Correction des travaux dirigés - Intégration

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 26 †

Énoncé

Soit $\alpha \neq -1$. On pose $f_\alpha(x) := x^\alpha$ pour tout $x > 0$. L'objectif de l'exercice est de trouver une primitive de f_α.

1) Rappeler la dérivée de $f_{\alpha+1}$.

2) En déduire une primitive de f_α.

3) Exemple : trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^{99}}$.

4) De manière plus générale, donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ pour $\alpha \neq 1$.

Correction

Correction du 1)

On a $f'_{\alpha+1}(x) = (\alpha+1)x^\alpha = (\alpha+1)f_\alpha(x)$.

Correction du 2)

On en déduit qu'une primitive de f_α est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$.

Correction du 3)

Ici, $\alpha = -99$ d'où une primitive est $-\frac{1}{98}x^{-98} = -\frac{1}{98x^{98}}$.

Correction du 4)

Une primitive est donc $x \mapsto \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$.

Exercice 27 †

Énoncé

On pose $\log(t) := \int_1^t \frac{ds}{s}$ pour tout $t > 0$.

1) Quelle est la dérivée de la fonction précédente ?

2) En procédant à un changement de variable, montrer que $\int_a^{ax} \frac{ds}{s} = \log(x)$ pour tous $a, x > 0$.

3) En déduire que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ pour tous $a, b > 0$.

Correction

Correction du 1)

Par définition, la dérivée du loarithme népérien est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Correction du 2)

On pose $s := at$. Alors, $\int_a^{ax} \frac{ds}{s} = \int_{t=1}^{t=x} \frac{adt}{at} = \int_{t=1}^{t=x} \frac{dt}{t} = \log(x)$.

Correction du 3)

On en déduit $\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{ds}{s} = \int_1^a \frac{ds}{s} + \int_a^{ab} \frac{ds}{s} = \log(a) + \log(b)$.

Exercice 28

Énoncé

1) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} dx$.
2) Étudier en fonction de α la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$.
3) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x}\cos(x) dx$.

Correction

Correction du 1)

Soit f la fonction définie sur $]-1;0[\bigcup]0;1]$ par

$$f(x) := \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}}\,.$$

La fonction n'est pas définie en 0 ni en -1. En effet,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

On peut remarquer immédiatement que $f(x)$ est équivalent à $-\frac{1}{x+1}$ au voisinage de -1. Or la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$ n'est pas intégrable en -1. Conséquemment, l'intégrale est divergente.

Correction du 2)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) := \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,.$$

La fonction est bien définie sur $]0;+\infty[$. Conséquemment, les difficultés quant à la convergence de l'intégrale sont en 0 et en $+\infty$. Or, la fonction est équivalente à $x^{\alpha-2}$ en l'infini. Elle est donc intégrable en l'infini si et seulement si $\alpha-2<-1$ c'est-à-dire si $\alpha<1$.
Et, la fonction est équivalente à $x^{\alpha-1}$ en 0. Elle est donc intégrable en 0 si et seulement si $\alpha-1>-1$ c'est-à-dire si $\alpha>0$.
En conclusion, l'intégrale est convergente si et seulement si $0<\alpha<1$.

Correction du 3)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) := \cos(x)e^{-x}\,.$$

Cette fonction est bien définie en 0. Conséquemment, la difficulté quant à la convergence de l'intégrale est en $+\infty$. Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|\cos(x)e^{-x}| \le e^{-x} = o\left\{\frac{1}{x^2}\right\}$. L'intégrale est donc convergente.

Calcul de l'intégrale par une intégration par parties

On peut la calculer avec une intégration par parties. On pose $u'(x) := e^{-x}$ et $v(x) := \cos(x)$. Alors :

$$I := \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx = -\left[e^{-x}\cos(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\sin(x)dx\,.$$

On fait une deuxième intégration par parties. On intègre à nouveau l'exponentielle. En effet, si l'on voulait intégrer la fonction sinus, on retomberait sur l'intégrale initiale. On pose $u'(x) := e^{-x}$ et $v(x) := \sin(x)$. Alors :

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)dx = -\left[e^{-x}\sin(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx = I\,.$$

On peut donc écrire

$$I = 1 - I$$

d'où $I = \frac{1}{2}$.

Calcul de l'intégrale en utilisant les complexes

Rappelons que l'on a $\cos(x) = \mathrm{Re}\,(e^{ix})$. (Par ailleurs, cette écriture a du sens grâce aux développements en séries entières des fonctions sinus, cosinus et exponentielle). Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(x)e^{-x}dx &= \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{(i-1)x}\right\}\\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i-1}\left[e^{(i-1)x}\right]_0^\infty\right\}\\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-i}\right\}\\ &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1+i}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Remarquons bien que l'on a utilisé sans le mentionner la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(i-1)x} = 0$. En effet :

$$\left|e^{(i-1)x}\right| = \left|e^{ix}\times e^{-x}\right| = e^{-x} \longrightarrow 0\,.$$

De manière générale, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors on peut calculer l'intégrale de 0 à l'infini de $t \mapsto e^{-\lambda t}$. Ceci permet de définir la transformée de Laplace, très utile en sciences industrielles.

Exercice 29

Énoncé

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := \cos(3x) + 2\sin(5x)$.
2. $f_2(x) := 6e^{-4x}$.
3. $f_3(x) := e^x e^{e^x}$.
4. $f_4(x) := \frac{\log(x)^\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction

Correction du 1)

Les primitives de f_1 sont de la forme $F_1(x) := \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{2}{5}\cos(5x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Correction du 2)

Les primitives de f_2 sont de la forme $F_2(x) := -\frac{3}{2}e^{-4x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Correction du 3)

En posant $u(x) := e^x$, on remarque $f_3(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Les primitives de f_3 est sont donc de la forme $F_3(x) := e^{e^x} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Correction du 4)

En posant $u(x) := \log(x)$, on remarque $f_4(x) = u'(x) \times u(x)^\alpha$. Ainsi, si $\alpha \neq -1$, les primitives de f_4 sont de la forme $F_4(x) := \frac{1}{\alpha+1}\log(x)^{\alpha+1} + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Et, si $\alpha = -1$, les primitives de f_4 sont de la forme $F_4(x) := \log(|\log(x)|) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 30

Énoncé

Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) := x\sin(2x)$.

2) $f_2(x) := x^\alpha \log(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) $f_3(x) := \cos(x)\log(1+\cos(x))$.

4) $f_4(x) := \sin(\log(x))$.

5) $f_5(x) := \frac{4x^3-4x^2+13x}{4x^2-4x+5}$.

6) $f_6(x) := \sin(3x)\cos(5x)$.

7) $f_7(x) := \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

8) $f_8(x) := x^3\exp(x+1)$.

9) $f_9(x) := \sin(x)\cosh(x)$.

Correction

Correction du 1)

On utilise une intégration par parties avec $u(x) := x$ et $v'(x) := \sin(2x)$:

$$\int x\sin(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2}\cos(2x)\,.$$

Correction du 2)

On suppose d'abord $\alpha \neq -1$. On utilise une intégration par parties avec $u(x) := \log(x)$ et $v'(x) := x^\alpha$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \log(x)dx &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\log(x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\log(x) - \int \frac{1}{\alpha+1}x^\alpha dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}\log(x)}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Si $\alpha = -1$, on fait le changement de variables $u := \log(x)$ d'où $du = \frac{dx}{x}$. On a alors :

$$\int x^{-1}\log(x)dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\left(\log(x)\right)^2\,.$$

Remarque

On peut montrer qu'il n'y a pas de réelle discontinuité autour de $\alpha = -1$ dans le résultat précédent. En effet, prenons $\alpha = -1+\epsilon$ et faisons ensuite tendre ϵ vers 0. On considère en particulier la primitive de $x^\alpha \log(x)$ qui s'annule en 1 :

$$\begin{aligned}\int_1^X x^\alpha \log(x)dx &= \frac{X^{\alpha+1}\log(X)}{\alpha+1} - \frac{X^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}\\ &= \frac{X^\epsilon \log(X)}{\epsilon} - \frac{X^\epsilon - 1}{\epsilon^2}\\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\left\{\epsilon X^\epsilon \log(X) - X^\epsilon + 1\right\}\,.\end{aligned}$$

Procédons au développement limité de X^ϵ :

$$X^\epsilon = \exp\left\{\epsilon \log(X)\right\} = 1 + \epsilon\log(X) + \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\log(X)\right)^2 + o(\epsilon^2)\,.$$

Conséquemment, on a

$$\begin{aligned}&\int_1^X x^\alpha \log(x)dx\\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\left\{\epsilon + \epsilon^2\log(X) + o(\epsilon^2) - 1 - \epsilon\log(X) - \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\log(X)\right)^2 + o(\epsilon^2) + 1\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\log(X)\right)^2 + o(1)\,.\end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_1^X x^{-1+\epsilon}\log(x)dx = \int_1^X x^{-1}\log(x)dx\,.$$

Correction du 3)

On utilise une intégration par parties avec $u(x) := \log(1+\cos(x))$ et $v'(x) := \cos(x)$:

$$\begin{aligned}&\int \cos(x)\log\left(1+\cos(x)\right)dx\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) - \int \sin(x)\times\frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)}dx\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + \int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}dx\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + \int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}dx\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + \int \left(1-\cos(x)\right)dx\\ &= \sin(x)\log\left(1+\cos(x)\right) + x - \sin(x)\,.\end{aligned}$$

Correction du 4)

On fait le changement de variables $u := \log(x)$. D'où $x = e^u$ et $dx = e^u du$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\int \sin(\log(x))\, dx &= \int \sin(u) e^u du \\
&= \operatorname{Im}\left\{\int e^{(1+i)u}\right\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{1+i} e^{(1+i)u}\right\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{1-i}{2} e^{(1+i)u}\right\} \\
&= \frac{e^u}{2}\operatorname{Im}\left\{\cos(u) + i\sin(u) - i\cos(u) + \sin(u)\right\} \\
&= \frac{\sin(u) - \cos(u)}{2} e^u \\
&= \frac{\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))}{2} e^{(\log(x))} \\
&= x\frac{\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))}{2}\,.
\end{aligned}$$

Autre méthode

On peut procéder directement à une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int \sin(\log(x))\, dx &= \int 1 \times \sin(\log(x))\, dx \\
&= x\sin(\log(x)) - \int x\frac{1}{x}\cos(\log(x)) dx \\
&= x\sin(\log(x)) - \int \cos(\log(x)) dx\,.
\end{aligned}$$

On procède à une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int \cos(\log(x))\, dx &= \int 1 \times \cos(\log(x))\, dx \\
&= x\cos(\log(x)) + \int x\frac{1}{x}\sin(\log(x)) dx \\
&= x\cos(\log(x)) + \int \sin(\log(x)) dx\,.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\int \sin(\log(x))\, dx &= x\sin(\log(x)) - \left(x\cos(\log(x)) + \int \sin(\log(x)) dx\right) \\
&= x\left(\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))\right) - \int \sin(\log(x))\, dx\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int \sin(\log(x))\, dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\log(x)) - \cos(\log(x))\right)\,.$$

Correction du 5)

On doit d'abord décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On remarque que le degré du numérateur est 3 tandis que celui du dénominateur est 2. De plus, le dénominateur est irréductible dans $\mathbb{R}$. En effet, c'est une fonction polynômiale de degré 2 avec un discriminant égale à -64. Les pôles sont donc non réels. Conséquemment, on peut écrire

$$f_5(x) := \frac{4x^3 - 4x^2 + 13x}{4x^2 - 4x + 5} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x + \delta}{4x^2 - 4x + 5}\,.$$

On divise à gauche et à droite par x puis l'on fait tendre x vers l'infini. Il vient $1 = \alpha$. On a donc :

$$\frac{4x^3 - 4x^2 + 13x}{4x^2 - 4x + 5} - x = \beta + \frac{\gamma x + \delta}{4x^2 - 4x + 5}$$

ce qui donne

$$\frac{8x}{4x^2 - 4x + 5} = \beta + \frac{\gamma x + \delta}{4x^2 - 4x + 5}\,,$$

ce qui signifie $\beta = 0$, $\gamma = 8$ et $\delta = 0$. En d'autres termes, la décomposition en éléments simples donne

$$\begin{aligned}
f_5(x) := \frac{4x^3 - 4x^2 + 13x}{4x^2 - 4x + 5} &= x + \frac{8x}{4x^2 - 4x + 5} \\
&= x + \frac{8x - 4}{4x^2 - 4x + 5} + \frac{4}{4x^2 - 4x + 5} \\
&= x + \frac{8x - 4}{4x^2 - 4x + 5} + \frac{1}{x^2 - x + \frac{5}{4}} \\
&= x + \frac{8x - 4}{4x^2 - 4x + 5} + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Conséquemment :

$$\int f_5(x)dx = \frac{x^2}{2} + \log\left(4x^2 - 4x + 5\right) + \arctan\left(x - \frac{1}{2}\right)\,.$$

Remarque : on ne met pas de valeurs absolues car $4x^2 - 4x + 5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction du 6)

On utilise ici les formules d'Euler pour linéariser :

$$\begin{aligned}
f_6(x) &:= \sin(3x)\cos(5x) \\
&= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} \\
&= \frac{e^{8ix} + e^{-2ix} - e^{2ix} - e^{-8ix}}{4i} = \frac{\sin(8x) - \sin(2x)}{2}\,.
\end{aligned}$$

Une primitive est donc $\int \sin(3x)\cos(5x) = \frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(8x)}{16}$.

Remarque

On peut aussi appliquer directement la formule de linéarisation

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\sin(x + y) + \sin(x - y)\right]\,.$$

Autre méthode

On peut aussi procéder par des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
&\int \sin(3x)\cos(5x)dx = \sin(3x)\frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{5}\int 3\cos(3x)\sin(5x)dx \\
&= \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) - \frac{3}{5}\int \cos(3x)\sin(5x)dx \\
&= \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{5}\cos(3x)\cos(5x) - \int \frac{3}{5}\sin(3x)\cos(5x)dx\right) \\
&= \frac{1}{5}\sin(3x)\sin(5x) + \frac{3}{25}\cos(3x)\cos(5x) + \frac{9}{25}\int \sin(3x)\cos(5x)dx\,.
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\int \sin(3x)\cos(5x)dx = \frac{5}{16}\sin(3x)\sin(5x) + \frac{3}{16}\cos(3x)\cos(5x)\,.$$

On peut remarquer que le résultat est similaire au précédent. En effet :

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(8x)}{16} = \frac{1}{4}\cos(5x-3x) - \frac{1}{16}\cos(5x+3x) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos(3x)\cos(5x) + \sin(3x)\sin(5x)\right) - \frac{1}{16}\left(\cos(3x)\cos(5x) - \sin(3x)\sin(5x)\right) \\
&= \frac{3}{16}\cos(3x)\cos(5x) + \frac{5}{16}\sin(3x)\sin(5x)\,.
\end{aligned}$$

Correction du 7)

On a ici une fraction rationnelle. On regarde d'abord le dénominateur. Il s'agit du produit de deux fonctions polynômiales irréductibles dans $\mathbb{R}$ de degré 2. En effet, les discriminants sont -4 et -16. Donc, on peut écrire :

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+2x+2} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+2x+5}\,.$$

On multiplie par x^2+2x+2 des deux côtés et l'on obtient alors

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)+3} = \alpha x+\beta + (x^2+2x+2)\frac{\gamma x+\delta}{x^2+2x+5}\,.$$

Puis l'on fait tendre x vers z_0 une solution de l'équation x^2+2x+2. Ceci nous donne :

$$\frac{1}{3} = \alpha z_0 + \beta\,.$$

Or, $z_0 \notin \mathbb{R}$. Il vient immédiatement $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$. En procédant de même avec x^2+2x+5 et une de ses racines z_1, on obtient :

$$\frac{1}{-3} = \gamma z_1 + \delta\,,$$

ce qui implique $\gamma = 0$ et $\delta = -\frac{1}{3}$ car $z_1 \notin \mathbb{R}$. Ainsi, l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_7(x) &:= \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+4}\right] \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{12}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} . \end{aligned}$$

Ainsi, une primitive de f_7 est

$$\begin{aligned} \int f_7(x)dx &:= \int \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}dx \\ &= \frac{1}{3}\arctan(x+1) - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) . \end{aligned}$$

Remarque

La décomposition en éléments simples aurait pu être faite plus rapidement. On pose $u := x^2+2x+2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} &= \frac{1}{u(u+3)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+2x+5} . \end{aligned}$$

Correction du 8)

On peut procéder à des intégrations par parties. Toutefois, on va ici chercher directement une primitive de la forme $P(x)e^{x+1}$ où P est une fonction polynômiale de même degré que $x \mapsto x^3$ à savoir une fonction polynômiale de la forme $P(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$. En d'autres termes, on résout l'équation $\frac{d}{dx}(P(x))\, e^{x+1} = x^3 e^{x+1}$, c'est-à-dire l'équation $P'(x) + P(x) = x^3$:

$$ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d) = x^3 .$$

On a ici un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues. La matrice sous-jacente est triangulaire aussi la résolution est immédiate : $a = 1$, puis $b = -3$, puis $c = 6$ et $d = -6$. Une primitive de f_8 est donc

$$\int f_8(x)dx := \int x^3 e^{x+1} = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) e^{x+1} .$$

Correction du 9)

On utilise ici une intégration par parties avec $u'(x) = \cosh(x)$ et $v(x) := \sin(x)$:

$$\int f_9(x)dx := \int \sin(x)\cosh(x)dx = \sin(x)\sinh(x) - \int \cos(x)\sinh(x)dx\,.$$

On refait une intégration par parties avec $u'(x) := \sinh(x)$ et $v(x) := \cos(x)$:

$$\begin{aligned}\int f_9(x)dx &= \sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x) - \int \sin(x)\cosh(x)\\ &= \sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x) - \int f_9(x)dx\,.\end{aligned}$$

Conséquemment, on en déduit :

$$\int \sin(x)\cosh(x) = \frac{\sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x)}{2}\,.$$

Exercice 31

Énoncé

Calculer les deux intégrales suivantes :

1. $I_1 := \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}$.
2. $I_2 := \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}$.

Correction

Correction du 1)

La décomposition en éléments simples nous donne $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ dont une primitive sur l'intervalle $[1;3]$ est $\log(t) - \log(t+1)$. Il vient $I_1 = [\log(t) - \log(t+1)]_1^3 = \log\left(\frac{3}{2}\right)$.

Correction du 2)

On décompose en éléments simples et l'on obtient

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+2}\,.$$

Il vient

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{1}{2}\log(t) - \log(t+1) + \frac{1}{2}\log(t+2)\right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{t^2+2t}{t^2+2t+1}\right)\right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{35}{36}\times\frac{9}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{35}{32}\right)\,. \end{aligned}$$

Exercice 32

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

2) $I_2 := \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.

3) $I_3 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$.

4) $I_4 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)dx$.

5) $I_5 := \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}$.

6) $I_6 := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx$.

Correction

Correction du 1)

On peut calculer cette intégrale de deux manières. D'abord, on peut noter qu'il s'agit de l'aire d'un quart de disque donc immédiatement on a $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.
Sinon, on peut retrouver l'aire du quart de disque en utilisant le changement de variable $x = \sin(u)$ d'où $dx = \cos(u)du$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2u))\,du \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Correction du 2)

On procède ici à un changement de variable. Comme on a $\frac{1}{1+x^2}$ qui apparaît, on pense immédiatement à la fonction arctangente. Conséquemment, on pose $x =: \tan(u)$. D'où $dx = \tan'(u)du =$

$\frac{\sin'(u)\cos(u)-\sin(u)\cos'(u)}{\cos^2(u)}du = (1+\tan^2(u))\,du$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{1+\tan^2(u)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2u)}{2}du \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Correction du 3)

On a une fraction rationnelle avec des fonctions trigonométriques. On pose $d\omega(x) := \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$. Comme $d\omega(\pi+x) \neq d\omega(x)$, $d\omega(-x) \neq d\omega(x)$ et $d\omega(\pi-x) \neq d\omega(x)$, on fait le changement de variable $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Et, on a $x = 2\arctan(u)$ d'où $dx = \frac{2}{1+u^2}du$. Alors, on a

$$\frac{dx}{\cos(x)+\sin(x)} = 2\frac{du}{1+u^2}\frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}} = \frac{2du}{1+2u-u^2}\,.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{2}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1-\sqrt{2})}$$

Une primitive de $\frac{2}{1+2u-u^2}$ est donc

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+2u-u^2}du &= \int \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{u-(1-\sqrt{2})}\right\}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{u-(1-\sqrt{2})}{u-(1+\sqrt{2})}\right|\,.\end{aligned}$$

Comme $\tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ et $\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos(x)+\sin(x)} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{u-(1-\sqrt{2})}{u-(1+\sqrt{2})}\right|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\,.\end{aligned}$$

Correction du 4)

On a une fraction rationnelle avec des fonctions trigonométriques. On pose $d\omega(x) := \sin(x)\cos^2(x)dx$. On remarque $d\omega(-x) = d\omega(x)$ donc on pose le changement de variable $u := \cos(x)$ d'où $du = -\sin(x)dx$. Il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)dx = -\int_1^0 u^2du = \int_0^1 u^2du = \frac{1}{3}\,.$$

Correction du 5)

Il s'agit ici de l'exemple du cours. On prend $u := \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ce qui donne $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$. Ainsi, on a $\frac{dx}{x} = d\log|x| = d\log\left|\frac{1+u^2}{1-u^2}\right| = d\log|1+u^2| - d\log|1-u| - d\log|1+u| = \frac{2u}{1+u^2}du + \frac{1}{1-u}du - \frac{1}{1+u}du$. Conséquemment, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{2u^2}{1+u^2} + \frac{u}{1-u} - \frac{u}{1+u}\right) du \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\left[2 - \frac{2}{1+u^2}\right] + \left[\frac{1}{1-u} - 1\right] + \left[\frac{1}{1+u} - 1\right]\right) du \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{2}{1+u^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du \\
&= -2\left[\arctan(x)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left[\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{\pi}{3} + \log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right| \\
&= \log\left(\sqrt{3}+2\right) - \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Correction du 6)

La dernière intégrale se calcule comme suit :

$$
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
$$

Exercice 33

Énoncé

Calculer, en passant en coordonnées polaires, les intégrales :
1) $I := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dxdy$. En déduire la valeur de $A := \int_0^\infty \exp\{-x^2\}\,dx$.
2) $J := \iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} x^2y^2\exp\{-(x^2+y^2)\}\,dxdy$. En déduire la valeur de $B := \int_0^\infty x^2\exp\{-x^2\}\,dx$.

Correction

Correction du 1)

En coordonnées polaires, on a $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ et le jacobien est le volume de la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant (volume) est égal à $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$. On a ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_{r=0}^{\infty} re^{-r^2}dr\right) \times \left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Puis, l'on a $A = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction du 2)

En coordonnées polaires, on a $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ et le jacobien est r. On a ainsi

$$\begin{aligned} J &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{+\infty} r^5e^{-r^2}dr\right). \end{aligned}$$

Calculons d'abord l'intégrale en θ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4\theta))\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

On calcule l'intégrale sur le rayon par intégration par parties. On pose $u'(r) := re^{-r^2}$ et $v(r) := r^4$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{r=0}^{+\infty} r^5 e^{-r^2} dr &= \left[-\frac{1}{2}r^4 e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-r^2} \times 4r^3 dr \\ &= 2\int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2} dr\,.\end{aligned}$$

On procède à nouveau à une intégration par parties. On pose $u'(r) := 2re^{-r^2}$ et $v(r) := r^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}&\int_{r=0}^{+\infty} r^5 e^{-r^2} dr \\ &= 2\int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2} dr \\ &= \left[-r^2 e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-r^2} \times 2r dr \\ &= \int_0^{\infty} 2re^{-r^2} dr \\ &= \left[-e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

D'où $J = \frac{\pi}{16}$. Puis, l'on en déduit la valeur de B. En effet, $B = \sqrt{J} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. On aurait en fait pu calculer B directement :

$$\begin{aligned}B &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \\ &= [-\frac{x}{2}e^{-x^2}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}A \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,.\end{aligned}$$

Exercice 34 (*)

Énoncé

Justifier pourquoi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$ est divergente. Puis, calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-1-\epsilon} \frac{dx}{1+x^3} + \int_{-1+\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \right\} .$$

Correction

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ est équivalente à $\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}$ en -1. En effet, $\frac{1+x}{1+x^3} = \frac{1}{1-x+x^2} \longrightarrow \frac{1}{3}$. Ainsi, l'intégrale n'est pas convergente. On calcule ensuite ce que l'on appelle la partie principale, à savoir

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-1-\epsilon} \frac{dx}{1+x^3} + \int_{-1+\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \right\} .$$

Pour cela, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 - X + 1} .$$

On peut procéder comme dans la correction de l'exercice 6. Utilisons toutefois d'autres techniques. On multiplie des deux côtés par X puis l'on fait tendre X vers $+\infty$. Il vient alors :

$$0 = \alpha + \beta .$$

On prend ensuite $X = 0$ et il vient

$$1 = \alpha + \gamma .$$

Puis, on prend $X = 1$ ce qui donne

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta + \gamma}{1} .$$

Cette dernière égalité se traduit comme suit : $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 1$. On obtient alors $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{3}$ et $\gamma = \frac{2}{3}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \\
&= \frac{1}{3} \log|1+x| - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx .
\end{aligned}$$

On utilise l'astuce $x - 2 = \frac{(2x-1)+1}{2} - 2 = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
&= \frac{1}{2} \log\left|x^2 - x + 1\right| - 2 \int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \log\left|x^2 - x + 1\right| - \sqrt{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \log\left|x^2 - x + 1\right| - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) .
\end{aligned}$$

Une primitive de f est donc

$$F(x) := \frac{1}{3}\log|1+x| - \frac{1}{6}\log\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

On a alors les limites suivantes

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\left\{F(-1+\epsilon) - \frac{1}{3}\log(\epsilon) + \frac{1}{6}\log(3) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right\} = 0\,,\\
&\lim_{\epsilon\to 0}\left\{F(-1-\epsilon) - \frac{1}{3}\log(\epsilon) + \frac{1}{6}\log(3) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right\} = 0\,,\\
&\lim_{R\to+\infty} F\left(R\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\\
\text{et}\quad &\lim_{R\to+\infty} F\left(-R\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Conséquemment, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-1-\epsilon}\frac{dx}{1+x^3} + \int_{-1+\epsilon}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}\\
&= (F(-1-\epsilon) - F(-\infty)) + (F(+\infty) - F(-1+\epsilon))\\
&= \left(\frac{1}{3}\log(\epsilon) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\log(\epsilon) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) + o(1)\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + o(1)\,.
\end{aligned}$$

L'intégrale converge donc au sens de la valeur principale et elle vaut $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Exercice 35 (*)

Énoncé

Calculer les deux intégrales suivantes pour $p, q \in \mathbb{N}^*$:

1. $I_1 := \int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)dt$.
2. $I_2 := \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)dt$.

Correction

Correction du 1)

On linéarise : $\cos(X)\cos(Y) = \frac{1}{2}[\cos(X+Y) + \cos(X-Y)]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p-q)t)dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p+q}\underbrace{[\sin((p+q)t)]_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{2}\frac{1}{p-q}\underbrace{[\sin((p-q)t)]_0^{2\pi}}_{=0}, \end{aligned}$$

si $p \neq q$. Ainsi, $I_1 = 0$ si $p \neq q$. Et, si $p = q$, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

Conséquemment, $I_1 = \pi$ si $p = q$ et $I_1 = 0$ si $p \neq q$.

Correction du 2)

On linéarise : $\sin(X)\sin(Y) = \frac{1}{2}[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p-q)t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p+q)t)dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p-q}\underbrace{[\sin((p-q)t)]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+q}\underbrace{[\sin((p+q)t)]_0^{2\pi}}_{=0} +, \end{aligned}$$

si $p \neq q$. Ainsi, $I_2 = 0$ si $p \neq q$. Et, si $p = q$, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

Conséquemment, $I_2 = \pi$ si $p = q$ et $I_2 = 0$ si $p \neq q$.

Exercice 36 (*)

Énoncé

Trouver la formule de récurrence permettant de calculer l'intégrale

$$M_n := \int_0^{+\infty} x^n \exp\{-x\}\, dx\,.$$

Calculer cette intégrale pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Il s'agit ici d'un exercice lié aux probabilités. On considère en effet la loi de probabilités classique définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\mathbb{P}\{X \in [x; x+dx]\} = e^{-x} dx\,.$$

On verra par la suite que l'on a $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Et, l'intégrale que l'on cherche à calculer est en fait :

$$M_n := \int_0^{+\infty} x^n \exp\{-x\}\, dx =: \mathbb{E}\{X^n\}\ ,$$

le moment d'ordre n d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle.

On peut noter que la loi exponentielle est utilisée pour modéliser les phénomènes aléatoires "sans mémoire". En effet :

$$\mathbb{P}\{X > t\} = \int_t^{+\infty} e^{-u} du = e^{-t}\,.$$

Puis, on calcule l'espérance de l'évènement $\{X > t+s\}$ conditionnellement à l'évènement $\{X > t\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X > t+s \mid X > t\} &= \frac{\mathbb{P}\left[\{X > t+s\} \bigcap \{X > t\}\right]}{\mathbb{P}\{X > t\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X > t+s\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} \\
&= \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} \\
&= e^{-s} \\
&= \mathbb{P}\{X > s\}\ .
\end{aligned}$$

Correction

On procède à une intégration par parties pour le calcul de M_{n+1}. On prend $u'(x) := e^{-x}$ et $v(x) := x^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
M_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx \\
&= \left[-x^{n+1} e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \\
&= (n+1) M_n\,.
\end{aligned}$$

On en déduit alors : $M_n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times M_0$. On calcule maintenant M_0 :

$$M_0 = \int_0^{-\infty} e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1\,.$$

On a donc $M_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 (*)

Énoncé

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $G(x) := \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Calculer la dérivée de G.
2) Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u et v deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction $G(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

Rappel

Si f est une fonction continue sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et si $x_0 \in \mathcal{I}$, alors la fonction $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est dérivable et sa dérivée vaut $f(x)$.

Correction

Correction du 1)

On pose $F(x) := \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Alors, F est dérivable et de plus $F'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Par ailleurs, on remarque $G(x) = F(2x) - F(x)$ (par la relation de Chasles). Conséquemment : $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{x}$.

Correction du 2)

On pose $F(x) := \int_0^x f(t)dt$. Alors, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. On remarque par ailleurs $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$ (par la relation de Chasles). Conséquemment : $G'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Exercice 38 (*)

Énoncé

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$. Montrer que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\,.$$

2) En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \log(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$.
3) Montrer $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$.
4) Conclure : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \log(2)$.

Correction

Correction du 1)

On remarque $1 + (-1)^n x^{n+1} = 1 - (-x)^{n+1}$. Comme $x \in [0;1]$, une identité remarquable nous donne immédiatement $1 - (-x)^{n+1} = (1-(-x)) \sum_{k=0}^{n}(-x)^k$ d'où l'égalité demandée.

Correction du 2)

On intègre de 0 à 1 et la linéarité de l'intégrale (la somme étant **finie**) nous donne

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx\,,$$

ce qui conduit à l'égalité demandée vu que $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log(2)$.

Correction du 3)

On note que pour tout $t \geq 0$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$ d'où $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{n+1}dt = \frac{1}{n+2}$. Finalement, comme $\frac{t^{n+1}}{1+t} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, il vient $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$.

Correction du 4)

On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx - \log(2)\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt = 0\,.$$

On en déduit immédiatement la limite demandée.

Exercice 39 (*)

Énoncé

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}\,.$$

Pour tout x réel, on pose $S(x) := \int_a^b \left(f(t) + xg(t)\right)^2 dt$. Vérifier que S est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Conclure en considérant le discriminant de ce trinôme.

Correction

On utilise la linéarité de l'intégrale pour obtenir

$$S(x) = \underbrace{\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)}_{=:A} x^2 + \underbrace{\left(2\int_a^b f(t)g(t)dt\right)}_{=:B} x + \underbrace{\int_a^b f(t)^2 dt}_{=:C}\,.$$

On a donc bien $S(x) = Ax^2 + Bx + C$. Ainsi, S est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal cà 2. De plus, en tant qu'intégrale d'une fonction positive, $S(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que le discriminant est négatif c'est-à-dire que l'on a $B^2 - 4AC \leq 0$ ce qui se traduit par

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right) \times \left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)\,.$$

Prendre la racine permet de conclure.

Exercice 40 (*)

Énoncé

Calculer l'intégrale

$$I := \iint_{(S)} \frac{dxdy}{(x+y)^4}$$

où le domaine d'intégration est défini comme suit :

$$(S) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq 1,\, y \geq 2,\, x+y \leq 5\Big\}\ .$$

Correction

Soit $(x,y) \in (S)$. Comme $y \geq 2$, on en déduit $x \leq 5-2=3$. Conséquemment, on a

$$\begin{aligned}
I := \iint_{(S)} \frac{dxdy}{(x+y)^4} &= \int_{x=1}^{x=3} \left(\int_{y=2}^{5-x} \frac{dy}{(y+x)^4} \right) dx \\
&= \int_{x=1}^{x=3} \left(\int_{y=2}^{5-x} (y+x)^{-4} dy \right) dx \\
&= \int_{x=1}^{x=3} \left(-\frac{1}{3} \Big[(y+x)^{-3} \Big]_2^{5-x} \right) dx \\
&= \frac{1}{3} \int_{x=1}^{x=3} \Big((x+2)^{-3} - 5^{-3} \Big) dx \\
&= \frac{1}{3} \int_{x=1}^{x=3} (x+2)^{-3} dx - \frac{2}{375} \\
&= -\frac{1}{6} \Big[(x+2)^{-2} \Big]_1^3 - \frac{2}{375} \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) - \frac{2}{375} \\
&= \frac{22}{5 \times 9 \times 75} = \frac{22}{3375}\ .
\end{aligned}$$

Exercice 41 (*)

Énoncé

Calculer l'intégrale

$$I := \iint_{(S)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} dxdy$$

où le domaine d'intégration est défini comme suit :

$$(S) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2+y^2 \leq 1\right\} .$$

Correction

Comme le domaine d'intégration est invariant par rotation, il est plus simple de passer en coordonnées polaires. Aussi, il vient

$$\begin{aligned}
I &:= \iint_{(S)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2} dxdy \\
&= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{r^2 \left(\cos(\theta)+\sin(\theta)\right)^2}{r^2+2} r dr d\theta \\
&= \left(\int_{r=0}^{r=1} \frac{r^3}{r^2+2} dr\right) \times \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (1+\sin(2\theta)) d\theta\right) \\
&= \left(\int_{r=0}^{r=1} \left(r - \frac{2r}{r^2+2}\right) dr\right) \times 2\pi \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) .
\end{aligned}$$

Exercice 42 (*)

Énoncé

Calculer l'intégrale

$$I := \iint_{(S)} |x-y|\, dxdy$$

où le domaine d'intégration est défini comme suit :

$$(S) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x| \le 1,\, |y| \le 1\Big\}\ .$$

Correction

On sépare le domaine d'intégration en deux sous-domaines :

$$\begin{aligned} &(S_+) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x| \le 1,\, |y| \le 1,\, y \ge x\Big\} \\ \text{et} \quad &(S_-) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x| \le 1,\, |y| \le 1,\, x \ge y\Big\}\ . \end{aligned}$$

On peut les réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} &(S_+) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ -1 \le x \le y \le 1\Big\} \\ \text{et} \quad &(S_-) := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ -1 \le y \le x \le 1\Big\}\ . \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs que si $(x,y) \in (S_-)$ alors $(-x,-y) \in (S_+)$. Conséquemment, on a

$$\begin{aligned} I &:= \iint_{(S)} |x-y|\, dxdy \\ &= \iint_{(S_+)} |x-y|\, dxdy + \iint_{(S_-)} |x-y|\, dxdy \\ &= \iint_{(S_+)} |x-y|\, dxdy + \iint_{(S_+)} |(-x)-(-y)|\, d(-x)d(-y) \\ &= 2\iint_{(S_+)} |x-y|\, dxdy \\ &= 2\iint_{(S_+)} (y-x)\, dxdy \\ &= 2\int_{x=-1}^{x=1} \left(\int_{y=x}^{y=1} (y-x)\, dy\right) dx \\ &= 2\int_{x=-1}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2} - yx\right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= 2\int_{x=-1}^{x=1} \left(\frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2\right) dx \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} (x-1)^2 dx \\ &= \frac{8}{3}\,. \end{aligned}$$