Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 6 : Suites de fonctions.

Julian Tugaut

18 février 2023

Définition

Définition

Suite de fonctions

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de fonctions. f_n est le terme général. Ici, on regardera des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$ où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Suite de fonctions

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de fonctions. f_n est le terme général. Ici, on regardera des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$ où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n \; : \; \begin{array}{rl} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{0\leq x\leq n} \end{array} .$$

Convergence : un peu de topologie

Convergence : un peu de topologie

Avertissement

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, converger pour la distance euclidienne ou converger pour la distance d_1 revient au même.

Toutefois, dès que l'on est en dimension infinie, les normes ne sont pas toutes équivalentes. Conséquemment, il faut préciser par rapport à quelle distance on converge. Par ailleurs, certaines convergences ne sont pas liées à des distances.

Convergence : un peu de topologie

Avertissement

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, converger pour la distance euclidienne ou converger pour la distance d_1 revient au même.

Toutefois, dès que l'on est en dimension infinie, les normes ne sont pas toutes équivalentes. Conséquemment, il faut préciser par rapport à quelle distance on converge. Par ailleurs, certaines convergences ne sont pas liées à des distances.

Topologie

La topologie est ce qui détermine une convergence. À partir de maintenant, lorsque l'on travaille avec des suites de fonctions, on <u>*DOIT*</u> préciser pour quelle toplogie.

Convergence : un peu de topologie

Avertissement

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, converger pour la distance euclidienne ou converger pour la distance d_1 revient au même.

Toutefois, dès que l'on est en dimension infinie, les normes ne sont pas toutes équivalentes. Conséquemment, il faut préciser par rapport à quelle distance on converge. Par ailleurs, certaines convergences ne sont pas liées à des distances.

Topologie

La topologie est ce qui détermine une convergence. À partir de maintenant, lorsque l'on travaille avec des suites de fonctions, on *DOIT* préciser pour quelle toplogie.

Remarque

En probabilités, la convergence d'une suite de variables aléatoires peut être dans L^1, presque sûre, en probabilité ou en loi.

Convergence simple

Définition

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction f si la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ quel que soit $x \in \mathcal{D}$:

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon(x) \text{ tel que } \forall n \geq N_\epsilon(x)\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Convergence simple

Définition

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction f si la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ quel que soit $x \in \mathcal{D}$:

$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ \forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon(x) \text{ tel que } \forall n \geq N_\epsilon(x)\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Exemple

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{array}{cccl} f_n & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{|x|\leq n} \end{array}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction exponentielle.

Convergence uniforme

Définition

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (pour la topologie de la norme infinie) vers la fonction f si la suite *réelle* $(||f_n - f||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon \text{ tel que } \forall n \geq N_\epsilon\,,\ \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Convergence uniforme

Définition

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (pour la topologie de la norme infinie) vers la fonction f si la suite *réelle* $(||f_n - f||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N_\epsilon \text{ tel que } \forall n \geq N_\epsilon\,,\ \sup_{x\in\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Exemple

Soit la suite de fonctions définie par :

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;1] & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto f_n(x) := x + \frac{1}{n} \end{array}\,.$$

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0;1] & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto f(x) := x \end{array}\,.$$

Lien entre les deux convergences

Théorème

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
La convergence simple n'entraîne PAS la convergence uniforme.

Lien entre les deux convergences

Théorème

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
La convergence simple n'entraîne PAS la convergence uniforme.

Exemple

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n \quad : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{|x|\leq n} \end{array} .$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction exponentielle mais elle ne converge pas uniformément. En effet,
$\sup_{x\in\mathbb{R}} |e^x - f_n(x)| \geq \sup_{|x|\geq n} |e^x| = +\infty$.

Convergence uniforme et continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f. On suppose que f_n est continue en t_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est continue en t_0. Conséquemment, si f_n est continue sur tout le domaine de définition $\mathcal{D}$ alors f est aussi continue sur tout le domaine de définition.

Convergence uniforme et continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f. On suppose que f_n est continue en t_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est continue en t_0. Conséquemment, si f_n est continue sur tout le domaine de définition $\mathcal{D}$ alors f est aussi continue sur tout le domaine de définition.

Si la convergence est simple, la continuité n'est pas garantie.

Convergence uniforme et continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f. On suppose que f_n est continue en t_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est continue en t_0. Conséquemment, si f_n est continue sur tout le domaine de définition $\mathcal{D}$ alors f est aussi continue sur tout le domaine de définition.

Si la convergence est simple, la continuité n'est pas garantie.

Exemple

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & [0;1] & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto x^n \end{array}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1[$ mais vers 1 pour $x = 1$. La convergence n'est pas uniforme d'où la discontinuité en 1 de la limite ponctuelle.