Correction des travaux dirigés - Limites et continuité

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 9

Énoncé

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) := e^{-\sqrt{x}}$.
2. $f_2(x) := \frac{x+7}{4x+3}$.
3. $f_3(x) := \frac{x^2+5}{x^3-1}$.
4. $f_4(x) := \cos(x^2)e^{-x}$.
5. $f_5(x) := \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$.
6. $f_6(x) := (2+\sin(x))e^x$.

Correction

Correction du 1)

On remarque $\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0$.

Correction du 2)

On divise par x au dénominateur et au numérateur :

$$f_2(x) = \frac{1+\frac{7}{x}}{4+\frac{3}{x}} \longrightarrow \frac{1}{4}\,,$$

quand x tend vers l'infini.

Correction du 3)

On factorise par le coefficient dominant au dénominateur et au numérateur :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \times \underbrace{\frac{1+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}}}_{\longrightarrow 1} \\ &\longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

quand x tend vers l'infini.

Correction du 4)

Comme la fonction cosinus est bornée par 1, il vient $|f_4(x)| \leq e^{-x} \longrightarrow 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = 0$.

Correction du 5)

On remarque $\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\log(u)}{u} = 0\,.$$

Correction du 6)

Comme $\sin(x) \geq -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient $f_6(x) \geq e^x \longrightarrow +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$.

Exercice 10

Énoncé

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3}$.
3. $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$.
5. $\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$.
6. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{4x+\pi}$.
7. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$.

Correction

Correction du 1)

On observe $\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2}{3}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} \longrightarrow \frac{2}{3}$ quand x tend vers 0.

Correction du 2)

On observe

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} &= \frac{\tan(x)\left(1-\cos(x)\right)}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} \\
&= \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)\times 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} \\
&= \frac{2}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{4}{\cos(x)}\frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} \longrightarrow 4\,,
\end{aligned}$$

quand x tend vers 0.

Correction du 3)

On remarque $\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} \longrightarrow 0$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Correction du 4)

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable en 0, de dérivée égale à 1. Aussi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$. Il s'ensuit que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x} = \frac{x\frac{e^x-1}{x} - x^2\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{x^2-x}$ est équivalente à $x \mapsto \frac{x-x^2}{x^2-x} = -1$. Conséquemment, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x} = -1$.

Correction du 5)

On pose $y := -x$. Alors, y tend vers $+\infty$. Et : $x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -y\left(\sqrt{1+y^2}-y\right) = -y\frac{1+y^2-y^2}{\sqrt{1+y^2}+y} = -\frac{y}{y+\sqrt{1+y^2}} \longrightarrow -\frac{1}{2}$ quand y tend vers $+\infty$. D'où $\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -\frac{1}{2}$.

Correction du 6)

On rappelle que $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Donc : $\frac{\cos(x)+\sin(x)}{4x+\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Correction du 7)

On rappelle que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Ainsi : $\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = 1 - \cos(x) \longrightarrow 2$ quand x tend vers π.

Exercice 11 (*)

Énoncé

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \notin \mathbb{Q}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. En déduire que f est continue en $\frac{1}{2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R} \bigcap \mathbb{Q}^c$. Montrer que f n'est pas continue en x.

3) Soit $x \in \mathbb{Q}$ avec $x \neq \frac{1}{2}$. Montrer que f n'est pas continue en x.

Correction

Correction du 1)

Déjà, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Ensuite, si $x \in \mathbb{Q}$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Et, si $x \notin \mathbb{Q}$, on a $\left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|(1-x) - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

Correction du 2)

Tout élément réel non rationnel peut être approché par une suite de rationnels (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $(x_n)_n$ une telle suite. On a $f(x_n) = x_n \longrightarrow x \neq f(x)$ pour tout $x \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, f n'est pas continue en x.

Correction du 3)

Tout élément rationnel peut être approché par une suite de réels non rationnels (par exemple par $x_n := x + \frac{\pi}{n}$). Soit $(x_n)_n$ une telle suite. On a $f(x_n) = 1 - x_n \longrightarrow 1 - x \neq f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x \neq \frac{1}{2}$. Ainsi, f n'est pas continue en $x \in \mathbb{Q}$ avec $x \neq \frac{1}{2}$.

Exercice 12 (*)

Énoncé

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Correction

D'abord, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. On observe ensuite que $f(x) = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2}\right)$. D'où

$$f(x) = \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2}\right)}{\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2}}}_{\longrightarrow 1} \frac{\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2}}{x}.$$

On étudie maintenant la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2x}$. On observe que $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{x} = 1$ d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0. Par conséquent, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (*)

Énoncé

Soit une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f(x+y)+f(x-y)=2\,(f(x)+f(y))$.

1) Calculer $f(0)$. Étudier la parité de f.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx)=n^2 f(x)$.

3) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r)=r^2 f(1)$.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)=x^2 f(1)$.

Correction

Correction du 1)

On prend $x=y=0$. Il vient $f(0)+f(0)=4f(0)$ d'où $f(0)=0$. Ensuite, avec $x=0$, on obtient $f(y)+f(-y)=2f(y)$ d'où $f(-y)=f(y)$. Il s'ensuit que f est paire.

Correction du 2)

On procède par récurrence. La propriété est vraie pour $n=0$. On la suppose vraie aux rangs $0,\cdots,n-1$. Alors, on a

$$f\left((n-1)x+x\right)+f\left((n-1)x-x\right)=2f((n-1)x)+2f(x)\,,$$

c'est-à-dire

$$f(nx)=2f((n-1)x)+2f(x)-f((n-2)x)=f(x)\left(2(n-1)^2+2-(n-2)^2\right)=n^2 f(x)\,,$$

ce qui achève la preuve.

Correction du 3)

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $p,q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$ tels que $r=\frac{p}{q}$. On a donc $f(p)=f\left(qr\right)=q^2 f(r)$. Or, $f(p)=p^2 f(1)$. Donc $f(r)=\frac{p^2}{q^2}f(1)=r^2 f(1)$.

Correction du 4)

La continuité nous donne directement $f(x)=x^2 f(1)$.