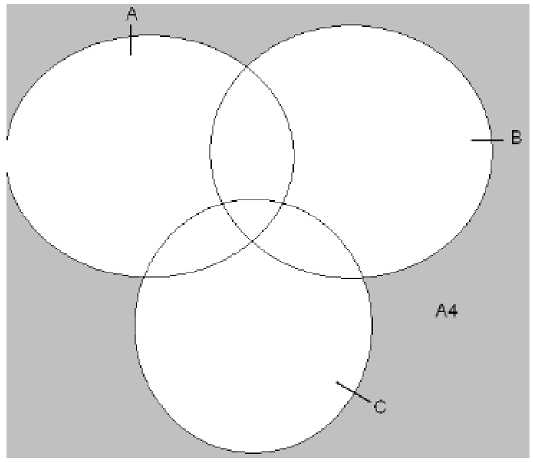


Sa probabilité est

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_3) &= \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}[(A \cup B) \cap C] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&+ \mathbb{P}[(A \cap B) \cap (B \cap C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\ .
\end{aligned}$$

Correction du 4)

Aucun des évènements n'est réalisé. Il s'agit donc de l'intersection des trois évènements $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$ à savoir $\mathcal{A}_4 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C} = \overline{\mathcal{A}_3}$:



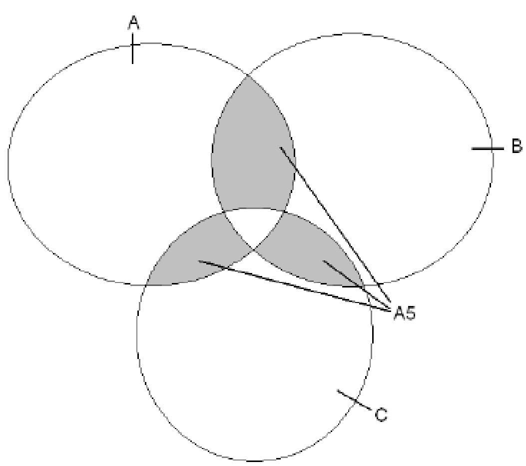
Sa probabilité est

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_4\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_3\right) \\
&= 1-\Big\{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}\left(A\cap B\right)-\mathbb{P}\left(A\cap C\right)-\mathbb{P}\left(B\cap C\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right)\Big\} \\
&= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}\left(A\cap B\right)+\mathbb{P}\left(A\cap C\right)+\mathbb{P}\left(B\cap C\right) \\
&- \mathbb{P}\left(A\cap B\cap C\right) .
\end{aligned}$$

Correction du 5)

Deux évènements sont réalisés. Le troisième ne l'est pas. L'évènement est donc

$$\mathcal{A}_5=\underbrace{\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)}_{\mathcal{B}_1}\cup\underbrace{\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)}_{\mathcal{B}_2}\cup\underbrace{\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)}_{\mathcal{B}_3} .$$



Or, les trois évènements $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont deux à deux disjoints donc

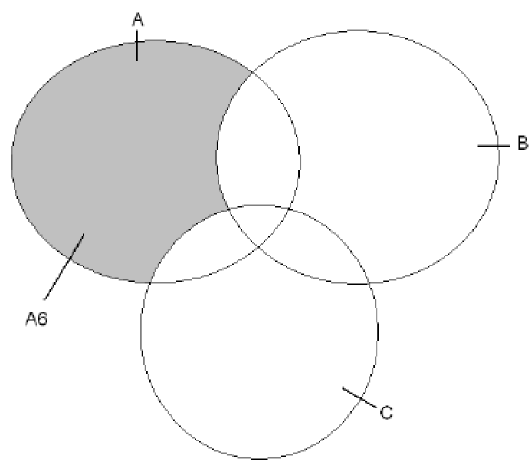
$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_5\right)=\mathbb{P}\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)+\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\cap C\right) .$$

Puis, en appliquant le résultat du 1), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_5) &= \mathbb{P}\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)+\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\\
&= \Big[\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\Big]+\Big[\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\Big]\\
&+ \Big[\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\Big]\\
&= \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-3\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\ .
\end{aligned}$$

Correction du 6)

A est réalisé alors que B et C ne le sont pas. L'évènement est $\mathcal{A}_6 = A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$:



Sa probabilité est

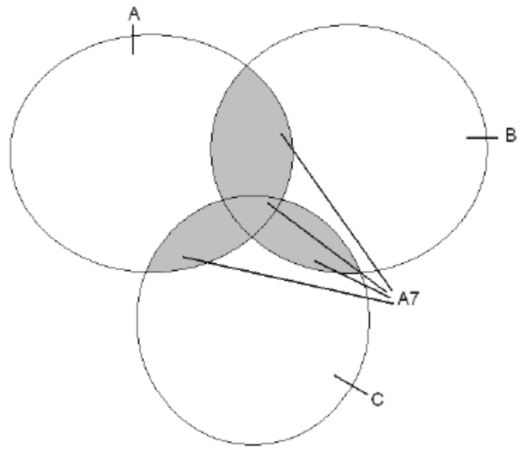
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_6) &= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}\left[A\cap(B\cup C)\right] = \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]\\
&= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]\\
&= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\ .
\end{aligned}$$

Correction du 7)

Pour que deux des trois évènements au moins soient réalisés, soit deux évènements sont réalisés soit les trois évènements le sont. Par conséquent, l'évènement est

$$\mathcal{A}_7 = \left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\cup(A\cap B\cap C) = \mathcal{A}_5\cup(A\cap B\cap C)\ .$$

C'est aussi égal à $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$.



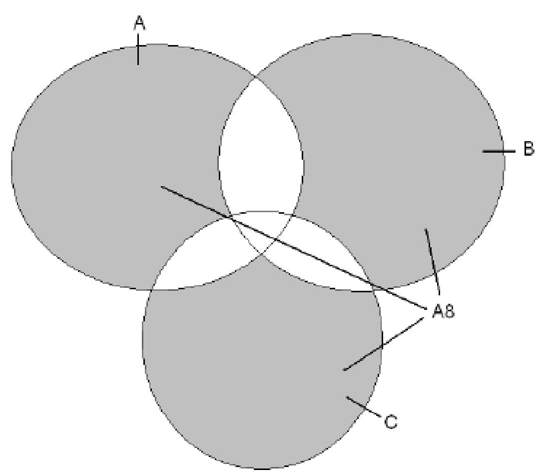
Sa probabilité est $\mathbb{P}(\mathcal{A}_7) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_5) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ car les deux évènements sont disjoints. On trouve donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{A}_7) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 3\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C) .\end{aligned}$$

Correction du 8)

Un seul évènement parmi les trois est réalisé. Par conséquent, l'évènement en question est

$$\mathcal{A}_8 = \underbrace{\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)}_{\mathcal{B}'_1} \cup \underbrace{\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right)}_{\mathcal{B}'_2} \cup \underbrace{\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)}_{\mathcal{B}'_3} :$$



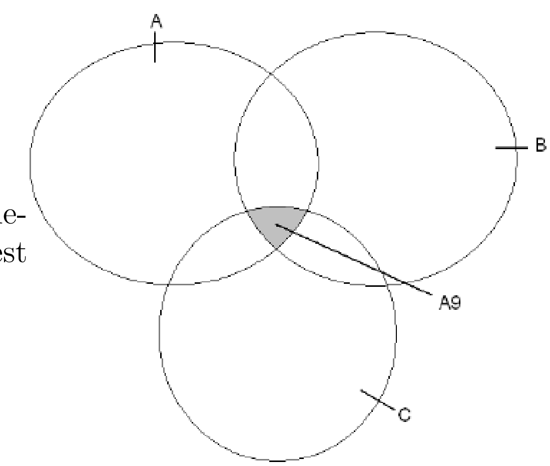
Les trois évènements $\mathcal{B}_1'$, $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$ sont disjoints deux à deux. La probabilité est donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_8\right) =& \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \\
=& \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}\left[A \cap (B \cup C)\right] + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\left[B \cap (A \cup C)\right] \\
& + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}\left[C \cap (A \cup B)\right] \\
=& \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] - \mathbb{P}\left[(A \cap B) \cup (B \cap C)\right] \\
& - \mathbb{P}\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right] \\
=& \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
& - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) - \mathbb{P}\left(A \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) \\
& - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) - \mathbb{P}\left(B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) \\
& - \mathbb{P}\left(A \cap C\right) - \mathbb{P}\left(B \cap C\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) \\
=& \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}\left(A \cap B\right) - 2\mathbb{P}\left(A \cap C\right) - 2\mathbb{P}\left(B \cap C\right) \\
& + 3\mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) .
\end{aligned}$$

On observe $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_7\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_8\right) = \mathbb{P}\left(A \cup B \cup C\right)$. En effet, $\mathcal{A}_8 = (A \cup B \cup C) \cap \overline{\mathcal{A}_7}$.

Correction du 9)

La réalisation des trois évènements est simplement $\mathcal{A}_9 = A \cap B \cap C$ dont la probabilité est $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_9\right) = \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right)$.



Exercice 47

Énoncé

Soient A et B deux évènements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}\,,\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}\,.$$

Calculer

$$\mathbb{P}(A \cup B)\,,\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right),\ \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right).$$

Remarque

On peut observer l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)\,.$$

En effet, la probabilité de l'intersection de deux évènements est égale au produit des probabilités des deux évènements **si et seulement si** les deux évènements sont indépendants. On sait donc d'avance que les deux évènements A et B ne sont pas indépendants dans le cadre de cet exercice.

Rappels

Pour résoudre cet exercice, on va se servir des quatre résultats suivants. Rappelons d'abord le théorème des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\ . \tag{1}$$

On rappelle également l'axiome des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \tag{2}$$

D'après la définition d'une probabilité, on a aussi

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)\,. \tag{3}$$

Enfin, rappelons les lois de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,. \tag{4}$$

Correction

On commence par calculer la probabilité de l'union de A et B. Pour ce faire, on applique le théorème des probabilités totales, voir (1) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{8}\,.
\end{aligned}$$

En utilisant (3), on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) &= 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \\ \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) &= 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

En utilisant les lois de Morgan (voir (4)) et l'égalité (3), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(A \cup B\right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\,, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A \cap B}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(A \cap B\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,, \end{aligned}$$

Enfin, on remarque

$$A = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap B\right)\,.$$

Or,

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(A \cap B\right) = \emptyset\,.$$

Conséquemment, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B\right)\,.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\,.$$

De même, on a

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Exercice 48

Énoncé

Dans une réception, chacun des invités a donné son chapeau au vestiaire. Après que la réception est finie, les chapeaux sont distribués aux invités au hasard.

1. (Cas particulier) *Dans le cas où il y a exactement trois invités, calculer la probabilité p_3 qu'au moins un des trois invités reçoive le chapeau qu'il avait laissé au vestiaire.*

2. (Cas général) *Dans le cas où il y a n invités (avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque), calculer la probabilité p_n qu'au moins un des n invités reçoive le chapeau qu'il avait laissé au vestiaire.*

3. (Cas limite) *Montrer que cette probabilité p_n atteint une limite lorsque n tend vers l'infini.*

Remarques et rappels

La plus grande difficulté dans cet exercice n'est pas liée aux calculs. C'est la modélisation qui pose problème. La détermination des évènements élémentaires permet de résoudre les questions. La seule formule dont on se sert est le théorème des probabilités totales (1), appliqué au cas général. Il s'agit donc de la formule de Poincaré. Écrivons-la d'abord avec trois ensembles :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\
&= \mathbb{P}[A \cup (B \cup C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}[A \cap (B \cup C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)] \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) . \qquad (5)
\end{aligned}$$

De manière générale, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) . \qquad (6)$$

En supposant maintenant que chacun des évènements $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ a la même probabilité, on peut écrire

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \frac{n!}{k!(n-k)!} . \qquad (7)$$

En effet, si les évènements ont même probabilité, on a $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ pour tout $i_1, \cdots, i_k$ comme dans (6). Puis, le nombre de façons de prendre k éléments différents dans un ensemble de taille n est égal à

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Correction

Correction du 1)

Formalisons. D'abord, on numérote chacun des invités de 1 à 3. On numérote également les chapeaux. Ainsi, l'invité numéro 1 a déposé le chapeau numéro 1, l'invité numéro 2 a déposé le chapeau numéro 2, l'invité numéro 3 a déposé le chapeau numéro 3.

On introduit les évènements suivants :

$$\begin{aligned} & A_1 := \{\text{L'invité numéro 1 reçoit le chapeau numéro 1}\} \ , \\ & A_2 := \{\text{L'invité numéro 2 reçoit le chapeau numéro 2}\} \ , \\ \text{et} \quad & A_3 := \{\text{L'invité numéro 3 reçoit le chapeau numéro 3}\} \ . \end{aligned}$$

Enfin, on note E_3 l'évènement dont on cherche la probabilité, à savoir

$$E_3 := \{\text{Au moins l'un des invités reçoit le chapeau qu'il avait déposé au vestiaire}\} \ .$$

Par conséquent, on peut écrire

$$E_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \, .$$

En appliquant (5), on obtient

$$\mathbb{P}\left(E_3\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \, .$$

Calculons maintenant chacune de ces probabilités.

D'abord, on calcule $\mathbb{P}(A_1)$. Comme on est dans un cas discret et comme on a équiprobabilité, on utilise la formule

$$\mathbb{P} = \frac{\#\text{cas favorables}}{\#\text{cas possibles}} \, ,$$

où # est la notation utilisée pour le cardinal d'un ensemble. Le nombre de façons de donner 3 chapeaux à 3 personnes est égal à 3!. Aussi, le nombre de cas possibles est $3! = 6$.

Le nombre de cas favorables est égal à $2! = 2$. En effet, l'invité 1 reçoit le chapeau 1 (aucun choix possible pour lui). Puis, il reste deux chapeaux à distribuer à deux personnes d'où 2! possibilités. On en déduit

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \, .$$

De même, on a $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$.

On calcule maintenant $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)$. Le nombre de cas possibles est encore $3! = 6$. Le nombre de cas favorables est égal à $1! = 1$. En effet, l'invité 1 reçoit le chapeau 1 (aucun choix possible pour lui) et l'invité 2 reçoit le chapeau 2 (aucun choix pour lui non plus). Puis, il reste un chapeau à distribuer à une personne d'où 1! possibilité. On en déduit

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} \, .$$

De même, on a $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$.

On calcule maintenant $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right)$. Le nombre de cas possibles est encore $3! = 6$. Le nombre de cas favorables est égal à $0! = 1$. En effet, l'invité 1 reçoit le chapeau 1 (aucun choix possible pour lui), l'invité 2 reçoit le chapeau 2 (aucun choix pour lui non plus) et l'invité 3 reçoit le chapeau 3 (aucun choix pour lui non plus). Puis, il reste zéro chapeau à distribuer à zéro personne d'où 0! possibilité. On en déduit

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} \, .$$

Conséquemment, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \, . \end{aligned}$$

On en déduit donc
$$p_3 = \frac{2}{3}\,.$$

Correction du 2)

La deuxième question se traite de la même manière. D'abord, on numérote chacun des invités de 1 à n. On numérote également les chapeaux. Ainsi, l'invité numéro k a déposé le chapeau numéro k pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
On introduit les n évènements

$$A_k := \{\text{L'invité numéro } k \text{ reçoit le chapeau numéro } k\}\ ,$$

pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. Enfin, on note E_n l'évènement dont on cherche la probabilité, à savoir

$$E_n := \{\text{Au moins l'un des invités reçoit le chapeau qu'il avait déposé au vestiaire}\}\ .$$

Par conséquent, on peut écrire
$$E_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n\,.$$
Calculons maintenant chacune de ces probabilités. D'abord, on calcule $\mathbb{P}(A_1)$. Le nombre de façons de donner n chapeaux à n personnes est égal à $n!$. Aussi, le nombre de cas possibles est $n!$.
Le nombre de cas favorables est ici égal à $(n-1)!$. En effet, l'invité 1 reçoit le chapeau 1 (aucun choix possible pour lui). Puis, il reste $(n-1)$ chapeaux à distribuer à (n-1) personnes d'où $(n-1)!$ possibilités. On en déduit
$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!}\,.$$
De même, on a $\mathbb{P}(A_2) = \cdots = \mathbb{P}(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!}$.
On calcule maintenant $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)$. Le nombre de cas possibles est encore $n!$. Le nombre de cas favorables est égal à $(n-2)!$. En effet, l'invité 1 reçoit le chapeau 1 (aucun choix possible pour lui) et l'invité 2 reçoit le chapeau 2 (aucun choix pour lui non plus). Puis, il reste $(n-2)$ chapeaux à distribuer à $(n-2)$ personnes d'où $(n-2)!$ possibilités. On en déduit

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!}\,.$$

De même, on a $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$.
De manière générale, calculons $\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_k\right)$ avec $k \in [\![1; n]\!]$. Le nombre de cas possibles est encore $n!$. Le nombre de cas favorables est égal à $(n-k)!$. En effet, les invités 1 à k reçoivent respectivement les chapeaux 1 à k. Puis, il reste $(n-k)$ chapeaux à distribuer à $(n-k)$ personnes d'où $(n-k)!$ possibilités. On en déduit

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_k\right) = \frac{(n-k)!}{n!}\,.$$

De même, on a $\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$ pour tout $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Comme les probabilités sont toutes égales, on peut appliquer (7) et l'on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \,.$$

Correction du 3)

On peut montrer la convergence de la série en appliquant le Théorème de D'Alembert ou le critère spécial des séries alternées. On reprend le résultat précédent et l'on fait tendre n vers l'infini :

$$\begin{aligned}
p_\infty &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} - 1 \right) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!} = 1 - e^{-1} \approx 0.632 \,.
\end{aligned}$$

Exercice 49

Énoncé

On considère une urne contenant $b > 0$ billes bleues et $n > 0$ billes noires. On tire au hasard une bille de cette urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne. Si elle est noire, on ne la remet pas mais on rajoute a billes bleues prises dans une réserve auxiliaire.

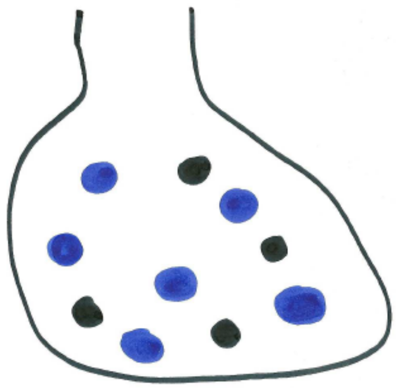
Dans les deux cas, on tire une seconde bille de l'urne.

Quelle est la probabilité pour que cette seconde bille soit bleue ?

Remarques et rappels

Un dessin ou un schéma ne saurait se substituer au raisonnement (il y a toujours un biais, qu'on en soit conscient ou pas, dans la façon de faire le dit dessin) mais il peut aider à comprendre ce qu'il se passe. Illustrons donc l'exercice avec $b = 6$, $n = 4$ et $a = 2$.

FIGURE 1 – Urne à l'état initial



La probabilité de tirer une bille bleue est donc $\frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}$. Et, la probabilité de tirer une bille noire est $\frac{2}{5}$. On présente maintenant l'urne avant le second tirage selon que l'on ait pris une bille bleue ou une bille noire.

FIGURE 2 – Urne avant le second tirage

Si l'on a tiré une bille bleue la première fois, la probabilité que la seconde bille soit bleue est $\frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}$. Au contraire, si la première bille tirée est noire, la probabilité que la seconde bille soit bleue est égale à $\frac{8}{8+3} = \frac{8}{11}$. Ainsi, la probabilité que la seconde bille soit bleue vaut

$$\frac{3}{5}\frac{3}{5} + \frac{8}{11}\frac{2}{5} = \frac{9}{25} + \frac{16}{55} = \frac{b^2}{(b+n)^2} + \frac{b+a}{b+n+a-1}\frac{n}{b+n}.$$

Pour fournir une réponse rigoureuse à l'exercice, on va utiliser les probabilités conditionnelles. Procédons à quelques rappels. Soient deux évènements A et B. On suppose que A est de probabilité non nulle. Alors, on définit la probabilité de B en sachant A comme suit :

$$\mathbb{P}\left(B \mid A\right) := \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}(A)} .$$

Correction

On introduit les évènements suivants

$$\begin{aligned} & B_2 := \{\text{la seconde bille tirée est bleue}\} , \\ \text{et} \quad & B_1 := \{\text{la première bille tirée est bleue}\} . \end{aligned}$$

On remarque que B_1 et B_1^c réalisent une partition de l'espace fondamental. On peut alors écrire

$$\mathbb{P}\left(B_2\right) = \mathbb{P}\left(B_2 \cap B_1\right) + \mathbb{P}\left(B_2 \cap B_1^c\right) .$$

Puis, on sait que les évènements B_1 et B_1^c sont de probabilités non nulles. En effet, avant le premier tirage, il y a b billes bleues dans l'urne et n billes noires donc la probabilité de B_1 est $\frac{b}{b+n} > 0$ tandis que celle de B_1^c est $\frac{n}{b+n} > 0$. On peut alors regarder les probabilités conditionnelles par rapport aux évènements B_1 et B_1^c :

$$\mathbb{P}\left(B_2\right) = \mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1\right) \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1^c\right) \mathbb{P}(B_1^c) .$$

Calculons maintenant $\mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1\right)$ et $\mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1^c\right)$. Pour cela, on regarde l'état de l'urne avant le second tirage dans le cas où la première bille tirée est bleue (et de même lorsque la première bille tirée est noire).
Si la première bille tirée est bleue, il y a b billes bleues et n billes noires d'où $\mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1\right) = \frac{b}{b+n}$.
Au contraire, si la première bille tirée est noire, il y a $b + a$ billes bleues et $n - 1$ billes noires d'où $\mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1^c\right) = \frac{b+a}{b+n+a-1}$. On a finalement

$$\mathbb{P}\left(B_2\right) = \frac{b}{b+n} \times \frac{b}{b+n} + \frac{b+a}{b+n+a-1} \times \frac{n}{b+n} .$$

Exercice 50

Énoncé

Un test de dépistage d'une maladie est mis au point par un laboratoire pharmaceutique. Ce laboratoire cherche à déterminer l'efficacité du test.
Après des mesures empiriques, la probabilité que le test soit positif pour une personne que l'on sait malade est évaluée à p_+.
Après des mesures empiriques, la probabilité que le test soit négatif pour une personne que l'on sait bien portante (non malade) est évaluée à p_-.
La probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit malade est égale à p_M (par signalement dès que quelqu'un contracte cette maladie).
1. *Calculer la probabilité qu'un patient soit malade en sachant que son test est négatif avec* $p_M := 0.01$, $p_+ := 0.98$ *et* $p_- := 0.98$.
2. *Calculer la probabilité qu'un patient soit sain en sachant que son test est positif avec* $p_M := 0.01$, $p_+ := 0.98$ *et* $p_- := 0.98$.
3. *Cette dernière probabilité étant trop élevée, on décide d'effectuer deux tests indépendants au lieu d'un seul. Calculer la probabilité qu'une personne soit bien portante sachant que les deux tests sont positifs.*

Correction

Correction du 1)

On appelle T_+ l'évènement “le test est positif”. On appelle M l'évènement “la personne est malade”. On souhaite ici calculer $\mathbb{P}\left(M \mid T_+^c\right)$. On applique le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}\left(M \mid T_+^c\right) = \frac{\mathbb{P}\left(T_+^c \mid M\right)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}\left(T_+^c \mid M\right)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T_+^c \mid M^c\right)\mathbb{P}(M^c)}\,.$$

Or, d'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(M) = p_M = 0.01$, $\mathbb{P}\left(T_+ \mid M\right) = 0.98$ et $\mathbb{P}\left(T_+^c \mid M^c\right) = 0.98$. On a donc

$$\mathbb{P}(M^c) = 1 - \mathbb{P}(M) = 0.99 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(T_+^c \mid M\right) = 1 - \mathbb{P}\left(T_+ \mid M\right) = 0.02\,.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}\left(M \mid T_+^c\right) = \frac{0.02 \times 0.01}{0.02 \times 0.01 + 0.98 \times 0.99} = \frac{2}{99 \times 98 + 2} = \frac{2}{9\ 704} \approx 0.02\%\,.$$

Correction du 2)

On applique le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}\left(M^c \mid T_+\right) = \frac{\mathbb{P}\left(T_+ \mid M^c\right)\mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}\left(T_+ \mid M^c\right)\mathbb{P}(M^c) + \mathbb{P}\left(T_+ \mid M\right)\mathbb{P}(M)}\,.$$

Or, d'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(M) = p_M = 0.01$, $\mathbb{P}\left(T_+ \mid M\right) = 0.98$ et $\mathbb{P}\left(T_+^c \mid M^c\right) = 0.98$. On a donc

$$\mathbb{P}(M^c) = 0.99 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(T_+ \mid M^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(T_+^c \mid M^c\right) = 0.02\,.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}\left(M^c \mid T_+\right) = \frac{0.02 \times 0.99}{0.02 \times 0.99 + 0.98 \times 0.01} = \frac{198}{296} \approx 66\%\,.$$

Correction du 3)

On appelle T_{++} l'évènement "deux tests faits indépendamments sont positifs". On applique le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}\left(M^c \mid T_{++}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(T_{++} \mid M^c\right) \mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}\left(T_{++} \mid M^c\right) \mathbb{P}(M^c) + \mathbb{P}\left(T_{++} \mid M\right) \mathbb{P}(M)} \,.$$

Calculons maintenant $\mathbb{P}\left(T_{++} \mid M^c\right)$ et $\mathbb{P}\left(T_{++} \mid M\right)$. Comme les deux tests sont faits de manière indépendante, on a

$$\mathbb{P}\left(T_{++} \mid M^c\right) = \left[\mathbb{P}\left(T_{+} \mid M^c\right)\right]^2 = 0.000\ 4\,,$$

ainsi que

$$\mathbb{P}\left(T_{++} \mid M\right) = \left[\mathbb{P}\left(T_{+} \mid M\right)\right]^2 = 0.960\ 4\,.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}\left(M^c \mid T_{++}\right) = \frac{0.000\ 4 \times 0.99}{0.000\ 4 \times 0.99 + 0.960\ 4 \times 0.01} = 3.96\%\,.$$

Remarques

On aurait pu s'attendre à ce que le résultat soit 0.66^2 (auquel cas le test serait toujours peu satisfaisant) mais comme on obtient 4%, on se rend compte que deux tests indépendants sont suffisants.

Également, il convient de souligner que les résultats des deux tests ne *sont pas* indépendants. En effet, si la personne effectue 1000 tests et que les 999 premiers sont positifs, sa probabilité d'être malade est plus élevée que p_M et donc la probabilité que le millième test soit positif est plus élevée aussi.

Exercice 51

Énoncé

Un évènement aléatoire T se produit avec probabilité $\frac{4}{5}$. Deux individus louches (Negan et Ramsay) sont témoins de cet évènement. Negan dit la vérité avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ramsay dit la vérité avec probabilité $\frac{1}{5}$. Calculer la probabilité p que T se soit produit sachant que Negan et Ramsay disent tous deux que T s'est produit.

Correction

Il s'agit d'une simple application du théorème de Bayes. On pose

$$E := \{\text{Negan et Ramsay disent que T s'est produit}\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E|T) &= \frac{\mathbb{P}\left(E \bigcap T\right)}{\mathbb{P}(T)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{T s'est produit et Negan et Ramsay confirment donc ils disent la vérité})}{\mathbb{P}(T)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E|T^c) &= \frac{\mathbb{P}\left(E \bigcap T^c\right)}{\mathbb{P}(T^c)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{T ne s'est pas produit et Negan et Ramsay disent que si donc ils mentent})}{\mathbb{P}(T^c)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \\
&= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(T|E) = \frac{\mathbb{P}(E|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(E|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(E|T^c)\mathbb{P}(T^c)} = \frac{\frac{1}{10}\frac{4}{5}}{\frac{1}{10}\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\left(1 - \frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 52

Énoncé

Trois prisonniers, Pim, Pam et Poum, dont les situations sont comparables, ont demandé une grâce au roi. Ils apprennent que deux d'entre eux, sans savoir lesquels, ont vu leur demande rejetée et seront condamnés à mort. Pim, voulant connaître sans délai le sort qu'on lui réserve, va voir un fonctionnaire qui est au courant de la décision concernant chacun des prisonniers. Malheureusement, le fonctionnaire n'est pas autorisé à informer les prisonniers de la décision les concernant. Pim, qui désire avoir malgré tout plus d'information et qui promet de garder le silence sur le sort réservé aux autres, demande au fonctionnaire de lui révéler simplement le nom d'un prisonnier parmi les deux autres dont la demande a été rejetée. Dans ces circonstances, le fonctionnaire se sent autorisé à lui révéler que la demande de Pam a été rejetée.

Est-ce que Pim devrait avoir plus d'espoir concernant l'acceptation de sa demande après cette révélation ?

Remarque

Cet exercice correspond au paradoxe du prisonnier. Ce dernier repose sur le même principe que celui de Monty Hall, présenté en Cours Magistral. Il faut bien comprendre que le fonctionnaire ne choisit pas l'un des prisonniers non libérés parmi les deux puisque même si Pim n'est pas libéré, le fonctionnaire n'a pas le droit de le lui dire.

Correction

On appelle A l'évènement {Pim est libéré}, B l'évènement {Pam est libéré} et C le troisième, à savoir {Poum est libéré}. Initialement, Pim n'a aucune information autre que la suivante : **dont les situations sont comparables**. En d'autres termes, les évènements A, B et C ont même probabilité, à savoir $\frac{1}{3}$. Il vient donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}.}$$

Puis, en utilisant la ruse, le fonctionnaire lui révèle que Pam n'est pas libéré. On appelle I l'évènement {le fonctionnaire révèle que Pam n'est pas libéré}. On est maintenant amené à calculer $\mathbb{P}(A \mid I)$. On utilise pour cela le théorème de Bayes (on peut car (A, B, C) est un système complet d'évènements) :

$$\mathbb{P}(A|I) = \frac{\mathbb{P}(I|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(I|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(I|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(I|C)\mathbb{P}(C)}.$$

Or, $B \cap I = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(I|B) = 0$.
Si A est vrai, ni Pam ni Poum ne sont libérés donc le fonctionnaire avait une chance sur deux de dire "Pam n'est pas libéré". En d'autres termes : $\mathbb{P}(I|A) = \frac{1}{2}$.
Si C est vrai, Poum est libéré auquel cas le fonctionnaire n'avait pas le choix et devait dire "Pam est libéré". Il s'ensuit $\mathbb{P}(I|C) = 1$.

On en déduit donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A|I) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.}$$

Par conséquent, Pim n'a pas plus de chance d'être libéré tandis que Poum a deux fois plus de chances d'être libéré qu'avant la révélation du fonctionnaire.

Exercice 53 (*)

Énoncé

De combien de façons une assemblée de soixante personnes peut-elle élire un bureau comprenant un président, un vice-président et un secrétaire ?

Correction

Il est important de noter qu'on ne demande pas le nombre de façons d'élire un triumvirat (où chacun des trois a le même poids par définition [1]). Ces personnes sont rangées, "marquées". On utilise alors le nombre d'arrangements de trois personnes parmi soixante. Ce nombre est $58 \times 59 \times 60 = 205\,320$.

On peut également utiliser les combinaisons. D'abord, on doit choisir un président parmi 60. Il y a donc 60 possibilités. Il reste 59 individus pour chacune des 60 possibilités. Puis, on choisit un vice-président parmi 59. Il y a donc 59 sous-possibilités pour chaque possibilité. Cela fait donc 60×59 sous-possibilités. Et, pour chacune de ces 60×59 possibilités, on a 58 sous-sous-possibilités. Au total, il y a donc $60 \times 59 \times 58 = 205\,320$ façons d'élire un tel bureau.

1. dans la pratique, deux des trois s'associent et le troisième perd tout pouvoir de décision

Exercice 54 (*)

Énoncé

1. Soit une classe de soixante élèves, dont douze internes. De combien de façons peut-on former le comité de cette classe, qui comprend six élèves, le président devant être un interne ?

2. Soit une classe de soixante élèves, dont douze internes et seize filles, toutes externes. De combien de façons peut-on former le comité de cette classe, qui comprend quatre garçons et deux filles, le président devant être un interne ?

Correction

Correction du 1)

On commence par choisir le président qui est un interne. On choisit donc un interne parmi douze. Le nombre de choix est $\binom{12}{1} = 12$. Puis, l'on choisit cinq autres élèves parmi ceux qui restent c'est-à-dire les cinquante-neuf autres élèves. Il y a alors $\binom{59}{5}$ possibilités. Au total, on trouve donc $\binom{12}{1} \times \binom{59}{5} = 60\,076\,632$ façons de former ce comité.

Correction du 2)

On note d'abord que le groupe des internes et le groupe des filles sont disjoints. Pour commencer, on choisit un interne parmi les douze et cet interne est forcément un garçon. Puis l'on choisit deux filles parmi les seize et enfin on choisit les trois autres garçons (le président interne étant déjà un garçon) parmi les garçons qui restent, à savoir $(60 - 16) - 1 = 43$. Il y a donc en tout $\binom{12}{1} \times \binom{16}{2} \times \binom{43}{3} = 17\,771\,040$ façons de former ce comité.

Remarque : *On aurait pu choisir les deux filles avant de choisir l'interne. Le résultat aurait été* $\binom{16}{2} \times \binom{12}{1} \times \binom{43}{3} = 17\,771\,040$ *à savoir le même.*

Exercice 55 (*)

Énoncé

Une entreprise fabrique des pièces métalliques dont une proportion R est hors des tolérances imposées par l'acheteur.
Lors de la réception d'un lot de pièces, l'acheteur en prélève trente parmi celles qui lui sont livrées. L'acheteur teste ensuite ces trente pièces. Si le nombre de pièces défectueuses parmi les trente est strictement supérieur à un entier k prédéfini, le lot de pièces est refusé.

1. *Quelle est la probabilité de refuser le lot si l'on fixe $R := 5\%$ et $k := 3$?*

2. *Avec $R := 10\%$, à combien doit-on fixer k pour que la probabilité de refuser le lot soit inférieure ou égale à la probabilité qu'a le fabricant de faire une pièce défectueuse ?*

Remarque

L'énoncé contient un flou volontaire. Il faut supposer que la probabilité de défectuosité d'une pièce est égale à R mais aussi que les pièces sont indépendantes les unes des autres. Il s'agit de deux prérequis à l'application du modèle binomial. Cela nécessite aussi que le nombre total de pièces dans un lot est grand.

À nouveau, la difficulté de l'exercice est la mise en équation, c'est-à-dire la **lecture**.

Correction

Correction du 1)

Reformulons la question. On cherche à connaître la probabilité que $k+1$ pièces au moins soient défectueuses parmi trente. On numérote les pièces de 1 à 30. On introduit maintenant les évènements élémentaires suivants :

$$A_p := \{\text{la pièce numéro } p \text{ est défectueuse}\},$$

pour tout $p \in [\![1;30]\!]$. Par définition, on a $\mathbb{P}(A_p) = R$. De plus, ces évènements sont mutuellement indépendants. Enfin, on note E_k l'évènement dont on cherche la probabilité, à savoir

$$E_k := \{\text{Au moins } k+1 \text{ pièces sont défectueuses}\}.$$

On introduit maintenant les évènements

$$F_l := \{\text{Exactement } l \text{ pièces sont défectueuses}\},$$

pour tout $l \in [\![1;30]\!]$. On peut réécrire comme suit

$$F_l = \{l \text{ pièces sont défectueuses et } 30-l \text{ pièces ne sont pas défectueuses}\},$$

Comme les pièces ont la même probabilité d'être défectueuses, on a

$$\mathbb{P}(F_l) = \binom{30}{l}\mathbb{P}(\{\text{les pièces 1 à } l \text{ sont défectueuses et les pièces } l+1 \text{ à 30 ne le sont pas}\}).$$

L'indépendance des pièces nous donne

$$\mathbb{P}(F_l) = \binom{30}{l}R^l(1-R)^{30-l}.$$

Conséquemment, on a

$$\mathbb{P}(E_k) = \sum_{l=k+1}^{30} \binom{30}{l} R^l (1-R)^{30-l}\,.$$

Ici, $k = 3$ et $R = 5\%$. Le calcul de $l = 4$ à $l = 30$ est long donc on se sert de la relation $\sum_{l=0}^{30} \binom{30}{l} R^l (1-R)^{30-l} = 1$ (que l'on prouve en utilisant la formule du binôme de Newton) pour avoir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_k) &= 1 - \sum_{l=0}^{3} \binom{30}{l} R^l (1-R)^{30-l} \\ &= 1 - (1-R)^{30} - 30R(1-R)^{29} - 435R^2(1-R)^{28} - 4\,060R^3(1-R)^{27}\,.\end{aligned}$$

L'application numérique donne $\mathbb{P}(E_k) \approx 6.08\%$.

Correction du 2)

On reformule la question. On cherche k tel que l'on ait

$$\mathbb{P}(E_k) \leq R\,.$$

Ici, $R := 10\%$. On remarque

$$\mathbb{P}(E_5) \approx 7.32\% \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E_4) \approx 17.55\%\,.$$

On doit donc prendre $k = 5$.

Exercice 56 (*)

Énoncé

Quatre personnes jouent à la belote (32 cartes). Chaque joueur reçoit huit cartes. On considère les évènements suivants :

— A_1 : le joueur reçoit au moins un as.
— A_2 : le joueur reçoit au moins deux as.
— C : le joueur reçoit l'as de coeur.

Les probabilités $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2 \mid C)$ sont-elles égales ?

Correction

On commence par calculer $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$. Par définition, on a

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} .$$

On doit donc calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$. Pour cela, on se sert de la formule

$$\mathbb{P} = \frac{\#\{\text{cas favorables}\}}{\#\{\text{cas possibles}\}} .$$

On pose

— $E_0 := \{\text{le joueur reçoit exactement zéro as}\}$.
— $E_1 := \{\text{le joueur reçoit exactement un as}\}$.
— $E_2 := \{\text{le joueur reçoit exactement deux as}\}$.
— $E_3 := \{\text{le joueur reçoit exactement trois as}\}$.
— $E_4 := \{\text{le joueur reçoit exactement quatre as}\}$.

On a alors

$$\mathbb{P}(E_0) = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} .$$

En effet, il y a $\binom{32}{8}$ façons de prendre huit cartes parmi 32. Le nombre de cas possibles est donc bien $\binom{32}{8}$. Puis, il y a $\binom{4}{0}\binom{32-4}{8}$ cas favorables. En effet, si le joueur a 0 as, cela revient à prendre 0 as parmi les 4 as puis $8-0$ cartes parmi les 28 autres cartes. De même, on a

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}} , \mathbb{P}(E_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{6}}{\binom{32}{8}} , \mathbb{P}(E_3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{5}}{\binom{32}{8}} , \mathbb{P}(E_4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} ,$$

Conséquemment, on peut écrire

$$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(E_0) = \frac{\binom{32}{8} - \binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} ,$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(A_2) = 1 - \mathbb{P}(E_0) - \mathbb{P}(E_1) = \frac{\binom{32}{8} - \binom{28}{8} - \binom{4}{1}\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}} ,$$

On en déduit ainsi

$$\mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right) = \frac{\binom{32}{8} - \binom{28}{8} - \binom{4}{1}\binom{28}{7}}{\binom{32}{8} - \binom{28}{8}}\,.$$

Après simplifications, on trouve $\mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right) = \frac{4\ 571}{12\ 667} \approx 0.36$.
On calcule maintenant $\mathbb{P}\left(A_2 \mid C\right)$. Par définition, on a

$$\mathbb{P}\left(A_2 \mid C\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_2 \cap C\right)}{\mathbb{P}(C)}\,.$$

On doit donc calculer $\mathbb{P}\left(A_2 \cap C\right)$ et $\mathbb{P}(C)$. On calcule facilement

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}}\,.$$

En effet, le nombre de cas possibles est bien $\binom{32}{8}$. Et le nombre de cas favorables est $\binom{1}{1}\binom{31}{7}$. Avoir l'as de coeur revient à prendre 1 carte parmi 1 (l'as de coeur) puis 7 cartes parmi les 31 restantes. Un calcul direct donne $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$ (ce qui est logique puisqu'il y a quatre joueurs). Pour calculer $\mathbb{P}\left(A_2 \cap C\right)$, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_2 \cap C\right) &= \mathbb{P}\left(\left(E_2 \cup E_3 \cup E_4\right) \cap C\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\left(E_2 \cap C\right) \cup \left(E_3 \cap C\right) \cup \left(E_4 \cap C\right)\right)\,.\end{aligned}$$

Comme les évènements E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4 forment une partition de l'univers, on a

$$\mathbb{P}\left(A_2 \cap C\right) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}\left(E_0 \cap C\right) - \mathbb{P}\left(E_1 \cap C\right)\,.$$

Par définition, on a $E_0 \cap C = \emptyset$. Puis, le calcul donne

$$\mathbb{P}\left(E_1 \cap C\right) = \frac{\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}}\,,$$

car le nombre de cas favorables est $\binom{1}{1}\binom{3}{0}\binom{28}{7}$. En effet, on tire déjà une carte parmi une (l'as de coeur) puis on prend 0 as parmi les 3 as restants et enfin on prend 7 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as. Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}\left(A_2 \mid C\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_2 \cap C\right)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}} - \frac{\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}}}{\frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}}} = \frac{2\ 471}{4\ 495} \approx 0.55\,.$$

Les deux probabilités ne sont donc pas égales.

Remarque

Si les deux probabilités ne sont pas égales, c'est parce qu'on précise quel est l'as que le joueur possède. Un choix a donc été fait.