Correction des travaux dirigés - Décomposition en éléments simples

Julian Tugaut*

*Si vous trouvez des erreurs de Français ou de mathématiques ou bien si vous avez des questions et/ou des suggestions, envoyez-moi un mail à julian.tugaut@univ-st-etienne.fr

Table des matières

Exercice 1

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_1(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}\,.$$

Correction

On calcule d'abord le degré de F_1 : $\deg(F_1) = 3 - 4 = -1 < 0$. Il n'y a donc pas de partie entière. On remarque que 0 et 1 sont des racines du polynôme $X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X$. On a donc

$$X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X = X(X-1)(X^2 + 3X + 2) = X(X-1)(X+1)(X+2)\,.$$

Ainsi, il existe des constantes réelles A, B, C, D telles que

$$F_1(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{X+2}\,.$$

On calcule A en faisant tendre X vers 0 dans l'expression $XF_1(X)$. On obtient : $A = 1$. De même : $B = 2$, $C = 3$ et $D = -1$. Par conséquent :

$$F_2(X) = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X} = \frac{1}{X} + \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+1} - \frac{1}{X+2}\,.$$

Exercice 2

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}\,.$$

Correction

On calcule d'abord le degré de F_2 : $\deg(F_2) = 2 - 3 = -1 < 0$. Il n'y a donc pas de partie entière.

Les pôles de F_2 sont 0 (pôle double) et -1. Ainsi, il existe des constantes réelles A, B, C telles que

$$F_2(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X+1}\,.$$

On calcule C en faisant tendre X vers -1 dans l'expression $(X+1)F_2(X)$. On obtient $C = 5$. De même, $B = 1$. Il reste à calculer A. On multiplie $F_2(X)$ par X puis l'on fait tendre X vers ∞. On aboutit à $3 = A + C$ d'où $A = -2$. Par conséquent :

$$F_2(X) = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)} = -\frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{5}{X+1}\,.$$

Exercice 3

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_3(X) = \frac{2X^5 + 10X^3 + 12X}{(X+1)^3(X-1)^3}\,.$$

Correction

On procède comme précédemment. On trouve :

$$F_3(X) = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{(X-1)^3} + \frac{D}{X+1} + \frac{E}{(X+1)^2} + \frac{F}{(X+1)^3}\,.$$

On détermine C et F comme précédemment : $C = 3$ et $F = 3$. On soustrait ensuite $\frac{3}{(X-1)^3} + \frac{3}{(X+1)^3}$ à $F_3(X)$. On trouve alors :

$$\frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{D}{X+1} + \frac{E}{(X+1)^2} = \frac{2X^5 + 4X^3 - 6X}{(X+1)^3(X-1)^3} = \frac{2X^3 + 6X}{(X+1)^2(X-1)^2}\,.$$

On itère et l'on obtient $B = 2$ et $E = -2$. On multiplie par X et l'on fait tendre X vers l'infini. On aboutit à $A + D = 2$. Puis, on prend $X = 0$ d'où $-A + 2 + D - 2 = 0$. Il vient $A = D = 1$. Par conséquent :

$$F_3(X) = \frac{2X^5 + 10X^3 + 12X}{(X+1)^3(X-1)^3} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{1}{X+1} - \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{3}{(X+1)^3}\,.$$

Exercice 4

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_4(X) = \frac{X^5}{(X^2+X+1)^3}\,.$$

Correction

Le degré est à nouveau négatif strictement donc il n'y a pas de partie entière. On remarque que les pôles ne sont pas réels. On a donc

$$F_4(X) = \frac{AX+B}{X^2+X+1} + \frac{CX+D}{(X^2+X+1)^2} + \frac{EX+F}{(X^2+X+1)^3}\,,$$

où il reste à déterminer les constantes A, B, C, D, E et F. On multiplie d'abord par $(X^2+X+1)^3$ et l'on fait tendre X vers z_0 un complexe tel que $z_0^2+z_0+1=0$. on obtient :$z_0^5 = Ez_0+F$. Or, $X^5 = (X^2+X+1)(X^3-X^2+1) - X - 1$ d'où $z_0^5 = -1-z_0 = Ez_0+F$. $(1, z_0)$ est une base de $\mathbb{C}$ car $z_0 \notin \mathbb{R}$ d'où $E = F = -1$. On retranche ensuite $-\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}$ à $F_4(X)$ et l'on obtient :

$$\frac{AX+B}{X^2+X+1} + \frac{CX+D}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X^5+X+1}{(X^2+X+1)^3} = \frac{X^3-X^2+1}{(X^2+X+1)^2}\,.$$

On multiplie d'abord par $(X^2+X+1)^2$ et l'on fait tendre X vers z_0. on obtient :$z_0^3-z_0^2+1 = Cz_0+D$. Or, $z_0^3-1 = (z_0-1)(z_0^2+z_0+1) = 0$ d'où $Cz_0+D = 2-z_0^2 = z_0+3$ d'où $C=1$ et $D=3$. On retranche ensuite $\frac{X+3}{(X^2+X+1)^3}$ et l'on obtient :

$$\frac{AX+B}{X^2+X+1} = \frac{X^3-X^2-X-2}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X-2}{X^2+X+1}\,,$$

si bien que $A=1$ et $B=-2$. Par conséquent :

$$F_4(X) = \frac{X^5}{(X^2+X+1)^3} = \frac{X-2}{X^2+X+1} + \frac{X+3}{(X^2+X+1)^2} - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}\,.$$

Exercice 5 (*)

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_5(X) = \frac{2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72}{(X^2 + 4X + 5)^3}\,.$$

Correction

On fait la division euclidienne de $2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72$ par $X^2 + 4X + 5$. On trouve :

$$2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72 = (X^2 + 4X + 5)(2X^3 + 11X^2 + 22X + 14) - X + 2\,.$$

On fait maintenant la division euclidienne de $2X^3 + 11X^2 + 22X + 14$ par $X^2 + 4X + 5$. On trouve :

$$2X^3 + 11X^2 + 22X + 14 = (X^2 + 4X + 5)(2X + 3) - 1\,.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
F_5(X) &= \frac{2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72}{(X^2 + 4X + 5)^3} \\
&= \frac{(X^2 + 4X + 5)(2X^3 + 11X^2 + 22X + 14) - X + 2}{(X^2 + 4X + 5)^3} \\
&= \frac{(X^2 + 4X + 5)^2(2X + 3) - (X^2 + 4X + 5) - X + 2}{(X^2 + 4X + 5)^3} \\
&= \frac{2X + 3}{X^2 + 4X + 5} - \frac{1}{(X^2 + 4X + 5)^2} + \frac{-X + 2}{(X^2 + 4X + 5)^3}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 6 (*)

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_6(X) = \frac{X^5+5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}\,.$$

Correction

On développe d'abord le dénominateur : $(X+1)^5 - X^5 - 1 = 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X = 5X\left(X^3+2X^2+2X+1\right)) = 5X(X+1)(X^2+X+1)$. On a ainsi :

$$F_6(X) = \frac{X^5+5}{5X(X+1)(X^2+X+1)}\,.$$

On note que le degré de F_6 vaut 1. On a donc :

$$F_6(X) = AX + B + \frac{C}{X} + \frac{D}{X+1} + \frac{EX+F}{X^2+X+1}\,.$$

On divise $F_6(X)$ par X et on fait tendre X vers l'infini. On trouve : $A = \frac{1}{5}$. On a ensuite

$$F_6(X) - \frac{1}{5}X = B + \frac{C}{X} + \frac{D}{X+1} + \frac{EX+F}{X^2+X+1} = \frac{-2X^4-2X^3-X^2+5}{5X(X+1)(X^2+X+1)}\,.$$

On fait tendre X vers l'infini dans l'expression précédente et l'on obtient $B = -\frac{2}{5}$. On s'intéresse maintenant à la partie fractionnaire :

$$G_6(X) := F_6(X) - \frac{1}{5}X + \frac{2}{5} = \frac{C}{X} + \frac{D}{X+1} + \frac{EX+F}{X^2+X+1} = \frac{2X^3+3X^2+2X+5}{5X(X+1)(X^2+X+1)}\,.$$

Par les méthodes classiques, on trouve $C = 1$, $D = -\frac{4}{5}$. On multiplie ensuite par X^2+X+1. On fait tendre vers z_0 tel que $z_0^2 + z_0 + 1 = 0$. On obtient :

$$Ez_0 + F = \frac{4 - z_0}{-5}$$

d'où $E = \frac{1}{5}$ et $F = -\frac{4}{5}$. Par conséquent :

$$F_6(X) = \frac{1}{5}X - \frac{2}{5} + \frac{1}{X} - \frac{4}{5}\frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{5}X - \frac{4}{5}}{X^2+X+1}\,.$$

Exercice 7 (*)

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_7(X) = \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}\,.$$

Correction

On fait la division euclidienne de $X^7 + 1$ par $X^2 + X + 1$. On trouve :

$$X^7 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^5 - X^4 + X^2 - X) + (X + 1)\,.$$

On continue :

$$X^5 - X^4 + X^2 - X = (X^2 + X + 1)(X^3 - 2X^2 + X + 2) - 4X - 2\,.$$

Puis :

$$X^3 - 2X^2 + X + 2 = (X^2 + X + 1)(X - 3) + (3X + 5)\,.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
F_7(X) &= \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= \frac{X + 1 - (4X + 2)(X^2 + X + 1) + (3X + 5)(X^2 + X + 1)^2 + (X - 3)(X^2 + X + 1)^3}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 8 (*)

Énoncé

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F_8(X) = \frac{X^2}{X^4 - 2\cos(a)X^2 + 1}\,.$$

Correction

On factorise le dénominateur pour commencer. On résout l'équation $X^4 - 2\cos(a)X^2 + 1 = 0$. On trouve $x_1 = e^{i\frac{a}{2}}$, $x_2 = e^{-i\frac{a}{2}}$, $x_3 = -e^{i\frac{a}{2}}$ et $x_4 = -e^{-i\frac{a}{2}}$. Ainsi :

$$X^4 - 2\cos(a)X^2 + 1 = \underbrace{(X - x_1)(X - x_2)}_{=X^2-2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X+1}\underbrace{(X - x_3)(X - x_4)}_{=X^2+2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X+1}\,.$$

On a donc :

$$F_8(X) = \frac{AX + B}{X^2 - 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X + 1} + \frac{CX + D}{X^2 + 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X + 1}\,.$$

On multiplie par $X^2 - 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X + 1$ puis l'on fait tendre X vers x_1. On obtient - en remarquant $x_1^2 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)x_1 - 1$:

$$Ax_1 + B = \frac{x_1^2}{x_1^2 + 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)x_1 + 1} = \frac{x_1^2}{4\cos\left(\frac{a}{2}\right)x_1} = \frac{1}{4\cos\left(\frac{a}{2}\right)}x_1\,.$$

Il s'ensuit : $A = \frac{1}{4\cos\left(\frac{a}{2}\right)}$ et $B = 0$. De même, $C = -\frac{1}{4\cos\left(\frac{a}{2}\right)}$ et $D = 0$. On a donc

$$F_8(X) = \frac{X^2}{X^4 - 2\cos(a)X^2 + 1} = \frac{1}{4\cos\left(\frac{a}{2}\right)}\left(\frac{X}{X^2 - 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X + 1} - \frac{X}{X^2 + 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)X + 1}\right)\,.$$