Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 7 : Séries numériques.

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Série numérique

Définition

On se place sur un corps $\mathbb{K}$ (ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une série numérique sur $\mathbb{K}$ est un couple formé de deux suites numériques $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} ; (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k .$$

Série numérique

Définition

On se place sur un corps $\mathbb{K}$ (ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une série numérique sur $\mathbb{K}$ est un couple formé de deux suites numériques $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

Vocabulaire et notation

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le terme général de la série.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la somme partielle au rang n de la série.
Une série sera désignée par (Σu_n) ou par "la série de terme général u_n".

Quelques exemples

La série de terme général constant égal à 0

(Σu_n) avec $u_n := 0$ pour tout $n \geq 0$.
Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition sur les séries.

Quelques exemples

La série de terme général constant égal à 0

(Σu_n) avec $u_n := 0$ pour tout $n \geq 0$.
Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition sur les séries.

Remarque

Certaines séries ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.

Quelques exemples

La série de terme général constant égal à 0

(Σu_n) avec $u_n := 0$ pour tout $n \geq 0$.
Il s'agit de l'élément neutre pour l'addition sur les séries.

Remarque

Certaines séries ne commencent pas à 0 mais à 1 voire à $n_0 \in \mathbb{N}$.

La série des inverses des entiers au carré

$(\Sigma u_n)_{n\geq 1}$ avec $u_n := \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Notons qu'ici,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Limite de la série

La limite de la série est S, la limite de la suite $(S_n)_n$.

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Limite de la série

La limite de la série est S, la limite de la suite $(S_n)_n$.

Reste d'ordre n de la série

$$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k .$$

Définition

Convergence

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite des sommes partielles, $(S_n)_n$ converge vers une limite S.

Limite de la série

La limite de la série est S, la limite de la suite $(S_n)_n$.

Reste d'ordre n de la série

$$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k .$$

Traduction rigoureuse

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists N_\epsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, n \geq N_\epsilon \,, \text{ on a } \left| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right| < \epsilon \,.$$

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Condition nécessaire

Si $(\Sigma u_n)_n$ est convergente, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

Quelques remarques

Premiers termes d'une série

Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa convergence. Mais ils changent la somme de celle-ci.

Condition nécessaire

Si $(\Sigma u_n)_n$ est convergente, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.

Condition non suffisante

La série peut être divergente même si u_n tend vers 0. Exemple : $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Or, la série associée diverge.

Notations

Somme de la série

Si S est la somme de la série de terme général u_n, on note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Notations

Somme de la série

Si S est la somme de la série de terme général u_n, on note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Attention au théorème de réarrangement de Riemann

Il ne faut pas noter $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Notations

Somme de la série

Si S est la somme de la série de terme général u_n, on note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Attention au théorème de réarrangement de Riemann

Il ne faut pas noter $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

La série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$ est convergente : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$. En revanche, si l'on réordonne comme suit :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right\},$$

tous les termes de la précédente série sont bien sommés. Pourtant, la limite est ici : $\frac{3}{2}\log(2)$.

Notations

Somme de la série

Si S est la somme de la série de terme général u_n, on note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Attention au théorème de réarrangement de Riemann

Il ne faut pas noter $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. En effet, cette notation n'a pas de sens si la série n'est pas absolument convergente.

La série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$ est convergente : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$. En revanche, si l'on réordonne comme suit :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right\},$$

tous les termes de la précédente série sont bien sommés. Pourtant, la limite est ici : $\frac{3}{2}\log(2)$.

Définition

Convergence absolue

Une série $(\Sigma u_n)_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Définition

Convergence absolue

Une série $(\Sigma u_n)_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Liens entre la convergence et la convergence absolue

La convergence absolue entraîne la convergence simple.

Plan

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Preuve

La suite des sommes partielles de la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est la somme des suites des sommes partielles des séries $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$. Ces deux suites sont convergentes donc leur somme l'est aussi.

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Preuve

La suite des sommes partielles de la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est la somme des suites des sommes partielles des séries $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$. Ces deux suites sont convergentes donc leur somme l'est aussi.

Somme de séries absolument convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries absolument convergentes de limites respectives s_u et s_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est absolument convergente.

Somme de séries convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries convergentes de limites respectives S_u et S_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est convergente de limite $S_u + S_v$.

Preuve

La suite des sommes partielles de la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est la somme des suites des sommes partielles des séries $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$. Ces deux suites sont convergentes donc leur somme l'est aussi.

Somme de séries absolument convergentes

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries absolument convergentes de limites respectives s_u et s_v. Alors la série $(\Sigma(u_n + v_n))_n$ est absolument convergente.

Multiplication par un scalaire

Soit une série $(\Sigma u_n)_n$ convergente de limite S et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. La série de terme général λu_n est convergente de limite λS.

Produit de séries

Définition

Soient deux séries $\left(\Sigma u_n\right)_n$ et $\left(\Sigma v_n\right)_n$. Le produit de ces deux séries est la série de terme général w_n avec

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \, .$$

Produit de séries

Définition

Soient deux séries $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$. Le produit de ces deux séries est la série de terme général w_n avec

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \, .$$

Convergence du produit : théorème de Cauchy

On suppose que les deux séries sont absolument convergentes. Alors, la série produit est absolument convergente et l'on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \, .$$

Affaiblissement des hypothèses du théorème

Affaiblissement des hypothèses du théorème

Théorème de Mertens

Soient deux séries $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$. On suppose que la série $(\Sigma u_n)_n$ est absolument convergente et que la série $(\Sigma v_n)_n$ est convergente. Alors, la série produit est convergente et l'on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Affaiblissement des hypothèses du théorème

Théorème de Mertens

Soient deux séries $\left(\Sigma u_n\right)_n$ et $\left(\Sigma v_n\right)_n$. On suppose que la série $\left(\Sigma u_n\right)_n$ est absolument convergente et que la série $\left(\Sigma v_n\right)_n$ est convergente. Alors, la série produit est convergente et l'on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Remarque

La série produit de deux séries convergentes n'est pas nécessairement convergente. Exemple : $u_n = v_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La série $\left(\Sigma \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_n$ est convergente (théorème des séries alternées) mais la série produit est de terme général $w_n := (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. On peut prouver facilement : $k(n-k) \leq \frac{n^2}{2}$ d'où $|w_n| \geq (n-1) \times \sqrt{\frac{2}{n^2}}$ ce qui ne converge pas vers 0 donc la série produit est divergente.

Plan

Séries alternées

Définition

Une série $(\Sigma u_n)_n$ est alternée si la suite $(u_n)_n$ est alternée c'est-à-dire si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Séries alternées

Définition

Une série $\left(\sum u_n\right)_n$ est alternée si la suite $(u_n)_n$ est alternée c'est-à-dire si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème des séries alternées

Soit une série alternée $\left(\sum u_n\right)_n$. On suppose que la suite $(|u_n|)_n$ tend vers 0 en décroissant. Alors, la série est convergente.

Séries alternées

Définition

Une série $(\Sigma u_n)_n$ est alternée si la suite $(u_n)_n$ est alternée c'est-à-dire si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème des séries alternées

Soit une série alternée $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que la suite $(|u_n|)_n$ tend vers 0 en décroissant. Alors, la série est convergente.

Preuve

On suppose : $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} < 0$. On a alors :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| < 0$$

car la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante. Ainsi, la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante. De même, la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante. Puis, on remarque $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} > 0$. De plus, la quantité $S_{2n} - S_{2n+1}$ tend vers 0. Conséquemment, les deux suites sont adjacentes donc convergent vers une même limite.

Comparaison de séries à termes positifs

Théorème

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors, si la série $(\Sigma v_n)_n$ converge, la série $(\Sigma u_n)_n$ est également convergente.
Et, si la série $(\Sigma u_n)_n$ diverge vers l'infini, la série $(\Sigma v_n)_n$ est également divergente.

Comparaison de séries à termes positifs

Théorème

Soient $(\Sigma u_n)_n$ et $(\Sigma v_n)_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors, si la série $(\Sigma v_n)_n$ converge, la série $(\Sigma u_n)_n$ est également convergente.
Et, si la série $(\Sigma u_n)_n$ diverge vers l'infini, la série $(\Sigma v_n)_n$ est également divergente.

Preuve

On introduit les deux suites U et V définies par $U_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n := \sum_{k=0}^{n} v_k$. Comme la série $(\Sigma v_n)_n$ est convergente, on en déduit que la suite V est convergente donc majorée par $M > 0$. Conséquemment, il vient $U_n \leq V_n \leq M$. La suite U est donc majorée. Or, $U_n - U_{n-1} = u_n \geq 0$. Donc la suite U est croissante et majorée donc convergente.

Comparaison de séries à termes positifs

Théorème

Soient $\left(\Sigma u_n\right)_n$ et $\left(\Sigma v_n\right)_n$ deux séries à termes positifs. On suppose $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors, si la série $\left(\Sigma v_n\right)_n$ converge, la série $\left(\Sigma u_n\right)_n$ est également convergente.
Et, si la série $\left(\Sigma u_n\right)_n$ diverge vers l'infini, la série $\left(\Sigma v_n\right)_n$ est également divergente.

Preuve

On introduit les deux suites U et V définies par $U_n := \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n := \sum_{k=0}^n v_k$. Comme la série $\left(\Sigma v_n\right)_n$ est convergente, on en déduit que la suite V est convergente donc majorée par $M > 0$. Conséquemment, il vient $U_n \leq V_n \leq M$. La suite U est donc majorée. Or, $U_n - U_{n-1} = u_n \geq 0$. Donc la suite U est croissante et majorée donc convergente.

En prenant la contraposée du premier résultat, on obtient immédiatement le second.

Critère de Cauchy

Théorème

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l$.

Critère de Cauchy

Théorème

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.

Critère de Cauchy

Théorème

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.
- Si $l > 1$, la série est divergente.

Critère de Cauchy

Théorème

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.
- Si $l > 1$, la série est divergente.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Critère de Cauchy

Théorème

On se donne une série à termes positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.
- Si $l > 1$, la série est divergente.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve

Supposons $l < 1$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $l = 1 - 2\epsilon$. Puis, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \epsilon$ d'où $u_n < (1-\epsilon)^n$. Ainsi, on a

$$\sum_{p=N_\epsilon}^{n} u_p < \sum_{p=N_\epsilon}^{n} (1-\epsilon)^p \leq (1-\epsilon)^{N_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} .$$

La suite des sommes partielles est majorée et croissante donc convergente.

Critère de D'Alembert

Théorème

On se donne une série à termes strictement positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$.

Critère de D'Alembert

Théorème

On se donne une série à termes strictement positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.

Critère de D'Alembert

Théorème

On se donne une série à termes strictement positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.
- Si $l > 1$, la série est divergente.

Critère de D'Alembert

Théorème

On se donne une série à termes strictement positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.
- Si $l > 1$, la série est divergente.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Critère de D'Alembert

Théorème

On se donne une série à termes strictement positifs $(\Sigma u_n)_n$. On suppose que l'on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$.

- Si $l < 1$, la série est convergente.
- Si $l > 1$, la série est divergente.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve

Supposons $l < 1$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que $l = 1 - 2\epsilon$. Puis, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \epsilon$ d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \epsilon$. On en déduit $u_n \leq (1-\epsilon)^{n-N_\epsilon} u_{N_\epsilon}$. En prenant la racine énième, on en déduit $\sqrt[n]{u_n} < 1 - \epsilon$ si n est suffisamment grand. On procède alors comme dans la preuve du critère de Cauchy.

Comparaison avec une intégrale

Théorème

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante, de limite nulle en l'infini. On introduit $u_n := f(n)$. Alors, la série $(\Sigma u_n)_n$ converge si et seulement si $\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x < +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

Plan

Séries de Riemann

Convergence

On se donne $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $\left(\sum u_n\right)_n$ avec $u_n := \frac{1}{n^x}$. La série converge si et seulement si $x > 1$. (On définit alors une fonction, la fonction zêta de Riemann).

Séries de Riemann

Convergence

On se donne $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $\left(\Sigma u_n\right)_n$ avec $u_n := \frac{1}{n^x}$. La série converge si et seulement si $x > 1$. (On définit alors une fonction, la fonction zêta de Riemann).

Preuve

On calcule l'intégrale $\int_1^R \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - R^{1-x}\right)$. Cette intégrale converge si et seulement si $1 - x < 0$ c'est-à-dire si $x > 1$. On applique alors le théorème de comparaison avec une intégrale.

Séries de Riemann

Convergence

On se donne $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $\left(\sum u_n\right)_n$ avec $u_n := \frac{1}{n^x}$. La série converge si et seulement si $x > 1$. (On définit alors une fonction, la fonction zêta de Riemann).

Preuve

On calcule l'intégrale $\int_1^R \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - R^{1-x}\right)$. Cette intégrale converge si et seulement si $1 - x < 0$ c'est-à-dire si $x > 1$. On applique alors le théorème de comparaison avec une intégrale.

Remarque

Si $x = 1$, on a en fait $\int_1^R \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \log(R) \to +\infty$.

Séries de Bertrand

Convergence

On se donne $\alpha > 0$. On considère la série de terme général $\frac{1}{n(\log(n))^{\alpha}}$. La série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Séries de Bertrand

Convergence

On se donne $\alpha > 0$. On considère la série de terme général $\frac{1}{n(\log(n))^\alpha}$. La série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

On calcule l'intégrale
$\int_2^R \frac{1}{x(\log(x))^\alpha} \mathrm{d}x = \int_2^R \frac{\mathrm{d}\log(x)}{(\log(x))^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\log(2)^{1-\alpha} - \log(R)^{1-\alpha}\right)$.
Cette intégrale converge si et seulement si $1-\alpha < 0$ c'est-à-dire si $\alpha > 1$. On applique alors le théorème de comparaison avec une intégrale.

Séries de Bertrand

Convergence

On se donne $\alpha > 0$. On considère la série de terme général $\frac{1}{n(\log(n))^{\alpha}}$. La série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

On calcule l'intégrale
$\int_2^R \frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\mathrm{d}x = \int_2^R \frac{\mathrm{d}\log(x)}{(\log(x))^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\log(2)^{1-\alpha} - \log(R)^{1-\alpha}\right)$.
Cette intégrale converge si et seulement si $1-\alpha < 0$ c'est-à-dire si $\alpha > 1$. On applique alors le théorème de comparaison avec une intégrale.

Remarque

Si $\alpha = 1$, on a en fait
$\int_2^R \frac{1}{x(\log(x))^{\alpha}}\mathrm{d}x = \log\left(\log(R)\right) - \log\left(\log(2)\right) \to +\infty$.