Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 4 : Équations différentielles.

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Équations différentielles

Définition

Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre la variable t et les dérivées d'ordre 0, 1 $\cdots$, n d'une fonction inconnue x de t. On l'écrit symboliquement :

$$F\left(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\right) = 0\,. \tag{1}$$

Équations différentielles

Définition

Une équation différentielle d'ordre n est une relation entre la variable t et les dérivées d'ordre $0, 1 \cdots, n$ d'une fonction inconnue x de t. On l'écrit symboliquement :

$$F\left(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)\right) = 0\,. \tag{1}$$

Résolution

Résoudre cette équation, c'est à la fois donner un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction x sur I telle que (1) soit vérifiée pour tout $t \in I$.

Existence et unicité

Rappel

Une fonction F est lipschitzienne si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Existence et unicité

Rappel

Une fonction F est lipschitzienne si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{d}{dt}x(t) = F\left(t, x(t)\right)$. On demande également une condition au bord : $x(t_0) = x_0$. On suppose que la fonction F est continue et lipschitzienne pour la deuxième variable. Alors, cette équation différentielle admet une unique solution.

Application

On se donne l'équation différentielle

$$x'(t) - ix(t) = 0\,,$$

avec la condition au bord : $x(0) = 1$. Cette équation a une unique solution.

Application

On se donne l'équation différentielle

$$x'(t) - ix(t) = 0\,,$$

avec la condition au bord : $x(0) = 1$. Cette équation a une unique solution. Or, si l'on pose $\varphi_1(t) := e^{it}$ et $\varphi_2(t) := \cos(t) + i\sin(t)$, on voit que φ_1 et φ_2 sont deux solutions de l'équation différentielle et elles vérifient toutes les deux la condition au bord.

Application

On se donne l'équation différentielle

$$x'(t) - ix(t) = 0\,,$$

avec la condition au bord : $x(0) = 1$. Cette équation a une unique solution. Or, si l'on pose $\varphi_1(t) := e^{it}$ et $\varphi_2(t) := \cos(t) + i\sin(t)$, on voit que φ_1 et φ_2 sont deux solutions de l'équation différentielle et elles vérifient toutes les deux la condition au bord.

Conséquemment, on a bien $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.

Phénomène de Peano

Phénomène de Peano

Hypothèses

Il faut bien vérifier que la fonction est lipschitzienne sinon un phénomène de Peano peut apparaître à savoir la non-unicité de la solution.

Phénomène de Peano

Hypothèses

Il faut bien vérifier que la fonction est lipschitzienne sinon un phénomène de Peano peut apparaître à savoir la non-unicité de la solution.

Exemple

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)}\,,$$

avec $x(0) = 0$. On cherche à résoudre sur $t \geq 0$. Alors, pour tout $t_0 \geq 0$, la fonction suivante est bien une solution de l'équation différentielle avec problème au bord :

$$x^{(t_0)}(t) := (t - t_0)^2\, \mathbb{1}_{t \geq t_0}\,.$$

Définition

Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire est une équation différentielle telle que la fonction sous-jacente est linéaire (donc lipschitzienne) pour chacune des coordonnées $x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)$. En d'autres termes, c'est une équation différentielle de la forme :

$$a_n(t)x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t) = s(t)\,.$$

Définition

Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire est une équation différentielle telle que la fonction sous-jacente est linéaire (donc lipschitzienne) pour chacune des coordonnées $x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)$. En d'autres termes, c'est une équation différentielle de la forme :

$$a_n(t)x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=s(t)\,.$$

Terminologie

Les fonctions $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont les coefficients de l'équation. La fonction s est le second membre de l'équation (ou la sortie).

Espace affine - Espace vectoriel

Définition

L'équation homogène associée à cette équation différentielle est

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0\,.$$

On a simplement enlevé le second membre.

Espace affine - Espace vectoriel

Définition

L'équation homogène associée à cette équation différentielle est

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0\,.$$

On a simplement enlevé le second membre.

Théorème

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre. Alors, si $a_n(t)$ ne s'annule pas, $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension n. Et, pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$, on a $x_1 - x_2 \in \mathcal{S}_0$.
Ainsi, il suffit de résoudre l'équation homogène et de trouver une solution particulière x_p et l'on a $\mathcal{S} = x_p + \mathcal{S}_0$. On dit que $\mathcal{S}$ est un espace affine.

Plan

Définition

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

On considère ici une équation de la forme

$$x'(t) + ax(t) = s(t)\,.$$

Définition

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

On considère ici une équation de la forme

$$x'(t) + ax(t) = s(t)\,.$$

Espace affine

On sait que l'espace des solutions est un espace affine de dimension 1. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + ax(t) = 0$.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + ax(t) = 0$.

Théorème

Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + ax(t) = 0$.

Théorème

Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$

Preuve

Soit x une solution de l'équation homogène associée. On pose $y(t) := x(t)e^{+at}$. On a alors :

$$y'(t) = x'(t)e^{at} + ax(t)e^{at} = \left(x'(t) + ax(t)\right) e^{at} = 0\,.$$

La fonction y est donc constante et égale à λ. Or, $x(t) = y(t)e^{-at}$.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + ax(t) = 0$.

Théorème

Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$

Preuve

Soit x une solution de l'équation homogène associée. On pose $y(t) := x(t)e^{+at}$. On a alors :

$$y'(t) = x'(t)e^{at} + ax(t)e^{at} = \left(x'(t) + ax(t)\right) e^{at} = 0\,.$$

La fonction y est donc constante et égale à λ. Or, $x(t) = y(t)e^{-at}$.

Remarque

On résout en fait l'équation caractéristique $X + a = 0$.

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-at}$. On est ainsi amené à résoudre

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-at}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)e^{-at} + a\lambda(t)e^{-at} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{at}\,.$$

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-at}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)e^{-at} + a\lambda(t)e^{-at} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{at}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = e^{-at}\int_0^t s(u)e^{au}\mathrm{d}u\,.$$

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-at}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)e^{-at} + a\lambda(t)e^{-at} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{at}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = e^{-at}\int_0^t s(u)e^{au}\mathrm{d}u\,.$$

La solution générale de l'équation initiale est donc

$$x(t) = \left(C + \int_0^t s(u)e^{au}\mathrm{d}u\right)e^{-at}\,.$$

Plan

Définition

Linéaires du premier ordre à coefficients non constants

On considère ici une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = s(t)\,.$$

Définition

Linéaires du premier ordre à coefficients non constants

On considère ici une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = s(t)\,.$$

La fonction a ne doit pas être oubliée.

Définition

Linéaires du premier ordre à coefficients non constants

On considère ici une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = s(t) .$$

La fonction a ne doit pas être oubliée.

Espace des solutions

L'espace des solutions n'est pas forcément affine. Il y a en effet des soucis si a s'annule. On se place donc sur un intervalle où a ne s'annule pas et l'on se ramène alors à une équation de la forme

$$x'(t) + c(t)x(t) = s(t) .$$

Définition

Linéaires du premier ordre à coefficients non constants

On considère ici une équation de la forme

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = s(t)\,.$$

La fonction a ne doit pas être oubliée.

Espace des solutions

L'espace des solutions n'est pas forcément affine. Il y a en effet des soucis si a s'annule. On se place donc sur un intervalle où a ne s'annule pas et l'on se ramène alors à une équation de la forme

$$x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

Espace affine

Alors, l'espace des solutions est un espace affine de dimension 1. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + c(t)x(t) = 0$.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + c(t)x(t) = 0$.

Théorème

Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-C(t)}$ où C est une primitive de c.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x'(t) + c(t)x(t) = 0$.

Théorème

Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $t \mapsto \lambda e^{-C(t)}$ où C est une primitive de c.

Preuve

Soit x une solution de l'équation homogène associée. On pose $y(t) := x(t)e^{C(t)}$. On a alors :

$$y'(t) = x'(t)e^{C(t)} + C'(t)x(t)e^{C(t)} = \left(x'(t) + c(t)x(t)\right) e^{C(t)} = 0\,.$$

La fonction y est donc constante et égale à λ. Or, $x(t) = y(t)e^{-C(t)}$.

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-C(t)}$. On est ainsi amené à résoudre

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-C(t)}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)e^{-C(t)} + c(t)\lambda(t)e^{-C(t)} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{C(t)}\,.$$

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-C(t)}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)e^{-C(t)} + c(t)\lambda(t)e^{-C(t)} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{C(t)}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = e^{-C(t)}\int_0^t s(u)e^{C(u)}\mathrm{d}u\,.$$

Recherche d'une solution particulière

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda(t)e^{-C(t)}$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)e^{-C(t)} + c(t)\lambda(t)e^{-C(t)} = s(t)\,,$$

ce qui donne en fait

$$\lambda'(t) = s(t)e^{C(t)}\,.$$

Il suffit ensuite de primitiver. On trouve ainsi une solution particulière

$$x_p(t) = e^{-C(t)}\int_0^t s(u)e^{C(u)}\mathrm{d}u\,.$$

La solution générale de l'équation initiale est donc

$$x(t) = \left(\mu + \int_0^t s(u)e^{C(u)}\mathrm{d}u\right)e^{-C(t)}\,.$$

Plan

Quelques exemples concrets

Équations différentielles non-linéaires

Bon nombre d'équations utiles ne sont pas linéaires. L'équation régissant la charge et la décharge de la cathode dans une batterie de lithium n'est pas linéaire.

Quelques exemples concrets

Équations différentielles non-linéaires

Bon nombre d'équations utiles ne sont pas linéaires. L'équation régissant la charge et la décharge de la cathode dans une batterie de lithium n'est pas linéaire.

Conduction neuronale

Une équation très simplifiée qui intervient dans les modèles biologiques :

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\nabla V\left(x(t)\right)$$

où V est un potentiel non-convexe.

Définition

Équation à variables séparées

Une équation à variables séparées est une équation dans laquelle la fonction sous-jacente F est de la forme $F(t, x, x') = f_1(t) f_2(x) x'$. Une telle équation se met donc sous la forme $g(x(t))x'(t) = h(t)$. En utilisant la notation physicienne, il vient :

$$g(x(t))\mathrm{d}(x(t)) = h(t)\mathrm{d}t\,.$$

Définition

Équation à variables séparées

Une équation à variables séparées est une équation dans laquelle la fonction sous-jacente F est de la forme $F(t,x,x') = f_1(t)f_2(x)x'$. Une telle équation se met donc sous la forme $g(x(t))x'(t) = h(t)$. En utilisant la notation physicienne, il vient :

$$g(x(t))\mathrm{d}(x(t)) = h(t)\mathrm{d}t\,.$$

Résolution

Il suffit d'intégrer. Soit G une primitive de g et soit H une primitive de h. On intègre de t_0 à t :

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = H(t) - H(t_0)\,.$$

Un dernier exemple d'équation non-linéaire

Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation de la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)x(t)^{\alpha}\,,\ \alpha \neq 1\,,\ \alpha \neq 0\,.$$

Un dernier exemple d'équation non-linéaire

Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation de la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)x(t)^{\alpha}\,,\ \alpha \neq 1\,,\ \alpha \neq 0\,.$$

Résolution

On fait le changement de variable : $y(t) := x(t)^{\beta}$ où β sera choisi subséquemment. Ainsi, $x(t) = y(t)^{\frac{1}{\beta}}$. L'équation devient :

$$\frac{1}{\beta}y'(t)y(t)^{\frac{1}{\beta}-1} + a(t)y(t)^{\frac{1}{\beta}} = b(t)y(t)^{\frac{\alpha}{\beta}}\,.$$

Puis, en multipliant par $y(t)^{1-\frac{1}{\beta}}$, on a

$$\frac{1}{\beta}y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}\,.$$

Un dernier exemple d'équation non-linéaire

Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation de la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)x(t)^{\alpha}\,,\ \alpha \neq 1\,,\ \alpha \neq 0\,.$$

Résolution

On fait le changement de variable : $y(t) := x(t)^{\beta}$ où β sera choisi subséquemment. Ainsi, $x(t) = y(t)^{\frac{1}{\beta}}$. L'équation devient :

$$\frac{1}{\beta}y'(t)y(t)^{\frac{1}{\beta}-1} + a(t)y(t)^{\frac{1}{\beta}} = b(t)y(t)^{\frac{\alpha}{\beta}}\,.$$

Puis, en multipliant par $y(t)^{1-\frac{1}{\beta}}$, on a

$$\frac{1}{\beta}y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}\,.$$

On choisit donc $\beta := 1-\alpha$ et l'équation en y est linéaire.

Plan

Définition

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On considère ici une équation de la forme

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = s(t) \,.$$

Définition

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On considère ici une équation de la forme

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = s(t)\,.$$

Espace affine

On sait que l'espace des solutions est un espace affine de dimension 2. On résout donc l'équation homogène et l'on cherche ensuite une solution particulière.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$.

Équation caractéristique

L'équation caractéristique associée est $X^2 + aX + b = 0$. On note $\Delta := a^2 - 4b$. Trois cas :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles r_1 et r_2.
2. Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution réelle r_0.
3. Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes $z = \alpha + i\beta$ et $\overline{z} = \alpha - i\beta$.

Résolution de l'équation homogène

Écriture de l'équation homogène

L'équation homogène est ici $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$.

Équation caractéristique

L'équation caractéristique associée est $X^2 + aX + b = 0$. On note $\Delta := a^2 - 4b$. Trois cas :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles r_1 et r_2.
2. Si $\Delta = 0$, il y a une unique solution réelle r_0.
3. Si $\Delta < 0$, il y a deux solutions complexes $z = \alpha + i\beta$ et $\overline{z} = \alpha - i\beta$.

Théorème

Si $\Delta > 0$, alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}\,;\, t \mapsto e^{r_2 t}\right)$.
Si $\Delta = 0$, alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto te^{r_0 t}\,;\, t \mapsto e^{r_0 t}\right)$.
Si $\Delta < 0$, alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \cos(\beta t)\, e^{\alpha t}\,;\, t \mapsto \sin(\beta t)\, e^{\alpha t}\right)$.

Recherche d'une solution particulière

Notation

On note $(e_1\ ;\ e_2)$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$.

Recherche d'une solution particulière

Notation

On note $(e_1 \,;\, e_2)$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$.

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière x_p sous la forme $x_p(t) := \lambda_1(t)e_1(t) + \lambda_2(t)e_2(t)$ où les deux fonctions λ_1 et λ_2 doivent vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1'(t)e_1'(t) + \lambda_2'(t)e_2'(t) = s(t) \\ \lambda_1'(t)e_1(t) + \lambda_2'(t)e_2(t) = 0 \end{array} \right. .$$

On obtient alors $\lambda_1'(t) = \frac{e_2(t)}{e_1'(t)e_2(t) - e_1(t)e_2'(t)}\, s(t)$ et $\lambda_2'(t) = -\frac{e_1(t)}{e_1'(t)e_2(t) - e_1(t)e_2'(t)}\, s(t)$.

Plan

Définition

Équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients non constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients non constants est une équation de la forme

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

Définition

Équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients non constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients non constants est une équation de la forme

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = s(t)\,.$$

Deux exemples très simples

On peut considérer l'équation

$$x''(t) = tx(t)\,.$$

Et l'équation

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2 - 1)x(t) = 0\,.$$

Méthode générale de résolution de ces équations

Méthode générale de résolution de ces équations

Théorème

Toi qui lis ceci, abandonne tout espoir.

Méthode générale de résolution de ces équations

Théorème

Toi qui lis ceci, abandonne tout espoir. Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations et il n'y en aura jamais.

Méthode générale de résolution de ces équations

Théorème

Toi qui lis ceci, abandonne tout espoir. Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations et il n'y en aura jamais.

Preuve

Voir le livre "Théorie de Galois" d'Yvan Gozard, plus précisément la dernière page, dans le paragraphe "Théorie de Galois différentielle".

Méthode générale de résolution de ces équations

Théorème

Toi qui lis ceci, abandonne tout espoir. Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations et il n'y en aura jamais.

Preuve

Voir le livre "Théorie de Galois" d'Yvan Gozard, plus précisément la dernière page, dans le paragraphe "Théorie de Galois différentielle".

Exemple

L'équation $x''(t) = tx(t)$ ne peut pas être résolue.

Méthode générale de résolution de ces équations

Théorème

Toi qui lis ceci, abandonne tout espoir. Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations et il n'y en aura jamais.

Preuve

Voir le livre "Théorie de Galois" d'Yvan Gozard, plus précisément la dernière page, dans le paragraphe "Théorie de Galois différentielle".

Exemple

L'équation $x''(t) = tx(t)$ ne peut pas être résolue.

Conséquence

Un bon nombre de fonctions sont définies comme étant des solutions à certaines équations. Exemple : les fonctions de Bessel.