Correction des travaux dirigés - Dérivation

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Page de garde **1**

Table des matières **3**

Exercice 14 † **5**
Énoncé 5
Correction 5
Correction du **1)** 5
Correction du **2)** 5
Correction du **3)** 5
Correction du **4)** 5
Correction du **5)** 5

Exercice 15 † **7**
Énoncé 7
Correction 7
Correction du **1)** 7
Correction du **2)** 7
Correction du **3)** 7
Correction du **4)** 7

Exercice 16 † **9**
Énoncé 9
Correction 9
Correction du **1)** 9
Correction du **2)** 9
Correction du **3)** 9

Exercice 17 † **11**
Énoncé 11
Correction 11
Correction du **1)** 11
Correction du **2)** 11
Correction du **3)** 11
Correction du **4)** 11
Correction du **5)** 11

Exercice 18 **13**
Énoncé 13
Correction 13
Correction du **1)** 13
Correction du **2)** 13
Correction du **3)** 13
Correction du **4)** 14
Correction du **5)** 14
Correction du **6)** 14
Correction du **7)** 14

Correction du **8)** 14
Correction du **9)** 14

Exercice 19 **15**
Énoncé 15
Correction 15
Correction du **1)** 15
Correction du **2)** 15
Correction du **3)** 15
Correction du **4)** 15
Correction du **5)** 15
Correction du **6)** 16
Correction du **7)** 16
Correction du **8)** 16
Correction du **9)** 16
Correction du **10)** 16
Correction du **11)** 16
Correction du **12)** 16
Correction du **13)** 16
Correction du **14)** 16
Correction du **15)** 16

Exercice 20 **17**
Énoncé 17
Correction 17

Exercice 21 (*) **19**
Énoncé 19
Correction 19
Correction du **1)** 19
Correction du **2)** 19
Correction du **3)** 19
Correction du **4)** 19
Correction du **5)** 19

Exercice 22 (*) **21**
Énoncé 21
Correction 21
Correction du **1)** 21
Correction du **2)** 21
Correction du **3)** 21

Exercice 23 (*) **23**
Énoncé 23
Correction 23
Correction du **1)** 23
Correction du **2)** 23
Correction du **3)** 23

Correction du **4)** 24
Autre correction du **4)** 24
Correction du **5)** 24
Correction du **6)** 24

Exercice 24 (*) **25**
Énoncé 25
Correction 25

Exercice 25 (*) **27**
Énoncé 27
Correction 27

Exercice 14 †

Énoncé

L'objectif de l'exercice est de montrer que la dérivée de la fonction $f_n(x) := x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On considère d'abord $n = 0$. Que vaut $f_0(x)$ pour tout x réel ?

2) En reprenant la définition de la dérivée, que vaut $f_0'(x)$ pour tout x réel ?

3) Refaire les questions 1) et 2) avec $n = 1$.

4) Soit un entier n supérieur ou égal à 2. Rappeler la formule du binôme.

5) En reprenant la définition de la dérivée, que vaut $f_n'(x)$ pour tout x réel ?

Correction

Correction du 1)

Par définition, $f_0(x) = 1$.

Correction du 2)

On a $f_0'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_0(x+h)-f_0(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$.

Correction du 3)

Par définition, $f_1(x) = x$ d'où $f_1'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$.

Correction du 4)

On a $(h+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}$.

Correction du 5)

Par définition, $f_n'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h+x)^n - x^n}{h}$ d'où $f_n'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$.

Exercice 15 †

Énoncé

Soit $f_n(x) := x^n$. On veut montrer $f'_n(x) =\mapsto nx^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; sans utiliser la formule du binôme. On va procéder par récurrence. Pour ce faire, on admet $f'_0(x) = 0$ et que $f'_1(x) = 1$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. On suppose que $f'_k(x) = kx^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$. Soit maintenant $l \in [\![1; n]\!]$ quelconque. Vérifier brièvement que l'on a $f_l(x)f_{n+1-l} = f_{n+1}$.

2) On rappelle la formule $(uv)' = u'v + uv'$. En déduire la dérivée de $f_l(x)f_{n+1-l}$.

3) En déduire que $f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n$.

4) Conclure.

Correction

Correction du 1)

On a $f_l(x)f_{n+1-l}(x) = x^l \times x^{n+1-l} = x^{n+1} = f_{n+1}(x)$.

Correction du 2)

On a $(f_l f_{n+1-l})' = f'_l f_{n+1-l} + f_l f'_{n+1-l}$. Or, $1 \leq l \leq n$ d'où $1 \leq n+1-l \leq n$. Ainsi, on connait la dérivée de f_{n+1-l} et celle-ci est $f'_{n+1-l}(x) = (n+1-l)x^{n+1-l-1} = (n+1-l)x^{n-l}$. Il s'ensuit $(f_l f_{n+1-l})'(x) = lx^{l-1} \times x^{n+1-l} + x^l \times (n+1-l)x^{n-l} = lx^{l-1+n+1-l} + (n+1-l)x^{l+n-l} = (l+n+1-l)x^n = (n+1)x^n$.

Correction du 3)

Comme $f_{n+1} = f_l f_{n+1-l}$, on en déduit immédiatement $f'_{n+1}(x) = (n+1)x^n$.

Correction du 4)

La propriété est vraie pour $n = 0$ (et pour $n = 1$) et si elle est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$, elle l'est aussi au rang $n+1$. Conséquemment, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 †

Énoncé

Soit $g_n(x) := \frac{1}{x^n}$ pour $x > 0$. Ici, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) On pose $f_n(x) := x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'on a $f_n(x)g_n(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

2) Dériver la fonction $f_n g_n$ de deux manières différentes et en déduire $g_n'(x) = -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} g_n(x)$ pour tout $x > 0$.

3) Simplifier pour obtenir $g_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

4) Observer que $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1}$.

Correction

Correction du 1)

On observe directement $f_n(x)g_n(x) = x^n \frac{1}{x^n} = \frac{x^n}{x^n} = 1$.

Correction du 2)

La dérivée de $f_n g_n$ est $f_n' g_n + f_n g_n'$. Or, la dérivée de $f_n g_n$ est égale à la dérivée de $x \mapsto 1$ et elle vaut donc 0. Il s'ensuit $f_n(x)g_n'(x) = -f_n'(x)g_n(x)$ d'où $g_n'(x) = -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} g_n(x)$, la quantité $\frac{1}{f_n(x)}$ étant bien définie dès que $x > 0$

Correction du 3)

On peut simplifier comme suit : $g_n'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^n}\frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

Exercice 17 †

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha(x) := x^\alpha$ pour tout $x > 0$. L'objectif de l'exercice est d'obtenir sa dérivée.

1) Rappeler la dérivée de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Rappeler la dérivée de f_{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Pour tout $x > 0$, réécrire f_α à l'aide des fonctions exponentielle (exp) et logarithme népérien (log).

4) Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, quelle est la dérivée de $e^{u(x)}$?

5) Conclure avec $u(x) := \alpha \log(x)$.

Correction

Correction du 1)

On a $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Correction du 2)

On a $f_{-n}'(x) = -nx^{-n-1}$.

Correction du 3)

On a $f_\alpha(x) = \exp\left(\alpha \log(x)\right)$.

Correction du 4)

Cette dérivée est $u'(x)e^{u(x)}$.

Correction du 5)

Il s'ensuit $f_\alpha'(x) = \frac{\alpha}{x} \exp\left(\alpha \log(x)\right) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

Exercice 18

Énoncé

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := 4x^3 - 5x^2 + x - 1$.
2. $f_2(x) := 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$.
3. $f_3(x) := (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$.
4. $f_4(x) := \frac{2x^2-3}{x^2+7}$.
5. $f_5(x) := \frac{2x-1}{x+1}$.
6. $f_6(x) := -x + 2 + \frac{2}{3x}$.
7. $f_7(x) := \frac{1}{x+x^2}$.
8. $f_8(x) := (2x + 1)^2$.
9. $f_9(x) := \sqrt{x}(5x - 3)$.

Correction

Correction du 1)

On a :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 4 \times 3 \times x^{3-1} - 5 \times 2 \times x^{2-1} + 1 \times x^{1-1} + 0 \\ &= 12x^2 - 10x + 1\,. \end{aligned}$$

Correction du 2)

On réécrit la fonction comme suit : $f_2(x) = 5x^3 - x^{-1} + 3x^{\frac{1}{2}}$. La dérivéeest donc :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 5 \times 3 \times x^{3-1} - (-1) \times x^{-1-1} + 3 \times \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= 15x^2 + x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Correction du 3)

Ici, on dérive un produit. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)(x^3-2x)\right\} &= 2x \times (x^3 - 2x) + (x^2 + 1) \times (3x^2 - 2) \\ &= 2x^4 - 4x^2 + 3x^4 + x^2 - 2 \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2\,. \end{aligned}$$

À noter que l'on aurait pu calculer le produit avant de dériver : $f_3(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x) = x^5 - x^3 - 2x$ dont la dérivée donne bien $f_3'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$.

Correction du 4)

On dérive un quotient. On a donc :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{\overbrace{\frac{d}{dx}\left(2x^2-3\right)}^{=4x}\times(x^2+7)-(2x^2-3)\times\overbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2+7\right)}^{=2x}}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{4x^3+28x-(4x^3-6x)}{(x^2+7)^2} \\ &= \frac{34x}{(x^2+7)^2}\,. \end{aligned}$$

On aurait également pu commencer par décomposer en éléments simples :

$$\frac{2x^2-3}{x^2+7}=\frac{2X-3}{X+7}=A+\frac{B}{X+7}\,,$$

où $X=x^2$. En utilisant les techniques classiques, on trouvait $A=2$ et $B=-17$ d'où $f_4(x)=2-\frac{17}{x^2+7}$. La dérivée de cette fonction donne ensuite $f_4'(x)=0-17\times 2x\times\frac{-1}{(x^2+7)^2}=\frac{34x}{(x^2+7)^2}$.

Correction du 5)

Ici, on remarque $f_5(x)=2-3\times(x+1)^{-1}$. La dérivée est donc $f_5'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$.

Correction du 6)

On réécrit la fonction comme suit $f_6(x)=-x+2+\frac{2}{3}x^{-1}$. On obtient alors la dérivée $f_6'(x)=-1-\frac{2}{3}x^{-2}=-1-\frac{2}{3x^2}$.

Correction du 7)

On pourrait décomposer en éléments simples pour obtenir $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ dont la dérivée est $f_7'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Utilisons plutôt la formule de dérivée d'un inverse :

$$f_7'(x)=-\frac{\frac{d}{dx}\left(x+x^2\right)}{(x+x^2)^2}=-\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}\,.$$

Correction du 8)

On dérive un carré et il vient immédiatement $f_8'(x)=2\times(2x+1)^{2-1}\times\frac{d}{dx}(2x+1)=4(2x+1)=8x+4$. On aurait aussi pu développer comme suit : $f_8(x)=4x^2+4x+1$ dont la dérivée est bien $f_8'(x)=8x+4$.

Correction du 9)

On va ici dériver le produit : $f_9'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-3)+5\sqrt{x}=\frac{15}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. On pourrait également développer comme suit : $f_9(x)=5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$. La dérivée est alors $f_9'(x)=\frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 19

Énoncé

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := x^3 \cos(5x+1)$.
2. $f_2(x) := e^{\cos(x)}$.
3. $f_3(x) := x \log(x)$.
4. $f_4(x) := \log(e^x + 1)$.
5. $f_5(x) := e^{x^3+2x^2+3x+4}$.
6. $f_6(x) := e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.
7. $f_7(x) := \log(e^x + \sin(x))$.
8. $f_8(x) := \frac{x}{x^2+1}$.
9. $f_9(x) := \frac{\cos(2x)}{x^2-2}$.
10. $f_{10}(x) := \log(\cos(2x))$.
11. $f_{11}(x) := \frac{x}{\sin(x)}$.
12. $f_{12}(x) := \log(x - \sqrt{x^2-1})$.
13. $f_{13}(x) := \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$, $x > 1$.
14. $f_{14}(x) := \log(\log(x))$.
15. $f_{15}(x) := \log(\log(\log(x)))$.

Correction

Correction du 1)

On dérive le produit et l'on obtient $f_1'(x) = 3x^2\cos(5x+1) - 5x^3\sin(5x+1)$.

Correction du 2)

On dérive la composée de deux fonctions et l'on obtient $f_2'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$.

Correction du 3)

La dérivée du produit nous donne $f_3'(x) = \log(x) + 1$.

Correction du 4)

On dérive la composée de deux fonctions et il vient $f_4'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

Correction du 5)

À nouveau, on a la composée de deux fonctions d'où $f_5'(x) = (3x^2+4x+3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$.

Correction du 6)

On remarque : $f_6(x) = e^{g_6(x)}$ où $g_6(x) := \sqrt{x^2+x+1}$. On a alors $f_6'(x) = g_6'(x)e^{g_6(x)} = g_6'(x)e^{\sqrt{x^2+x+1}}$. Il suffit donc de dériver g_6 (comme composition de deux fonctions) :

$$g_6'(x) = (2x+1) \times \frac{1}{2} \times (x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

On a donc $f_6'(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Correction du 7)

La dérivée est égale à $f_7'(x) = \frac{e^x+\cos(x)}{e^x+\sin(x)}$.

Correction du 8)

On dérive un quotient : $f_8'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Correction du 9)

On dérive un quotient : $f_9'(x) = \frac{-2\sin(2x)(x^2-2)-2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2}$.

Correction du 10)

On dérive la composée de deux fonctions : $f_{10}'(x) = -\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x)$.

Correction du 11)

On dérive un quotient : $f_{11}'(x) = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Correction du 12)

On dérive la composée de deux fonctions :

$$f_{12}'(x) = \frac{1-\frac{1}{2}\times(2x)\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Correction du 13)

On utilise les propriétés du logarithme pour remarquer $f_{13}'(x) = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x-1)$ si $x > 1$. La dérivée est donc $f_{13}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{1-x^2}$.

Correction du 14)

On dérive la composée de deux fonctions : $f_{14}'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\log(x)} = \frac{1}{x\log(x)}$.

Correction du 15)

On remarque $f_{15}(x) = \log(f_{14}(x))$ donc $f_{15}'(x) = \frac{f_{14}'(x)}{f_{14}(x)} = \frac{\frac{1}{x\log(x)}}{\log(\log(x))} = \frac{1}{x\log(x)\log(\log(x))}$.

Exercice 20

Énoncé

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) := (x-a)g(x)$. Montrer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Correction

On calcule :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g(x) \longrightarrow g(a)\,,$$

quand x tend vers a. Donc f est bien dérivable en a et de plus $f'(a) = g(a)$.

Exercice 21 (*)

Énoncé

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tous $a, b > 0$. On admet qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition et que $f'(1) > 0$. L'objectif de l'exercice est de montrer $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ pour tout $x > 0$.

1) Dériver la fonction $x \mapsto f(ax)$ en utilisant la formule $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$.

2) Dériver la fonction $x \mapsto f(ax)$ en utilisant la propriété de la fonction f.

3) En déduire $f'(x) = af'(ax)$ pour tout $x, a > 0$.

4) En posant $a := \frac{1}{x}$, conclure.

5) Donner un exemple de telle fonction f.

Correction

Correction du 1)

On pose $u(x) := f(x)$ et $v(x) := ax$. Alors, $v'(x) = a$ d'où $\frac{d}{dx}f(ax) = \frac{d}{dx}(u \circ v)(x) = v'(x)u'(v(x)) = af'(ax)$.

Correction du 2)

Par hypothèse, $f(ax) = f(a) + f(x)$ donc $\frac{d}{dx}f(ax) = f'(x)$.

Correction du 3)

On en déduit $f'(x) = af'(ax)$.

Correction du 4)

en prenant $a = \frac{1}{x}$ dans l'égalité précédente, il vient $f'(x) = \frac{1}{x}f'(\frac{1}{x}x) = \frac{f'(1)}{x}$.

Correction du 5)

On peut penser au logarithme népérien, log.

Exercice 22 (*)

Énoncé

Soit une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives et telle que $g(a+b) = g(a) \times g(b)$ pour tous a, b. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) > 0$. On introduit la fonction $h := \log(g)$.

1) Calculer $h(a+x) - h(a) - h(x)$ pour tous a, x.

2) En déduire que h' est une fonction constante.

3) En déduire l'existence de deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $g(x) = C_1 e^{C_2 x}$ pour tout x réel.

Correction

Correction du 1)

Par hypothèse, $h(a+x) = \log(f(a+x)) = \log(f(a)f(x)) = \log(f(a)) + \log(f(x)) = h(a) + h(x)$ d'où $h(a+x) - h(a) - h(x) = 0$ pour tous $a, x \in \mathbb{R}$.

Correction du 2)

On en déduit $\frac{d}{dx} h(a+x) = \frac{d}{dx} h(x)$ d'où $h'(x) = h'(0)$. Ainsi, h' est bien constante.

Correction du 3)

Il s'ensuit $h'(x) = h(0) + h'(0)x$ d'où $g(x) = \exp\left(h(0) + h'(0)x\right) = C_1 e^{C_2 x}$ où $C_1 > 0$ et $C_2 = \frac{g'(0)}{g(0)} > 0$.

Exercice 23 (*)

Énoncé

On admet les formules trigonométriques et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

1) Justifier que l'on a $\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \sin(\frac{h}{2})$ pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

2) En déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$.

3) Calculer la dérivée de la fonction cos.

4) Calculer la dérivée de la fonction sin.

5) On pose $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que l'on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\arctan(x)$ l'unique antécédent de x par la fonction tangente dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On admet la dérivabilité de la fonction arctangente. Démontrer $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Correction

Correction du 1)

On a $\cos(h) - 1 = \cos(2\frac{h}{2}) - 1 = 1 - 2\sin^2(\frac{h}{2}) - 1$ d'où le résultat annoncé après avoir remarqué que l'on a $\frac{2}{h} = \frac{1}{\frac{h}{2}}$.

Correction du 2)

Quand h tend vers 0, $\frac{h}{2}$ tend aussi vers 0. Ainsi, $\lim_{h\to 0} -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = -1$. Puis, la quantité $\sin(\frac{h}{2})$ tend vers 0 d'où la limite annoncée.

Correction du 3)

On a

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} - \sin(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1} \\
&= -\sin(x)\,.
\end{aligned}$$

Correction du 4)

On a

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x)\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} + \cos(x)\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{=1} \\
&= \cos(x)\,.
\end{aligned}$$

Autre correction du 4)

On utilise la propriété $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ d'où $\sin'(x) = -\cos'(\frac{\pi}{2} - x) = -(-\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sin\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

Correction du 5)

Il s'agit de la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= 1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 \\
&= 1+\tan^2(x)\,.
\end{aligned}$$

Correction du 6)

On remarque $\tan\circ\arctan(x) = x$ d'où $\arctan'(x)\times\tan'(\arctan(x)) = 1$. On en déduit la relation voulue en utilisant la question précédente : $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 24 (*)

Énoncé

Soit un intervalle ouvert non-vide $\mathcal{I} =]a; b[$ avec $a < b$. Soit une fonction bijective f de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$. On appelle f^{-1} la fonction réciproque de f. Montrer que f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

En déduire la dérivée de la fonction arctan.

Correction

On sait que l'on a $g(x) := (f \circ f^{-1})(x) = x$. On remarque ainsi :

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = 1\,.$$

Puis :

$$1 = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \underbrace{\frac{f\left(f^{-1}(x)\right) - f\left(f^{-1}(a)\right)}{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}}_{\longrightarrow f'(f^{-1}(a))} \times \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a}\,.$$

Comme $f'(x) \neq 0$ pour tout x, on en déduit que f^{-1} est dérivable, de dérivée $\frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$. En particulier, on a $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 25 (*)

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Correction

La bornitude du sinus implique la continuité en 0. On dérive ensuite pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) .$$

On a la convergence de $f'(x)$ vers 0 quand x tend vers 0. Et, $f'(0) = \lim_{x\to 0} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc f' est bien continue.

On dérive à nouveau pour $x \neq 0$:

$$f''(x) = 20x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 8x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$$

quand x tend vers 0. Puis, $f''(0) = \lim_{x\to 0} 5x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc f'' est bien continue.

Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.